Colle 3

Systèmes linéaires - Polynômes

Question de cours

1. Racines, factorisation et signe d'un polynôme de degré 2.
2. Démonstration : Formule du discriminant et des racines.

Exercice 1

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$.
3. En déduire les racines de P.
4. Résoudre l'équation (E) : $e^{2x} + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$.

Exercice 2

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

$$(1)\ (x+1)^2 = (x-1)^2 \qquad (2)\ \frac{x+3}{x^2-1} \geq \frac{3}{x-1} \qquad (3)\ |x-3| = \frac{5}{3}$$

Exercice 3

Soit un entier $n \geq 2$. On se propose de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \geq 2,\ \dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$.
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Exercice 4

1. Déterminer a, b, c pour que le polynôme $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ait pour racines $-1, 1$ et 2.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 5$, $P(2) = 31$ et $P(-1) = 1$. Déterminer ce polynôme.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants.

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6x & - & 5y & - & 6z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 5z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ x & + & 4y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Colle 3

Systèmes linéaires - Polynômes

Question de cours

1. Définition et propriétés sur le degré d'un polynôme.
2. Démonstration : Relations coefficients/racines

Exercice 6

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2$.

1. Prouver que -1 est une racine de P et déterminer Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)Q(x)$.
2. Prouver que -1 est aussi une racine de Q et déterminer R tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x+1)R(x)$.
3. Prouver que -2 est racine de R et en déduire une factorisation de P.
4. Résoudre l'inéquation (I) : $(\ln(x))^5 + 5(\ln(x))^4 + 10(\ln(x))^3 + 11(\ln(x))^2 + 7\ln(x) + 2 > 0$.

Exercice 7

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

$$(1)\ \frac{x^2-4}{x^2+2x} = 0 \qquad (2)\ \frac{(x-1)^2(x+5)}{x-4} \geq 0 \qquad (3)\ |x+1| - |2x+1| = 0$$

Exercice 8

Soit un entier $n \geq 2$. On se propose de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \geq 2,\ \dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1}$.
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Exercice 9

1. Résoudre l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.
2. En déduire la résolution des équations $x^4 + x^2 - 6 = 0$ et $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & -1 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ x & + & 4y & - & z & = & 1 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -1 \end{array} \right.$$

Colle 3

Systèmes linéaires - Polynômes

Question de cours

1. Division euclidienne de polynôme.
2. Exercice type : Résoudre $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 \geq 0$.

Exercice 11

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$.
3. En déduire les racines de P.
4. Résoudre l'inéquation $(E) :\ e^{2x} + 7e^x + 7 - 15e^{-x} < 0$.

Exercice 12

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

$$(1)\ \frac{2x-5}{6-x} = 4 \qquad (2)\ 2x(x+1) \geq (1-3x)(x+1) \qquad (3)\ x - 2 = \sqrt{x}$$

Exercice 13

1. Déterminer un polynôme de degré 3 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x) = x^2$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 14

Soit un entier $n \geq 1$. On se propose de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \geq 1,\ \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}$.
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 4x & - & 3y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & y & & & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ -3x & & & - & z & = & 1 \\ -4x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$
