Correction - AP 1

Suites récurrentes d'ordre 1 - Suites implicites

Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 1

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien définie et $u_n > 0$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : $u_0 = \dfrac{5}{2} > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

   Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $1 + u_n \neq 0$ donc u_{n+1} est bien défini. Et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{1+u_n} > 0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_1 = \dfrac{15}{7} = \dfrac{30}{14} < u_0 = \dfrac{5}{2} = \dfrac{35}{14}$.

   $u_2 = \dfrac{43}{15} = \dfrac{86}{30} > u_0 = \dfrac{5}{2} = \dfrac{75}{30}$.

   Donc $u_1 < u_0 < u_2$ et la suite (u_n) n'est pas monotone.

3. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = 4 \times \frac{-1}{(1+x)^2} = -\frac{4}{(1+x)^2} < 0.$$

   Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 + 0 = 1$ donc :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	1

4. Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. On résout donc :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{1+x} = x \Leftrightarrow \frac{1 + x + 4 - x(1-x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x^2 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

   Comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 0$. Donc $\ell = \sqrt{5}$. Ainsi, la seule limite finie possible de la suite (u_n) est $\sqrt{5}$.

5. (a) On exprime v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de v_n et w_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n) \\ w_{n+1} &= u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f \circ f(w_n). \end{aligned}$$

La fonction g est donc définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= f \circ f(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{4}{1+f(x)} = 1 + \frac{4}{1+1+\dfrac{4}{1+x}} \\ &= 1 + \frac{4}{\dfrac{2(1+x)+4}{1+x}} = 1 + \frac{4(1+x)}{2(1+x)+4} = 1 + \frac{2(1+x)}{3+x}. \end{aligned}$$

(b) g est dérivable car c'est une fonction rationnelle et :

$$g'(x) = \frac{2(3+x) - 2(1+x)}{(3+x)^2} = \frac{4}{(3+x)^2} > 0.$$

On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On cherche ensuite le signe de $g(x) - x$:

$$g(x) - x = 1 + \frac{2(1+x)}{3+x} - x = \frac{3+x+2+2x-3x-x^2}{3+x} = \frac{5-x^2}{3+x} = \frac{(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}{3+x}.$$

Or sur $\mathbb{R}_+$, on obtient immédiatement $3+x > 0$ et $\sqrt{5}+x > 0$, donc $g(x) - x$ est du signe de $\sqrt{5} - x$:

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	⋮	$+$	‖
$g(x)$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	3
$g(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	‖

Enfin, g est continue et strictement croissante sur $[0, \sqrt{5}]$ et sur $[\sqrt{5}, +\infty[$ donc :

$$g([0,\sqrt{5}]) = [g(0), g(\sqrt{5})] = [\frac{5}{3}; \sqrt{5}] \subset [0, \sqrt{5}]$$

et

$$g([\sqrt{5}, +\infty[) = \left[g(\sqrt{5}), \lim_{x \to +\infty} g(x) \right[= [\sqrt{5}, 3[\subset [\sqrt{5}, +\infty[$$

donc les intervalles $[0, \sqrt{5}]$ et $[\sqrt{5}, +\infty[$ sont bien stables par g.

(c) La suite (v_n) vérifie $v_0 = u_0 = \dfrac{5}{2}$. Comparons le à $\sqrt{5}$:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > \frac{20}{4} = 5$$

donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante, $\dfrac{5}{2} > \sqrt{5}$.

Comme l'intervalle $[\sqrt{5}, +\infty[$ est stable par g, on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq \sqrt{5}$. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = g(v_n) - v_n \leq 0$$

d'après la question 5.(b). La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{5}$ donc converge. Or le seul point fixe de g sur $[\sqrt{5}, +\infty[$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de $g(x) - x = 0$ obtenues à la question 5.(b) dans le tableau de signe de $g(x) - x$) donc (v_n) converge vers $\sqrt{5}$.

D'autre part, on a vu que $w_0 = u_1 = \dfrac{15}{7}$, qu'on compare à $\sqrt{5}$:

$$\left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49} < 5 = \frac{49 \times 5}{49} = \frac{245}{49}$$

donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, $0 < \dfrac{15}{7} < \sqrt{5}$.

