Complément - TD 4

Compléments sur les séries réelles

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes après avoir justifié la convergence des séries :

$$(1)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{2^n} \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n}{(n+1)!} \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^{n+1}} \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

$$(5)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n-1}{3^n} \qquad (6)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2^n}{n!} \qquad (7)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2 2^n+(-1)^n}{2^{2n}} \qquad (8)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n+n^2+n}{n!}.$$

Correction de l'exercice 1

1. Pour la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{2^n}$,

$$\begin{aligned}\frac{n^2+(-1)^n}{2^n} &= n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=(n(n-1)+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

   Remarquons que :

   - La série $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ converge car $n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 2 et de raison $\frac{1}{2}\in]-1,1[$ qui est convergente.
   - La série $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{2}\right)n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge car $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et de raison $\frac{1}{2}\in]-1,1[$ qui est convergente.
   - La série $\displaystyle\sum\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $-\frac{1}{2}\in]-1,1[$ qui est convergente.

   Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{2^n}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{2^n} &= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=4+2+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}.\end{aligned}$$

2. Pour la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n}{(n+1)!}$,

$$\frac{n^2+n}{(n+1)!}=\frac{n(n+1)}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}.$$

Or $\dfrac{1}{(n-1)!}$ est le terme général d'une série exponentielle donc convergente. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{(n+1)!}$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1.$$

3. Pour la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^{n+1}}$,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^{n+1}} &= \frac{-1}{3}n^2\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{-1}{3}(n(n-1)+n)\left(\frac{-1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{-1}{3}\right)^3 n(n-1)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2} + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Remarquons que :

- La série $\sum \left(-\frac{1}{3}\right)^3 n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ converge car $n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 2 et de raison $-\frac{1}{3} \in]-1,1[$ qui est convergente.
- La série $\sum \left(-\frac{1}{3}\right)^2 n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ converge car $n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et de raison $-\frac{1}{3} \in]-1,1[$ qui est convergente.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^{n+1}}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^{n+1}} &= \left(\frac{-1}{3}\right)^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2} + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{-1}{27}\frac{2}{(1+\frac{1}{3})^3} + \frac{1}{9}\frac{1}{(1+\frac{1}{3})^2} = \frac{-2}{64} + \frac{1}{16} = \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

4. Pour la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$,

$$\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)}{(n+2)} \times \frac{(n+1)}{n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)}{(n+2)}\right) - \ln\left(\frac{n}{(n+1)}\right).$$

On obtient le terme général d'une série télescopique. On peut calculer sa n-ième somme partielle, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) + \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).\end{aligned}$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ converge et sa somme est égale à $\ln(2)$.

5. Pour la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^n}$,

$$\frac{2n-1}{3^n} = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Remarquons que :

- La série $\displaystyle\sum \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ converge car $n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.
- La série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.

Par somme, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{(1-\frac{1}{3})} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0.\end{aligned}$$

6. Pour la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!}$,

$$\frac{n+2^n}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{2^n}{n!}.$$

Remarquons que :

- La série $\displaystyle\sum \frac{n}{n!}$ converge car $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ est le terme général d'une série exponentielle.
- La série $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n!}$ converge car c'est une série exponentielle.

Par somme, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^1 + e^2.\end{aligned}$$

7. Pour la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}}$,

$$\begin{aligned}\frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}} &= n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{-1}{4}\right)^n = n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{-1}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right) n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{4}\right)^n.\end{aligned}$$

Remarquons que :

- La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ converge car $n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 2 et de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
- La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right) n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge car $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
- La série $\sum \left(\frac{-1}{4}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{-1}{4} \in]-1,1[$.

Par somme, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + (-1)^n}{2^{2n}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right) n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = 4 + 2 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}.
\end{aligned}$$

8. Pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{n!}$,

$$\frac{3^n + n^2 + n}{n!} = \frac{3^n + n(n-1) + 2n}{n!} = \frac{3^n}{n!} + \frac{n(n-1)}{n!} + 2\frac{n}{n!}.$$

Remarquons que :

- La série $\sum \frac{3^n}{n!}$ converge car c'est une série exponentielle.
- La série $\sum \frac{n(n-1)}{n!}$ converge car $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$ est le terme général d'une série exponentielle.
- La série $\sum 2\frac{n}{n!}$ converge car $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ est le terme général d'une série exponentielle.

Par somme, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{n!}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= e^3 + e^1 + 2e^1 = e^3 + 3e^1.
\end{aligned}$$
