Correction - AP 10

Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (ECRICOME 2016)

1. X et Y sont indépendantes et de même loi donc pour tout couple (i,j) de $\mathbb{N}^2$ on a :

$$P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j) = P(X=i)P(X=j)$$

et de même

$$P((X=j)\cap(Y=i)) = P(X=j)P(Y=i) = P(X=j)P(X=i)$$

donc X et Y sont échangeables puisqu'on obtient la même valeur dans les deux cas.

2. Avec le SCE $(Y=j)_{j\in\mathbb{N}}$, par incompatibilité puis comme X et Y sont échangeables, on a :

$$P(X=i) = P(\bigcup_{j=0}^{n}(X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{j=0}^{+\infty}P((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{j=0}^{+\infty}P((X=j)\cap(Y=i)).$$

Par incompatibilité puis comme $(X=j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un SCE :

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty}P((X=j)\cap(Y=i)) = P(\bigcup_{j=0}^{n}(X=j)\cap(Y=i)) = P(Y=i).$$

3. (a) X prend la valeur 2 lorsqu'on a tiré une boule blanche, donc il faut mettre dans la condition un évènement de même probabilité, donc de probabilité $\frac{b}{n+b}$. `rd.random()` suivant la loi uniforme, on remplit les trous par :

```
r < b/(b+n)
```

(b) Pour la variante 1, lorsque x prend la valeur 1, on rajoute c boules noires donc on refait la même expérience pour y mais avec $b'=b$ et $n'=n+c$ boules noires.
De même lorsque x prend la valeur 2, on fait la même expérience avec $b'=b+c$ et $n'=n$.
Pour la variante 2 c'est inversé : lorsque $x=1$ on a $b'=b+c$ et $n'=n$, lorsque $x=2$ on a $b'=b$ et $n'=n+c$.
Enfin pour la variante 3 on refait strictement la même expérience donc il n'y a aucun changement à effectuer sur b et n. On obtient donc :

```python
def experience(b, n, c, variante):
    x = tirage(b,n)
    if variante == 1 :
        if x == 1 :
            n = n+c
        else:
            b = b+c
    elif variante == 2 :
        if x == 1 :
            b = b+c
        else:
            n = n+c
    y = tirage(b,n)
    return([x, y])
```

(c) Plus compliqué. Pour approximer la loi il faut approximer chaque probabilité par la fréquence d'apparition des évènements.

Après la boucle for le programme divise chaque vecteur, donc chaque coefficient du vecteur, par le nombre N d'expériences : il faut donc qu'à la fin de la boucle chaque coefficient soit égal au nombre de réalisations de l'évènement correspondant lors des N simulations.

Pour cela, à chaque nouvelle simulation, donc à chaque passage dans la boucle, il faut rajouter 1 au coefficient correspondant à l'évènement réalisé. Or on a mis le résultat de la nouvelle simulation dans les variables x et y; c'est pourquoi c'est bien à l'élément `loiX[x-1]` qu'on a rajouté 1 (attention, les indices commences à 0 sur Python...), et on fait de même dans `loiY[y-1]` et `loiXY[x-1,y-1]` avec :

```
loiX[x-1] = loiX[x-1]+1
loiY[y-1] = loiY[y-1]+1
loiXY[x-1, y-1] = loiXY[x-1, y-1]+1
```

(d) Pour tester l'échangeabilité il suffit d'avoir $P((X=1)\cap(Y=2)) = P((X=2)\cap(Y=1))$ puisque le support de X et de Y est $\{1;2\}$. Il suffit donc de regarder si la matrice loiXY est symétrique.