Comme l'intervalle $[0, \sqrt{5}]$ est stable par g, on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq w_n \leq \sqrt{5}$. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = g(w_n) - w_n \geq 0$$

d'après la question 5.(b). La suite (w_n) est donc croissante et majorée par $\sqrt{5}$ donc converge. Or le seul point fixe de g sur $[0, \sqrt{5}]$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de $g(x) - x = 0$ obtenues à la question 5.(b) dans le tableau de signe de $g(x) - x$) donc (w_n) converge vers $\sqrt{5}$.

(d) Comme les suites (u_{2n}) (termes pairs de la suite (u_n)) et (u_{2n+1}) (termes impairs de la suite (u_n)) convergent vers la même limite, on en déduit que la suite (u_n) converge vers cette limite. Donc (u_n) converge vers $\sqrt{5}$.

Exercice 2

1. Commençons par étudier la fonction $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2x^2}$.

   f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-12x}{(1 + 2x^2)^2}$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

   On en déduit que :

   - Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $f([0, 3]) = \left[\dfrac{3}{19}, 3\right] \subset [0, 3]$ donc $[0, 3]$ est stable par f.
   - f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 3]$. Comme $1 \in]0, 3]$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. De plus, comme $f(1) = 1$, cette unique solution est 1.

   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété "u_n est bien définie, $0 \leq u_n \leq 3$ et $u_n \neq 1$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   <u>Initialisation</u> : Comme $1 + 2u_0^2 \neq 0$, $u_1 = \dfrac{3}{1 + 2u_0^2}$ est bien définie. Comme $u_0 > 0$, $u_1 = f(u_0) \in]0, 3]$. Enfin, comme $u_0 \neq 1$, $u_1 = f(u_0) \neq 1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Comme $1+2u_n^2 \neq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{1+2u_n^2}$ est bien définie. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0,3]$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,3]) \subset [0,3]$. Enfin, comme $u_n \neq 1$ par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = f(u_n) \neq 1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, u_n est bien définie, $0 \leq u_n \leq 3$ et $u_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. La fonction f est décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $]0,3]$. Donc $f \circ f$ est bien définie et est croissante.

   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$. On peut alors montrer par récurrence que ces deux suites sont monotones.

   Comme elles sont minorées par 0 et majorées par 3, elles convergent par le théorème des suites monotones.

3. Si la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ, alors ℓ serait un point fixe de f (car f est continue). Or :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3}{1+2x^2} = x \Leftrightarrow 3 = x(1+2x^2) \Leftrightarrow 2x^3+x-3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

   Donc, si (u_n) convergeait, sa limite ne pourrait être que 1.

4. f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\dfrac{4}{3}$. Donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\dfrac{4}{3}$. Alors, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, on a :

$$\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1} = \frac{f(u_n)-f(1)}{u_n-1} = -\frac{4}{3},$$

   par composition des limites.

5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}-1|}{|u_n-1|} = \dfrac{4}{3}$, il existe un entier p tel que : $\forall n \geq p$, $|u_{n+1}-1| \geq |u_n-1|$.

   Par récurrence, on montre que : $\forall n \geq p$, $|u_n-1| \geq |u_p-1| > 0$. Donc (u_n) ne peut pas converger vers 1. Or on a prouvé que si la suite (u_n) converge, sa limite ne peut être que 1. Donc (u_n) diverge.

   Remarque : les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers deux limites différentes car sinon (u_n) convergerait également.

Suites implicites

Exercice 3

1. (a) f_k est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ car $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto x-1$ le sont, et $x-1 \neq 0$. De plus :

$$f_k'(x) = \frac{\dfrac{k(\ln(x))^{k-1}}{x}(x-1) - (\ln(x))^k}{(x-1)^2} = \frac{\ln(x)^{k-1}}{(x-1)^2} \times \frac{k(x-1)-x\ln(x)}{x}.$$

   (b) On considère le taux d'accroissement :

$$\frac{f_k(x)-f_k(1)}{x-1} = \frac{\ln(x)^k}{(x-1)^2} = \left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)^2 \times \ln(x)^{k-2}.$$

   Or $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ car c'est le taux d'accroissement de la fonction logarithme en 1 (qui est dérivable en ce point). Donc :

- Si $k=2$, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f_k(x)-f_k(1)}{x-1}=1$ donc f_2 est dérivable et $f_2'(1)=1$.
- Si $k\geq 3$, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f_k(x)-f_k(1)}{x-1}=0$ donc f_k est dérivable et $f_k'(1)=0$.

