Correction - AP 11

Lois de Panjer

ESSEC I 2013

1. X_n est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

2. Avec le système complet d'évènements $(N = n)_{n\geq 0}$, les probabilités totales donnent :

$$r_j = P(X = j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = j)$$

On remplace X par sa valeur :

$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P_{(N=n)}\left(\sum_{i=1}^{N} U_i = j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P_{(N=n)}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i = j\right)$$

puis N est indépendantes des variables (U_i) donc :

$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P\left(\sum_{i=1}^{n} U_i = j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j)p_n.$$

3. (a) On a alors $N(\Omega) = [\![0; m]\!]$ donc $p_n = 0$ pour $n \geq m$ et enfin :

$$r_j = \sum_{n=0}^{m} p_n P(X_n = j)$$

avec pour tout $n \in [\![0; m]\!]$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $n \leq m < j$ donc $j \notin X_n(\Omega)$ donc :

$$r_j = \sum_{n=0}^{m} p_n \times 0 = 0.$$

Remarque : en comprenant bien l'énoncé, on a au maximum $N = m$ sinistres, chacun coûtant 0 ou 1 à l'entreprise donc la charge sinistrale totale ne peut excéder m, ce qui explique le résultat obtenu.

(b) Sur le même principe, $j \in X_n(\Omega)$ si et seulement si $j \leq n$, donc :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^{j-1} p_n \times 0 + \sum_{n=j}^{m} p_n \times P(X_n = j) \\ &= \sum_{n=j}^{m} \left(\left[\binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n}\right] \times \left[\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\right]\right) \\ &= \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n}. \end{aligned}$$

(c) On simplifie :

$$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{j!(n-j)!(m-n)!}$$

et

$$\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \times \frac{(m-j)!}{(n-j)!(m-j-n+j)!} = \frac{m!}{j!(n-j)!(m-n)!}$$

et les deux quantités sont égales.

(d) On remplace dans l'expression de r_j :

$$r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m-j}{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$$

puis on sort le facteur constant $p^j \binom{m}{j}$ et on change d'indice : $\ell = n - j$:

$$r_j = \binom{m}{j} p^j \sum_{\ell=0}^{m-j} (1-p)^\ell \binom{m-j}{\ell} \pi^{\ell+j} (1-\pi)^{m-j-\ell}.$$

On sort le facteur π^j et on rassemble π^ℓ avec p^ℓ :

$$r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \Big[(1-p)\pi\Big]^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}.$$

(e) La formule du binôme de Newton donne alors :

$$\sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \Big[(1-p)\pi\Big]^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell} = \Big([(1-p)\pi] + [1-\pi]\Big)^{m-j} = \Big(1 - p\pi\Big)^{m-j}$$

puis comme $r_j = 0$ pour $j > m$ et $r_j \neq 0$ pour $j \in [\![0; m]\!]$, $X(\Omega) = [\![0; m]\!]$ et :

$$\forall j \in [\![0; m]\!],\ P(X = j) = r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \Big(1 - p\pi\Big)^{m-j}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\pi)$.

4. (a) On reprend le résultat général de la question 2, et on remplace par les nouvelles valeurs : Comme à la question 3.(a), $P(X_n = j) = 0$ lorsque $j > n$ donc pour $n \leq j - 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=j}^{+\infty} p_n P(X_n = j) = \sum_{n=j}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{j} p^j\ (1-p)^{n-j} \\ &= e^{-\lambda} p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \lambda^{n-j+j}\ (1-p)^{n-j}\ \frac{1}{n!} \times \frac{n!}{j!(n-j)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \Big[\lambda(1-p)\Big]^{n-j}. \end{aligned}$$

(b) On effectue le changement d'indice $k = n - j$ et on fait apparaître une série exponentielle qui converge donc :

$$\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \Big[\lambda(1-p)\Big]^{n-j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!} = e^{\lambda(1-p)}$$

ce qui donne $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall j \in \mathbb{N},\ P(X = j) = r_j = e^{-\lambda + \lambda(1-p)} \frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!}$$

donc on reconnaît que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

5. (a) i. Posons $u'(t) = (x-t)^n = -(-1)(x-t)^n$ et $v(t) = (1-t)^{-c-n-1}$, alors $u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ et $v'(t) = (-c-n-1)(-1)(1-t)^{-c-n-2} = (c+n+1)\frac{1}{(1-t)^{c+n+2}}$.