Pour l'indépendance on teste tous les produits de loiX par loiY en on vérifie si cela donne loiXY. On obtient finalement :

- X et Y sont échangeables dans les variantes 1 et 3, mais pas dans la variante 2.
- Pour la variante 1, dès le premier produit on a $0,66 \times 0,66 \simeq 0,44 \neq 0,49837$ donc X et Y ne sont pas indépendants.
- Pour la variante 2, dès le premier produit on a $0,58 \times 0,66 \simeq 0,38 \neq 0,33258$ donc X et Y ne sont pas indépendants.
- Pour la variante 3, les quatre produits fonctionnent : $0,66 \times 0,66 \simeq 0,44 \simeq 0,44466$, $0,66 \times 0,33 \simeq 0,22 \simeq 0,22098 \simeq 0,22312$ et enfin $0,33 \times 0,33 \simeq 0,11 \simeq 0,11124$. Les variables X et Y semblent donc indépendantes.

4. (a) X a pour support $\{1,2\}$ et par équiprobabilité de tirer chaque boule on a :

$$P(X=1) = \frac{n}{b+n} \quad , \quad P(X=2) = \frac{b}{b+n}.$$

(b) X et Y ont pour support $\{1;2\}$. On a de plus

$$P((X=1)\cap(Y=1)) = P(X=1)P_{(X=1)}(Y=1) = \frac{n}{b+n}\times\frac{n+c}{b+n+c} = \frac{n(n+c)}{(b+n)(b+n+c)}$$

puis de même :

$$P((X=1)\cap(Y=2)) = P((X=2)\cap(Y=1)) = \frac{nb}{(b+n)(b+n+c)}$$

et

$$P((X=2)\cap(Y=2)) = \frac{b(b+c)}{(b+n)(b+n+c)}.$$

(c) On a vu que $Y(\Omega) = \{1;2\}$, et par probabilités totales avec le SCE $((X=1),(X=2))$ on obtient :

$$P(Y=1) = P((X=1)\cap(Y=1)) + P((X=2)\cap(Y=1)) = \frac{n(n+b+c)}{(b+n)(b+n+c)} = \frac{n}{b+n}$$

et

$$P(Y=2) = P((X=1)\cap(Y=2)) + P((X=2)\cap(Y=2)) = \frac{b(n+b+c)}{(b+n)(b+n+c)} = \frac{b}{b+n}$$

donc Y suit la même loi que X.

(d) On a bien obtenu $P((X=1)\cap(Y=2)) = P((X=2)\cap(Y=1))$ donc X et Y sont échangeables. Par contre en calculant

$$P(X=1)P(Y=1) = \frac{n}{b+n} \times \frac{n}{b+n}$$

et

$$P((X=1)\cap(Y=1)) = \frac{n}{b+n} \times \frac{n+c}{b+n+c}$$

on se rend compte que pour avoir égalité, il faudrait avoir

$$\frac{n}{b+n} = \frac{n+c}{b+n+c} \Leftrightarrow n(b+n+c) = (n+c)(b+n) \Leftrightarrow nb+n^2+nc = nb+n^2+bc+nc \Leftrightarrow bc = 0$$

ce qui est absurde puisque b et c sont non nuls, et on en déduit que

$$P((X=1)\cap(Y=1)) \neq P(X=1)P(Y=1)$$

et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 (EDHEC 2016)

1. (a) Comme $t \neq 1$, la formule de la somme géométrique s'applique et donne :

$$\forall t \in [0;x],\ \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

(b) On intègre cette égalité entre 0 et x, et on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{p=1}^{n}\left(\int_0^x t^{p-1}\,dt\right) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

On calcule alors les intégrales à l'intérieur de la somme et la première du second membre :

$$\int_0^x t^{p-1}\,dt = \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \frac{x^p}{p}$$

et

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\int_0^x \frac{-1}{1-t}\,dt = -\Big[\ln(|1-t|)\Big]_0^x = -\left(\ln(1-x) - \ln 1\right) = -\ln(1-x)$$

et on obtient bien :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

(c) Pour $t \in [0;x]$ on a successivement les inégalités suivantes (avec l'inverse strictement décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une part et $t^n \geq 0$ d'autre part) :

$$0 \leq t \leq x\ ,\ -x \leq -t \leq 0\ ,\ 1-x \leq 1-t \leq 1\ ,\ 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}\ , t^n \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$$