(c) φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\varphi_k'(x)=k-\frac{x}{x}-\ln(x)=k-1-\ln(x)$$

qui est strictement positive avant e^{k-1}, nulle en e^{k-1} et strictement négative après. Donc φ_k est strictement croissante sur $[0,e^{k-1}]$ et strictement décroissante sur $[e^{k-1},+\infty[$.

(d) La fonction φ_k est continue et strictement croissante sur $]1,e^{k-1}]$ donc réalise une bijection de $]1,e^{k-1}]$ dans $]\varphi_k(1),\varphi_k(e^{k-1})]=]0,e^{k-1}-k]$.
Or $0\notin]0,e^{k-1}-k]$ (φ_k est strictement croissante sur l'intervalle donc $e^{k-1}-k>0$), donc l'équation $\varphi_k(x)=0$ n'admet aucune solution sur $]1,e^{k-1}]$.

La fonction φ_k est continue et strictement décroissante sur $]e^{k-1},+\infty[$ donc réalise une bijection de $]e^{k-1},+\infty[$ dans $]\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi_k(x),\varphi_k(e^{k-1})[=]-\infty,e^{k-1}-k[$ car :

$$\varphi_k(x)=kx-k-x\ln(x)=-x\ln(x)\left(1+\frac{k}{x\ln(x)}-\frac{k}{\ln(x)}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$$

par produit, quotient et somme de limites.
Or $0\in]-\infty,e^{k-1}-k[$ (on a vu que $e^{k-1}-k>0$), donc l'équation $\varphi_k(x)=0$ admet une unique solution sur $]e^{k-1},+\infty[$.
Cela fait donc au total une unique solution a_k sur $]1,+\infty[$, qui vérifie $a_k\geq e^{k-1}$.

(e) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $x\neq 1$, on a : $f_k'(x)=\dfrac{\ln(x)^{k-1}}{(x-1)^2}\times\dfrac{\varphi_k(x)}{x}$. On en déduit les variations de f_k :

- Si k est pair et $k\geq 2$:

x	0		1		a_k		$+\infty$
$\ln(x)^{k-1}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi_k(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

- Si k est impair et $k\geq 3$:

x	0		1		a_k		$+\infty$
$\ln(x)^{k-1}$	$\Vert$	$+$	0	$+$		$+$	
$\varphi_k(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	0

2. (a) On a déjà vu que $e^{k-1} \leq a_k$. Pour l'autre inégalité, comme a_k est implicite, on compose par φ_k :

$$\varphi_k(e^k) = k(e^k - 1) - e^k \times k = -k < 0 \quad \text{et} \quad \varphi_k(a_k) = 0$$

donc $\varphi_k(e^k) \leq \varphi_k(a_k)$. Or φ_k est strictement décroissante sur $[e^{k-1}, +\infty[$ donc on obtient $e^k \geq a_k$. Finalement, on a bien $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$.

Par passage à la limite dans la seule inégalité de gauche, a_k diverge vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$.

(b) Par définition de a_k, on sait que :

$$\varphi_k(a_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k(a_k - 1) - a_k \ln(a_k) = 0.$$

On remplace a_k par $e^k(1 + b_k)$, et on obtient :

$$\begin{aligned}
& k(e^k(1+b_k) - 1) = e^k(1+b_k) \times \ln(e^k(1+b_k)) \\
\Rightarrow\ & k(e^k(1+b_k) - 1) = e^k(1+b_k) \times (\ln(e^k) + \ln(1+b_k)) \\
\Rightarrow\ & k(e^k(1+b_k) - 1) = e^k(1+b_k) \times (k + \ln(1+b_k)) \\
\Rightarrow\ & ke^k(1+b_k) - k = ke^k(1+b_k) + e^k(1+b_k)\ln(1+b_k) \\
\Rightarrow\ & -k = e^k(1+b_k)\ln(1+b_k) \\
\Rightarrow\ & -ke^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k).
\end{aligned}$$

(c) Avec la question précédente, on a :

$$\ln(1+b_k) = \frac{-ke^{-k}}{1+b_k} = \frac{-ke^{-k}}{\frac{a_k}{e^k}} = \frac{-k}{a_k}.$$

