Colle 24

Fonctions de deux variables - Estimation

Questions de cours

1. Théorème des suites adjacentes.
2. Matrices de passage et formule de changement de bases.
3. Propriétés de l'espérance.

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$.

Soit F_X et F_Y les deux fonctions définies par : $F_X(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X = i)x^i$ et $F_Y(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} P(Y = j)x^j$.

Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{i,j}x^i y^j$.

1. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérance de X, Y et XY, puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

2. Soit f une fonction de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

   (a) On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.
   Montrer que pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

   (b) En déduire que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ (on pourra poser $a_{i,j} = p_{i,j} - P(X = i)P(Y = j)$).

3. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q, et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p + q + r = 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

   (a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement? Déterminer F_X et F_Y.
   (b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
   (d) Calculer la covariance de (X, Y). Le signe de cette covariance était-il prévisible?

Colle 24

Fonctions de deux variables - Estimation

Questions de cours

1. Développements limités usuelles.
2. Noyaux, image d'une application linéaire.
3. Propriétés de la covariance.

Exercice 2

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

   A chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q, et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.

   Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

   (a) Quelles sont les lois respectives de X et Y?

   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

   (d) Déterminer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \dfrac{X}{n+1}$ du paramètre p.

2. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

   (a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

   (b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

   (c) $T = \dfrac{X}{N+1}$ est-il un estimateur sans biais du paramètre p?

Exercice 3

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1-x^2\ln(x)$, ainsi que la fonction f des variables x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ f(x,y) = xy + \ln(x)\ln(y).$$

1. Montrer l'existence d'un unique réel α strictement positif tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

   Justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

2. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

   (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et prouver que le point de coordonnées $(1/\alpha, 1/\alpha)$ est l'unique point critique de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

   (c) La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

Colle 24

Fonctions de deux variables - Estimation

Questions de cours

1. Séries usuelles.
2. Définition et caractérisation des valeurs propres d'une matrice.
3. Lois discrètes usuelles.

Exercice 4

Soient a, b, c trois réels strictement positifs et soit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x \in [0, a[\\ \dfrac{b}{x^4} & \text{si } x \in [a, +\infty[\end{cases}$

1. Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}_+$.

   On suppose dans la suite de l'exercice b et c ainsi définis, et X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

   Donner une allure de la représentation graphique de f.
2. Pour quelles valeurs $k \in \mathbb{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.
4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

   On pose $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Montrer que (T_n) est un estimateur de a.

   (b) Construire à partir de (T_n) un estimateur (S_n) sans biais de a.

   (c) Quel est le risque quadratique de (S_n) ?

Exercice 5

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x)$, ainsi que la fonction f des variables x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \ f(x, y) = xy + \ln(x)\ln(y).$$

1. Montrer l'existence d'un unique réel α strictement positif tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

   Justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.
2. Extrema de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

   (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et prouver que le point de coordonnées $(1/\alpha, 1/\alpha)$ est l'unique point critique de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

   (c) La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

Colle 24

Fonctions de deux variables - Estimation

Questions de cours

1. Primitives usuelles.
2. Inverse d'une matrice de taille 2.
3. Lois à densité usuelles.

Exercice 6

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. (a) Développer $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

   (a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 7

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n$.

1. (a) Déterminer un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (b) Lors d'un sondage, on suppose que sur les $n = 2500$ personnes interrogées, 1300 se sont prononcées pour A et 1200 pour son adversaire. Peut-on raisonnablement conclure que le candidat A sera élu ?
2. (a) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de p au niveau de confiance 0.95 à l'aide du théorème limite central.
   (b) Peut-on maintenant conclure sur l'élection du candidat A ?

Colle 24

Fonctions de deux variables - Estimation

Questions de cours

1. Solutions d'une équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$.
2. Sommes usuelles.
3. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y.$$

1. Montrer que f admet un seul extremum local sur $\mathbb{R}^2$. Quel est sa nature ?
2. (a) Calculer $f(-1/2, 1)$ et retrouver le résultat de la question précédente en développant :

$$3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

   (b) Quelle information supplémentaire cela nous apporte-t-il ?

Exercice 9

Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\theta - x} & \text{si } x \geq \theta, \\ 0 & \text{si } x < \theta. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f et $Y = X - \theta$.
   (a) Montrer que Y est une variable à densité qui suit une loi classique dont on précisera le paramètre.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X.

   On cherche à estimer le réel θ à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - 1)$.

   (a) Justifier que S_n est un estimateur de θ. et calculer son espérance.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de S_n.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(|S_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$.

Colle 24

Fonctions de deux variables - Estimation

Questions de cours

1. Formules sur les dérivées.
2. Application injective, surjective, bijective.
3. Propriétés de la variance.

Exercice 10

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}.$$

On considère également la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[, \quad f(x,y) = e^{x+4y}\ln(xy)$$

1. (a) Déterminer les limites de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives et lorsque x tend vers $+\infty$.
   (b) Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
   (c) Dresser le tableau de variation de φ.
   (d) On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :
   $$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$
2. (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x et y strictement positifs,
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y) + \dfrac{1}{x}e^{x+4y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4f(x,y) + \dfrac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$
   (c) Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$.
   (d) Calculer les dérivées partielles secondes sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$ et établir que :
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{4}{\alpha}e^{2\alpha} \end{cases}$$
   (e) La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$? Si oui, en donner sa nature (maximum on minimum).
   (f) De même, f présente-t-elle un extremum local sur $\left]0,+\infty\right[\times\left]0,+\infty\right[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$?