On peut remarquer pour simplifier la suite que $\frac{t^n}{1-t} \geq 0$ et on intègre avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^n}{(n+1)(1-x)}$$

Le membre de droite tend vers 0 par quotient, avec x^n qui tend vers 0 car $|x| < 1$, et $(n+1)(1-x)$ qui tend vers $+\infty$, et on en déduit par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0.$$

(d) On fait tendre n vers $+\infty$ dans la question 1b, en remplaçant l'indice muet p par k :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x) - 0 = -\ln(1-x)$$

donc la série de terme général x^k/k converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

2. Notons $\mathcal{P}(q)$ la propriété : " $\displaystyle\sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$". On montre cette propriété par récurrence sur $q \geq m$.

Ini. Pour $q = m$, la somme vaut $\sum\limits_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1$ et $\binom{m+1}{m+1} = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang $q = m$.

Héré. Soit $q \geq m$. Supposons que $\mathcal{P}(q)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(q+1)$ est aussi vérifiée.

$$\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} \underset{\mathcal{P}(q)}{=} \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+2}{m+1}$$

avec la dernière égalité donnée par la formule du triangle de Pascal, qu'on peut reprouver ainsi :

$$\begin{aligned}
\binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} &= \frac{(q+1)!}{(m+1)!(q+1-m-1)!} + \frac{(q+1)!}{m!(q+1-m)!} \\
&= \frac{(q+1)!}{(m+1)!(q-m)!} + \frac{(q+1)!}{m!(q+1-m)!} \\
&= \frac{(q+1)!(q+1-m) + (q+1)!(m+1)}{(m+1)!(q+1-m)!} \\
&= \frac{(q+1)!(q+2)}{(m+1)!(q+2-m-1)!} = \frac{(q+2)!}{(m+1)!(q+2-m-1)!} \\
&= \binom{q+2}{m+1}.
\end{aligned}$$

Ccl. Par récurrence, $\forall q \geq m, \quad \sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$..

3. (a) S_n est la somme de n variables prenant leurs valeurs dans $[\![1;+\infty[\![$, on a donc $S_n(\Omega) = [\![n;+\infty[\![$.

Avec le système complet d'événements $(S_n = j)_{j\geq n}$, la formule des probabilités totales donne, pour tout $k \geq n+1$:

$$\begin{aligned}
(S_{n+1} = k) &= \bigcup_{j=n}^{+\infty} (S_n = j) \cap (S_{n+1} = k) = \bigcup_{j=n}^{+\infty} (S_n = j) \cap (S_n + X_{n+1} = k) \\
&= \bigcup_{j=n}^{+\infty} (S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)
\end{aligned}$$

On remarque alors que $X_{n+1} = k - j$ est impossible pour $k - j \leq 0$, donc pour $j \geq k$, et la réunion s'arrête donc à $k-1$ pour donner :

$$(S_{n+1} = k) = \bigcup_{j=n}^{k-1} (S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)$$

puis par incompatibilité de la réunion :

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1} P\left((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)\right).$$

(b) Les X_i étant indépendantes, par lemme des coalitions, X_{n+1} et $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ sont indépendantes donc pour tout $k\geq n+1$:

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1} P(S_n=j)P(X_{n+1}=k-j)=\sum_{j=n}^{k-1} P(S_n=j)(1-x)^{k-j-1}x$$

Montrons alors par récurrence sur $n\geq 1$, la propriété :

$$P_n : \text{"}\ \forall k\in [\![n;+\infty[\![,\ P(S_n=k)=\tbinom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}\ \text{"}.$$

Ini. Pour $n=1$, $S_1=X_1$ qui suit la loi géométrique de paramètre x, donc on a bien :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(S_1=k)=(1-x)^{k-1}x=\binom{k-1}{0}x^1(1-x)^{k-1}$$

puisque $\binom{k-1}{0}=1$, et la propriété est vraie au rang $n=1$.

