Colle 4

Polynômes - Récurrence - Suites réelles

Question de cours

1. Suites arithmétiques et géométriques : définitions et formules explicites.
2. Preuve : Formule du discriminant et des racines.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{2n+1}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$ et $u_0 = 4$.

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-t-elle arithmétique ?
   (b) Quel est le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Calculer de deux façons différentes $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique. En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
4. Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 4

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$.
3. En déduire les racines de P.
4. Résoudre l'équation (E) : $e^{2x} + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$.

Colle 4

Polynômes - Récurrence - Suites réelles

Question de cours

1. Définition et propriétés sur le degré d'un polynôme.
2. Preuve : Formule explicite d'une suite arithmétique.

Exercice 5

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant les formules usuelles sur les sommes.

Exercice 6

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 12$, $v_0 = 1$ et par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = u_n - v_n$ est géométrique.

   En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
2. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = 8v_n + 3u_n$ est constante.
3. Déterminer l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Émettre une hypothèse quant à la valeur de u_n en fonction de n. La démontrer par récurrence.

Exercice 8

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2$.

1. Prouver que -1 est une racine de P et déterminer Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)Q(x)$.
2. Prouver que -1 est aussi une racine de Q et déterminer R tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x+1)R(x)$.
3. Prouver que -2 est racine de R et en déduire une factorisation de P.
4. Résoudre l'inéquation (I) : $(\ln(x))^5 + 5(\ln(x))^4 + 10(\ln(x))^3 + 11(\ln(x))^2 + 7\ln(x) + 2 > 0$.

Colle 4

Polynômes - Récurrence - Suites réelles

Question de cours

1. Racines, factorisation et signe d'un polynôme de degré 2.
2. Preuve : Formule explicite d'une suite géométrique.

Exercice 9

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant les formules usuelles sur les sommes.

Exercice 10

On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_0 = 1,\ w_0 = 2 \ \text{ et } \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \ \text{ et } \ w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n.$$

1. On pose $t_n = v_n - w_n$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison. Exprimer t_n en fonction de n.
2. On pose $s_n = v_n + w_n$. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. En déduire l'expression de v_n et de w_n en fonction de n.

Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_2 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$.

Exercice 12

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$.
3. En déduire les racines de P.
4. Résoudre l'inéquation (E) : $e^{2x} + 7e^x + 7 - 15e^{-x} < 0$.