Or $a_k \geq e^{k-1}$ d'après la question 2.(a). Donc, par passage à l'inverse puis en multipliant par $-k < 0$:

$$a_k \geq e^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{a_k} \leq e^{1-k} \Rightarrow \frac{-k}{a_k} \geq -ke^{1-k} \Rightarrow \ln(1+b_k) \geq -ke^{1-k}.$$

On va alors chercher la limite de $\ln(1+b_k)$ par encadrement. On remarque que :

$$-ke^{1-k} = -e \times ke^{-k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Pour avoir l'autre coté, on essaie de majorer $\ln(1+b_k)$ par 0. D'après la définition de b_k :

$$\ln(1+b_k) = \ln\left(\frac{a_k}{e^k}\right) \leq 0$$

car ln est croissante et $\frac{a_k}{e^k} \leq 1$ en divisant l'inégalité de droite de la question 2.(a) par $e^k > 0$. On en déduit donc que

$$0 \geq \ln(1+b_k) \geq -ke^{1-k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc par encadrement et continuité de exp,

$$\ln(1+b_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad 1+b_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 \quad \text{donc} \quad b_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1-1=0.$$

Enfin, pour trouver un équivalent de b_k, on revient à l'égalité de la question précédente :

$$-ke^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k).$$

On vient de voir que $b_k \to 0$, donc $(1+b_k) \sim 1$ et $\ln(1+b_k) \sim b_k$. Par produit des équivalents,

$$-ke^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k) \sim b_k.$$

Donc $b_k \sim -ke^{-k}$.

(d) On isole le $o()$ pour se ramener à une limite :

$$a_k = e^k - k + o(k) \Leftrightarrow a_k - e^k + k = o(k) \Leftrightarrow \frac{a_k - e^k + k}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or $a_k - e^k = e^k b_k$, donc :

$$\frac{a_k - e^k + k}{k} = \frac{b_k e^k + k}{k} = \frac{b_k e^k}{k} + 1.$$

Or on a vu que $b_k \sim -ke^{-k}$ donc $\frac{b_k e^k}{k} \sim \frac{-ke^{-k}e^k}{k} = -1$. On en déduit que

$$\frac{b_k e^k}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1 \quad \text{puis} \quad \frac{a_k - e^k + k}{k} = \frac{b_k e^k}{k} + 1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après l'équivalence écrite au début de la question, on a donc bien $a_k = e^k - k + o(k)$.

Exercice 4

1. On applique le théorème de la bijection :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale, donc continue.
   - f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

     $$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$

     Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   - On a $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

   D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Puisque $0 \in]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note dans la suite u_n.

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Donc $f_n(0) > f_n(u_n) > f_n(1)$. Comme f_n est strictement décroissante, $0 < u_n < 1$ donc u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Puisque $u_n \in]0,1[$, on a $u_n^{n+1} \leq u_n^n$, et donc :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$

Puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée (car $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème des suites monotones, on peut donc conclure que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc que $0 \leq \ell \leq 1$.

(d) Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit } 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

(u_n) étant croissante et convergente vers ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$

Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par passage à la limite, on en déduit que :

$$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$

D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\ell = 1$.

3. (a) Puisque $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n = 1 - u_n \in]0,1[$ et $\ln(v_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on a $1 - u_n - u_n^n = 0$ et donc :

$$\ln(v_n) = \ln(1 - u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln(u_n) = n\ln(1 + (u_n - 1)).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, on a :

$$\ln(1 + (u_n - 1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1 = -v_n.$$

D'où finalement $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.

(b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$. D'autre part, on a $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$ et on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$. Par opération sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a $-\ln(v_n), nv_n > 0$, d'où :

$$\frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1.$$

De plus, on a $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, d'où par composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$, et donc $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) On a montré que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ et que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. Donc on a $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, soit encore $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

4. La série $\sum v_n$ est à termes positifs d'après les questions précédentes. On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$;
- $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n \geq 3$;
- la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n$ diverge.

De même, la série $\sum v_n^2$ est à termes positifs, et on a :

- $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$;
- $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ puisque $\frac{\frac{\ln(n)^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} \to 0$ par croissances comparées ;
- la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n^2$ converge.