Héré. On suppose la propriété vérifiée au rang $n\geq 1$, alors pour tout $k\geq n+1$, le début de la question permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1}=k) &= \sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}x^n(1-x)^{j-n}(1-x)^{k-j-1}x \\ &= \sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \\ &= x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)}\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} \end{aligned}$$

Calculons cette somme en faisant apparaître le résultat de la question 2 : avec le changement d'indice $i=j-1$ on a :

$$\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\sum_{i=n-1}^{k-2}\binom{i}{n-1}=\binom{k-2+1}{n-1+1}=\binom{k-1}{n}$$

et on obtient finalement : pour tout $k\geq n+1$,

$$P(S_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)}$$

et la propriété est vérifiée au rang $k+1$.

Ccl. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la loi de S_n est bien donnée par :

$$\forall k\in [\![n;+\infty[\![,\ P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$$

(c) $(S_n=k)_{k\in [\![n;+\infty[\![}$ est un système complet d'événements donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n=k)=x^n\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}=1.$$

En divisant par $x^n\neq 0$ on obtient bien :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}=\frac{1}{x^n}.$$

(d) Il faut sommer n variables indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p donc il faut entrer la commande :

```
S = np.sum(rd.geometric(p, n))
```

4. (a) Comme $p \in]0;1[$, son logarithme est strictement négatif. Avec $q^k \geq 0$ et $k > 0$, on obtient bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ln(p)} \geq 0$$

(b) A l'aide de la question 1d, appliquée avec $q \in [0;1[$, on peut affirmer que cette série converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln(p)} \times \big(-\ln(1-q)\big) = \frac{\ln(p)}{\ln(p)} = 1$$

5. (a) On considère la série de terme général $kP(X=k)$, dont on remarque qu'elle est géométrique de raison q avec $|q| < 1$, donc elle converge absolument. On en déduit que X admet une espérance et :

$$E(X) = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln(p)} \times q \times \frac{1}{1-q} = -\frac{q}{p\ln(p)}$$

(b) De même la série de terme général $k^2P(X=k)$ converge absolument comme série géométrique dérivée avec $|q| < 1$, donc X admet un moment d'ordre deux et donc une variance, avec :

$$E(X^2) = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = -\frac{q}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = -\frac{q}{\ln(p)} \times \frac{1}{(1-q)^2} = -\frac{q}{p^2\ln(p)}$$

puis par Koenig-Huygens :

$$V(X) = -\frac{q}{p^2\ln(p)} - \frac{q^2}{p^2(\ln(p))^2} = -\frac{q\ln(p)+q^2}{p^2(\ln(p))^2} = -\frac{q(q+\ln(p))}{p^2(\ln(p))^2}$$

6. (a) Lorsque $X = k$, Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0;k]\!]$. De plus k prend toutes les valeurs de 1 à $+\infty$ donc en réunissant les possibilités on obtient bien :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

Par formule de probabilités totales avec le système complet $(X=k)_{k\geq 1}$ on obtient alors :

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=0) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k\ln(p)} \times q^k = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(q^2)^k}{k}$$

et enfin la question 1d de la partie I donne :

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= -\frac{1}{\ln(p)} \times \left(-\ln(1-q^2)\right) = -\frac{1}{\ln(p)} \times (-\ln([1-q][1+q])) \\ &= \frac{1}{\ln(p)} \times \big(\ln(p)+\ln(1+q)\big) = \frac{\ln(p)+\ln(1+q)}{\ln(p)} = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} \end{aligned}$$

(b) Commençons par établir la formule demandée :

$$\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{k!}{kn!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!} \quad \text{et} \quad \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n} = \frac{(k-1)!}{n(n-1)!(k-1-n+1)!} = \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!}$$

donc les deux sont bien égaux.