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ comme composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $1-t>0$ car $t<1$. Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x u'(t)v(t)dt &= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)dt \\ &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)(1-t)^{c+n+1}}\right]_0^x + \int_0^x \frac{(c+n+1)(x-t)^{n+1}}{(n+1)(1-t)^{c+n+2}}dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1}I_{n+1}.\end{aligned}$$

ii. Par récurrence :

Ini. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c}{0}I_0 &= 1 + c\int_0^x (1-t)^{-c-1}dt = 1 + c\left[-\frac{(1-t)^{-c}}{-c}\right]_0^x \\ &= 1 + (1-x)^{-c} - 1 = \frac{1}{(1-x)^c}.\end{aligned}$$

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c+n}{n}I_n.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^c} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c+n}{n}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1}I_{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + \frac{c}{n+1}\binom{c+n}{n}x^{n+1} + \frac{c(c+n+1)}{n+1}\binom{c+n}{n}I_{n+1}\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{c}{n+1}\binom{c+n}{n} &= \frac{c}{n+1}\frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(c+n-i) \\ &= \binom{c+n}{n+1} = \binom{c+n+1-1}{n+1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{c+n+1}{n+1}\binom{c+n}{n} &= \frac{c+n+1}{n+1}\frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i) = \frac{(c+n+1)}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n}(c+j) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n+1}(c+j) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(c+n+1-i) \\ &= \binom{c+n+1}{n+1},\end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^c} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + \binom{c+n+1-1}{n+1}x^{n+1} + c\binom{c+n+1}{n+1}I_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c+n+1}{n+1}I_{n+1}.\end{aligned}$$

Ccl. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Commençons par la gauche : on a $0 \leq t \leq x < 1$ donc :

$$x - t \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - t > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{x-t}{1-t} \geq 0.$$

Ensuite pour la droite on écrit :

$$\frac{x-t}{1-t} \leq x \Leftrightarrow \frac{x-t-x(1-t)}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t(x-1)}{1-t} \leq 0$$

Or on a vu que le dénominateur est strictement positif, t est positif et $0 \leq x < 1$ donc $x - 1 < 0$ et par produit et quotient on obtient bien :

$$\frac{t(x-1)}{1-t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-t}{1-t} \leq x$$

et on rassemble :

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

Ensuite, on le place à la puissance n (c'est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) :

$$0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$$

puis on multiplie par $\dfrac{1}{(1-t)^{c+1}} \geq 0$:

$$0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \leq \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}}$$

Enfin on sait que $t \leq x$ donc $1 - t \geq 1 - x > 0$ et en passant à l'inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puis à la puissance $c + 1$:

$$\frac{1}{(1-t)} \leq \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leq \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

et en multipliant par $x^n \geq 0$ on obtient finalement :

$$0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \leq \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} \leq \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

On intègre alors entre 0 et x (bornes dans l'ordre croissant) et on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x 1dt$$

et enfin :

$$0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\binom{c+n}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n-i}\right) \times \left(\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i)\right).$$

On rassemble :

$$\binom{c+n}{n} = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{c+n-i}{n-i} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 + \frac{c}{n-i}\right).$$

Enfin on effectue le changement d'indice $k = n - i$ et on obtient :

$$\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{c}{k}\right).$$

ii. On considère la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t) - t$ sur $\mathbb{R}_+$, qui est dérivable et :

$$g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1-1-t}{1+t} = -\frac{t}{1+t} < 0$$

donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et $g(0) = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g(t) \leq g(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+t) \leq t.$$

iii. Par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$,

$$\forall t \in [k-1; k],\ \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}$$

qu'on intègre entre $k-1$ et k avec des bornes croissantes :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = \ln(k) - \ln(k-1) \geq \frac{1}{k} \int_{k-1}^{k} dt = \frac{1}{k}$$

et on obtient donc :

$$\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

On somme alors ces inégalités pour k allant de 2 à n et on obtient par télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)\ ) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

puis on ajoute le terme pour $k = 1$, qui vaut $\frac{1}{1} = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

iv. On calcule :