On applique alors la formule de probabilités totales avec le système complet $(X=k)_{k\geq 1}$:

$$P(Y=n)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)P_{(X=k)}(Y=n)$$

On remarque que $(Y=n)$ n'est possible que si $k\geq n$ donc les termes de 1 à $n-1$ sont nuls et :

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= \sum_{k=n}^{+\infty}P(X=k)P_{(X=k)}(Y=n)=-\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{q^k}{k\ln(p)}\times\binom{k}{n}p^nq^{k-n} \\ &= -\frac{p^n}{\ln(p)}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\binom{k}{n}}{k}\times q^{2k-n}=-\frac{p^n}{\ln(p)}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}\times q^{2k-n}\end{aligned}$$

Enfin on fait apparaître q^n à l'extérieur de la somme et pour compenser q^{-n} à l'intérieur et on obtient :

$$P(Y=n)=-\frac{p^nq^n}{n\ln(p)}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\times q^{2k-2n}=-\frac{p^nq^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\times(q^2)^{k-n}$$

En appliquant comme indiqué la question 3c de la partie I avec $x=1-q^2$ qui donne bien $1-x=q^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= -\frac{p^nq^n}{n\ln(p)}\times\frac{1}{(1-q^2)^n}=-\frac{p^nq^n}{n\ln(p)(1-q)^n(1+q)^n} \\ &= -\frac{p^nq^n}{n\ln(p)p^n(1+q)^n}=-\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln(p)}\end{aligned}$$

(c) On calcule cette série en faisant attention de séparer le terme $k=0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)=1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}-\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k}$$

et on applique une fois de plus la question 1d de la partie I avec $\frac{q}{1+q}\in[0;1[$ (car positif par quotient de facteurs positifs, et strictement inférieur à 1 avec $q<1+q$) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k) &= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}-\frac{1}{\ln(p)}\times\left(-\ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right)\right) \\ &= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}+\frac{1}{\ln(p)}\ln\left(\frac{1}{1+q}\right) \\ &= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}-\frac{1}{\ln(p)}\ln(1+q)=1\end{aligned}$$

(d) On reconnaît une série géométrique avec $\left|\frac{q}{1+q}\right|<1$ donc qui converge absolument. Y admet donc une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0P(X=0)-\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{q}{1+q}\right)^k=-\frac{1}{\ln(p)}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{1-\frac{q}{1+q}} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{\frac{1}{1+q}}=-\frac{q}{\ln(p)}\end{aligned}$$

(e) En reconnaissant cette fois une série géométrique dérivée de même paramètre que précédemment, Y admet un moment d'ordre deux et :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 0^2 P(X=0) - \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{q}{1+q} \right)^k = -\frac{1}{\ln(p)} \times \frac{q}{1+q} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{q}{1+q}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \times \frac{q}{1+q} \times \frac{1}{\frac{1}{(1+q)^2}} = -\frac{q(1+q)}{\ln(p)} \end{aligned}$$

Enfin Y admet bien une variance et

$$V(Y) = -\frac{q(1+q)}{\ln(p)} - \frac{q^2}{(\ln(p))^2} = -\frac{q(1+q)\ln(p) + q^2}{(\ln(p))^2} = -\frac{q(q + (1+q)\ln(p))}{(\ln(p))^2}$$

Exercice 3

1. (a) Le théorème de transfert garantit que : $G(t) = E(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k)$.

   (b) Le support de X étant $[\![0, n]\!]$, on a : $G(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$.

   (c) G étant une fonction polynômiale, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)t^{k-1}$ (la dérivée d'une somme finie est la somme des dérivées et le terme pour $k=0$ étant constant, il disparait en dérivant).

   En particulier, $G'(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = E(X)$.

   (d) De la même façon, on a $G''(t) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)t^{k-2}$. Donc

$$\begin{aligned} G''(1) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k^2 P(X=k) - \sum_{k=2}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = E(X^2) - E(X). \end{aligned}$$

   D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :
   $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - E(X) + E(X) - (E(X))^2 = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

   (e) G étant polynômiale, elle est indéfiniment dérivable et pour tout réel t, on a $G^{(0)}(t) = G(t)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$G^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)\dots(k-j+1)P(X=k)t^{k-j}.$$

   Pour $t=0$, la somme ci-dessus ne contient plus que le terme correspondant à $k=j$ (les autres sont nuls) et on obtient : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $G^{(j)}(0) = j! \times P(X=j)$.
   Comme de plus $G(0) = P(X=0)$, on peut conclure que la connaissance de la fonction génératrice de X permet de retrouver la loi de X. En effet :

$$P(X=0) = G(0) \text{ et, pour tout } j \in [\![1, n]\!],\ P(X=j) = \frac{G^{(j)}(0)}{j!}.$$

2. (a) Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on a :

$$G_1(t) = \sum_{k=0}^{1} P(X_1 = k)t^k = P(X = 0) + P(X = 1)t = (1-p) + pt.$$

(b) Si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a :

$$G_2(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X_2 = k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n.$$

(c) Pour X_1 : $G_1'(t) = p$ et $G_1''(t) = 0$. Donc :
- $E(X_1) = G_1'(1) = p$,
- $V(X_1) = G_1''(1) + G_1'(1) - (G_1'(1))^2 = p(1-p)$.

Pour X_2 : $G_2'(t) = np(1-p+pt)^{n-1}$ et $G_2''(t) = n(n-1)p^2(1-p+pt)^{n-2}$. Donc :
- $E(X_2) = G_2'(1) = np$,
- $V(X_2) = G_2''(1) + G_2'(1) - (G_2'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$.

3. Pour tout réel $t \in [-1,1]$ et tout entier $k \geq a$, on a : $|P(X = k)t^k| \leq P(X = k)$.

Comme la série de terme général $P(X = k)$ converge (sa somme vaut 1 puisque X est une variable aléatoire), la série de terme général $P(X = k)t^k$ converge absolument donc converge.

Donc pour tout réel $t \in [-1,1]$, t^X admet une espérance et avec le théorème de transfert,

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k.$$

4. (a) Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [-1,1]$ (la convergence de la série est assurée par la question 3) :

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}t^k = pt\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^k = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Remarquons que $(1-p)t \in]-1,1[$ ce qui justifie cette dernière égalité.

(b) Si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [-1,1]$ (la convergence de la série est assurée par la question 3) :

$$G_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_2 = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(1-t)}.$$

5. Pour tout $t \in [-1,1]$,

$$G_Z(t) = E(t^Z) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y).$$

Les variables X et Y sont indépendantes donc, grâce au lemme des coalitions, t^X et t^Y le sont aussi. Par propriété de l'espérance d'un produit de variables indépendantes, on en déduit :

$$G_Z(t) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = G_X(t)G_Y(t).$$

6. (a) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$, alors (avec la question précédente et la question 2.(b)) :

$$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = (1-p+pt)^n(1-p+pt)^m = (1-p+pt)^{n+m}.$$

La fonction génératrice de Z est celle d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n+m,p)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi (question 1.(e)), $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$. On a ainsi redémontré le résultat donné dans le Chapitre 9.

(b) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors (avec la question précédente et la question 4.(b)) :

$$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(1-t)}.$$

La fonction génératrice de Z est celle d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. On a ainsi redémontré le résultat donné dans le Chapitre 9.

7. (a) $N_1(\Omega) = \{1\}$, $P(N_1 = 1) = 1$ et $E(N_1) = 1$.

$N_2(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(N_2 = 1) = P(P_1P_2 \cup F_1F_2) = P(P_1)P(P_2) + P(F_1)P(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (par incompatibilité et indépendance des événements), $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $E(N_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $P(N_3 = 1) = P(P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3) = \frac{1}{4}$, $P(N_3 = 3) = P(P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3) = \frac{1}{4}$, $P(N_3 = 2) = 1 - P(N_3 = 1) - P(N_3 = 3) = \frac{1}{2}$, et $E(N_3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$.

(b) $N_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ car on peut faire au minimum 1 changement (en faisant que des piles par exemple) et au maximum n changements (en alternant les piles et les faces à chaque lancer) au cours de n lancers.