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] = \ln\left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{c}{k}\right)$$

On applique ensuite le (i) à $t_k = \dfrac{c}{k}$ pour k allant de 1 à n et on somme les inégalités :

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{c}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{k}$$

Enfin on applique le (iii) :

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] \leq c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq c(1 + \ln(n))$$

On compose par l'exponentielle, comme l'exponentielle est croissante on obtient un encadrement qu'on multiplie par $x^{n+1} \geq 0$:

$$0 \leq \left[\binom{c+n}{n}\right] x^{n+1} \leq e^{c(1+\ln(n))} x^{n+1}.$$

On cherche la limite du membre de droite en $+\infty$ en l'écrivant sous une seule exponentielle :

$$e^{c(1+\ln(n))} x^{n+1} = e^{(n+1)\ln(x) + c\ln(n) + c} = e^{n\left(\ln(x) + \frac{\ln(x)}{n} + c\frac{\ln(n)}{n} + \frac{c}{n}\right)}$$

Or par croissances comparées $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc $\left(\ln(x) + \frac{\ln(x)}{n} + c\frac{\ln(n)}{n} + \frac{c}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(x) < 0$ (car $x < 1$) ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\ln(x) + \frac{\ln(x)}{n} + c\frac{\ln(n)}{n} + \frac{c}{n}\right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} e^{c(1+\ln(n))}x^{n+1} = 0.$$

Enfin par encadrement on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\binom{c+n}{n}\right]x^{n+1} = 0.$$

(d) On reprend l'encadrement de I_n obtenu précédemment :

$$0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

et on le multiplie par $c\binom{c+n}{n} \geq 0$:

$$0 \leq c\binom{c+n}{n}I_n \leq \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \times \binom{c+n}{n}x^{n+1}$$

On vient de voir que le membre de droite converge vers 0 car $\dfrac{c}{(1-x)^{c+1}}$ est une constante, donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} c\binom{c+n}{n}I_n = 0.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c} - c\binom{c+n}{n}I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-x)^c}$$

donc la série de terme général $\binom{c+k-1}{k}x^k$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.$$

6. Les p_k sont tous positifs, vérifions que leur somme vaut 1 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}p_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^kp^r = p^r\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k = p^r\frac{1}{[1-(1-p)]^r} = 1$$

avec la formule précédente appliquée pour $c = r$, qui est bien strictement positif.

Donc la suite (p_k) définit bien une loi de probabilité discrète.

7. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètre 1 et p, alors $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \geq 1,\ P(Y+1=k) = P(Y=k-1) = p_{k-1} = \binom{1+(k-1)-1}{k-1}(1-p)^{k-1}p^1 = (1-p)^{k-1}p.$$

donc on reconnaît que $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

8. (a) On simplifie : pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} k\binom{r+k-1}{k} &= \frac{k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(r+k-1-i) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(r+k-1-i) \times [r+k-1-(k-1)] \\ &= r\binom{r+k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

et pour $k = 1$, on le vérifie sans problème également.

(b) On considère alors la série suivante, dont le premier terme est nul donc on le retire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k p^r \binom{r+k-1}{k} = rp^r \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{r+k-1}{k-1}(1-p)^k$$

On effectue le changement d'indice $k' = k-1$ pour se ramener au binôme négatif :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k p^r \binom{r+k-1}{k} &= rp^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{k}(1-p)^{k+1} \\ &= rp^r(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{(r+1)+k-1}{k}(1-p)^k\end{aligned}$$

et d'après la formule du binôme négatif, cette série à termes positifs converge donc converge absolument, et Z admet une espérance qui vaut :

$$E(Z) = rp^r(1-p) \times \frac{1}{[1-(1-p)]^{r+1}} = \frac{r(1-p)}{p}.$$

(c) Par théorème de transfert, sous réserve de convergence (on enlève les deux premiers termes nuls),

$$E(Z(Z-1)) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^k p^r \binom{r+k-1}{k} = p^r r \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)(1-p)^k \binom{r+k-1}{k-1}.$$

On effectue le changement d'indice $k' = k-1$, on obtient :

$$E(Z(Z-1)) = p^r r \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k+1}\binom{r+k}{k} = p^r r(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k \times k\binom{(r+1)+k-1}{k}.$$

On réutilise le 8.(a) :

$$E(Z(Z-1)) = p^r r(r+1)(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k \binom{(r+1)+k-1}{k-1}.$$

On change à nouveau d'indice :

$$\begin{aligned}E[Z(Z-1)] &= r(r+1)p^r(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{k+1}\binom{(r+1)+k}{k} \\ &= r(r+1)p^r(1-p)^2\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k\binom{(r+2)+k-1}{k}.\end{aligned}$$

Par formule du binôme négatif, cette série à termes positifs converge absolument donc $Z(Z-1)$ admet une espérance et :

$$E(Z(Z-1)) = r(r+1)p^r(1-p)^2 \times \frac{1}{p^{r+2}} = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}.$$

Par suite la linéarité de l'espérance assure que Z^2 admet une espérance et Z admet donc une variance, et la formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = E(Z^2 - Z + Z) - (E(Z))^2 = E(Z(Z-1)) + E(Z) - (E(Z))^2.$$

Soit :

$$\begin{aligned}V(Z) &= \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{rp(1-p)}{p^2} - \frac{r^2(1-p)^2}{p^2} \\ &= \frac{r(1-p)\left[(r+1)(1-p)+p-r(1-p)\right]}{p^2} \\ &= \frac{r(1-p)\left[(1-p)[r+1-r]+p\right]}{p^2} = \frac{r(1-p)\left[(1-p)+p\right]}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.\end{aligned}$$

9. (a) Montrons par récurrence sur $k \geq 1$, on a $p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

Ini. $p_0 \prod_{i=1}^{1} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0(a+b) = p_1$ d'après la relation de récurrence, et la propriété est vraie pour $k = 1$.

Héré. On suppose qu'il existe $k \geq 1$ tel que $p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$ alors :

$$p_{k+1} = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k = p_0 \left(a + \frac{b}{k+1}\right) \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k+1} \left(a + \frac{b}{i}\right)$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ccl. Par récurrence, $\forall k \geq 1,\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

(b) Puisque $a = 0$, on obtient :

$$\forall k \geq 1,\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{b}{i}\right) = p_0 \frac{b^k}{k!}$$

qu'on vérifie facilement pour $k = 0$ également, et comme la somme des probabilités doit valoir 1 on a :

$$p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = p_0 e^b = 1$$

donc $p_0 = e^{-b}$ et enfin :

$$N(\Omega) = \mathbb{N} \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N},\ P(N = k) = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$$

donc on reconnaît bien : $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

(c) i. Supposons que tous les p_k sont strictement positifs. Alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} > 0.$$

Or $\frac{b}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ donc on obtient par passage à la limite $a \geq 0$ qui est absurde.
On en déduit qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p_\ell = p_0 \prod_{i=1}^{\ell} \left(a + \frac{b}{i}\right) = 0.$$

Ce produit est nul donc l'un au moins de ses facteurs est nul. Montrons que ce n'est pas p_0, par l'absurde :
Si $p_0 = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = 0$ donc la somme des probabilités ne vaut pas 1, c'est absurde.
Donc il existe un (unique, car les facteurs sont tous distincts) $i_0 \geq 1$ tel que

$$a + \frac{b}{i_0} = 0.$$

et on obtient :

$$\forall k < i_0,\ p_k \neq 0 \ \text{ et } \ \forall k \geq i_0,\ \ p_k = 0$$

selon que le facteur $a + \frac{b}{i_0}$ soit ou non dans le produit.
Enfin en posant $r = i_0 - 1 \geq 0$, il existe bien un unique $r \geq 0$ tel que :

$$\forall k \leq r,\ \ p_k \neq 0 \quad \text{ et } \quad \forall k > r,\ \ p_k = 0$$

ii. On a vu que $r = i_0 - 1$ donc $i_0 = r+1$ et de plus :

$$a + \frac{b}{i_0} = 0 \Leftrightarrow a + \frac{b}{r+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{r+1} = -a$$

et enfin on obtient bien : $b = -a(r+1)$.