Réciproquement, si $k \in [\![1, n]\!]$, alors l'événement $(N_n = k)$ est réalisable, par exemple si on obtient :

- Si k est pair : $P_1F_2 \dots P_{k-1}F_kF_{k+1} \dots F_n$.
- Si k est impair : $P_1F_2 \dots P_{k-2}F_{k-1}P_kF_{k+1} \dots F_n$.

Donc $[\![1, n]\!] \subset N_n(\Omega)$.

Ainsi, $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

(c) $P(N_n = 1) = P(P_1 \dots P_n \cup F_1 \dots F_n) = P(P_1) \dots P(P_n) + P(F_1) \dots P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (par incompatibilité et indépendance à la deuxième égalité).

Pour $P(N_n = n)$, il y a deux cas :

- Si n pair, $P(N_n = n) = P(P_1F_2 \dots P_{n-1}F_n \cup F_1P_2 \dots F_{n-1}P_n)$.
- Si n impair, $P(N_n = n) = P(P_1F_2 \dots P_{n-2}F_{n-1}P_n \cup F_1P_2 \dots F_{n-2}P_{n-1}F_n)$.

Dans les deux cas, $P(N_n = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

8. (a) Avec le théorème de transfert (N_n est à support fini), $G_n(x) = E(x^{N_n}) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)x^k$.

(b) Avec le SCE $(P_{n-1} \cap P_n, F_{n-1} \cap P_n, P_{n-1} \cap F_n, F_{n-1} \cap F_n)$, on a :

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= P(((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) \cup ((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &\quad \cup((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup ((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap F_n)) \\ &\overset{\text{incomp.}}{=} P((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap F_n) \\ &\quad + P((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap F_n) + P((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap F_n) \end{aligned}$$

Or, par indépendance à la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} P((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) &= P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) \\ &= P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1})P(P_n) \\ &= \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}). \end{aligned}$$

De même, on montre que :

$$\begin{aligned} P((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap P_n) &= \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \\ P((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap F_n) &= \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \\ P((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap F_n) &= \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\right), \end{aligned}$$

Or, comme (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\right) \\ = \; & \frac{1}{2} P\left(((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) \cup ((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1})\right) \\ = \; & \frac{1}{2} P\left(N_{n-1} = k\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\right) \\ = \; & \frac{1}{2} P\left(((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \cup ((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\right) \\ = \; & \frac{1}{2} P\left(N_{n-1} = k-1\right) \end{aligned}$$

On obtient donc bien : $P(N_n = k) = \dfrac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1)$.

(c) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) x^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1) \right) x^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1) x^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(N_{n-1} = k) x^{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) x^k + \frac{1}{2} x \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) x^k \\ &= \frac{1}{2} G_{n-1}(x) + \frac{x}{2} G_{n-1}(x) = \frac{1+x}{2} G_{n-1}(x), \end{aligned}$$

en utilisant la question précédente à la deuxième égalité, avec un changement de variable à la quatrième et en remarquant que $P(N_{n-1} = 0) = P(N_{n-1} = n) = 0$ à la cinquième.

(d) $G_1(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} P(N_1 = k) x^k = P(N_1 = 1) x^1 = x$.

Soit $x \in [0, 1]$. On a démontré que $(G_n(x))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $G_1(x) = x$ et de raison $\dfrac{1+x}{2}$. Donc on a bien $G_n(x) = x \left(\dfrac{1+x}{2} \right)^{n-1}$.

(e) Soit $n \geq 2$. On sait (question 1.(c)) que $E(N_n) = G_n'(1)$. Or :

$$G_n'(x) = 1 \times \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} + x \times (n-1) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}.$$

Donc :

$$E(N_n) = 1 \times \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} + 1 \times (n-1) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Le nombre moyen de séries lors des n premiers lancers est donc $\frac{n+1}{2}$. Notons que ceci vaut encore pour $n = 1$ puisque $E(N_1) = 1$.