iii. On a alors pour tout $k \in [\![0; r]\!]$,

$$\begin{aligned} p_k &= p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} a\left(1 - \frac{r+1}{i}\right) = p_0 a^k \prod_{i=1}^{k} \frac{i-r-1}{i} \\ &= \frac{p_0 a^k}{k!} \prod_{i=1}^{k} (i-r-1) = \frac{p_0 a^k (-1)^k}{k!} \prod_{i=1}^{k} (r+1-i) = \frac{p_0(-a)^k}{k!} \times \frac{r!}{(r-k)!} \\ &= p_0(-a)^k \binom{r}{k}. \end{aligned}$$

On a $N(\Omega) = [\![0; r]\!]$ et on obtient la valeur de p_0 en sommant pour k allant de 0 à r, ce qui doit donner 1 :

$$p_0 \sum_{k=0}^{r} (-a)^k \times 1^{r-k} \binom{r}{k} = p_0 \left(1-a\right)^r = 1$$

donc $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

iv. On en déduit ensuite que pour tout k on a :

$$p_k = \frac{(-a)^k \times 1^{r-k}}{(1-a)^r} \binom{r}{k} = \binom{r}{k} \left(\frac{-a}{1-a}\right)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k}$$

donc on reconnaît que :

$$N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(r, \frac{-a}{1-a}\right)$$

Enfin, on exprime r en fonction de a et b :

$$b = -a(r+1) \Longleftrightarrow r+1 = -\frac{b}{a} \Longleftrightarrow r = -\frac{b}{a} - 1 = \frac{a+b}{-a}$$

et enfin $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{a+b}{-a}, \dfrac{-a}{1-a}\right)$.

(d) i. On a obtenu précédemment que : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{b+ai}{i} = \frac{p_0}{k!} \prod_{i=1}^{k} \left[a\left(\frac{b}{a} + i\right)\right] = \frac{p_0}{k!} a^k \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{b}{a} + i\right)$$

Comme le résultat à trouver avec $\binom{\frac{b}{a}+b}{k}$ donne un produit de la forme $\left(\dfrac{b}{a} + k - i\right)$ on va poser pour le faire apparaître :

$$i = k - i' \Leftrightarrow i' = k - i$$

et on obtient bien :

$$p_k = \frac{p_0}{k!} a^k \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{b}{a} + k - i\right) = p_0 a^k \binom{\frac{b}{a}+k}{k}.$$

ii. Comme la somme des termes doit faire 1, la formule du binôme négatif donne :

$$p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \binom{\frac{b}{a}+k}{k} = p_0 \times \frac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}}.$$

puis en posant $r = \dfrac{b}{a} + 1$ et $p = 1-a$ on a :

$$N(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(N=k) = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r.$$

donc N suit la loi binomiale négative de paramètres r et p donc de paramètres $r = \frac{b}{a}+1$ et $p = 1-a$.

10. On teste les formules dans les 3 cas :

- Si $a=0$, $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ donc N admet une espérance et une variance et $E(N) = V(N) = b$ ce qui correspond bien puisque :

$$\frac{0+b}{1-0} = b \quad \text{et} \quad \frac{0+b}{(1-0)^2} = b$$

- Si $a<0$, $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{a+b}{-a}, \frac{-a}{1-a}\right)$ donc N admet une espérance et une variance et :

$$E(N) = \frac{a+b}{-a} \times \frac{-a}{1-a} = \frac{a+b}{1-a}$$

et

$$V(N) = \frac{a+b}{-a} \times \frac{-a}{1-a} \times \left(1 - \frac{-a}{1-a}\right) = \frac{(a+b)(1-a+a)}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

- Si $a>0$, N suit une loi binomiale négative de paramètres $r = \frac{a}{b}+1$ et $p = 1-a$ donc admet une espérance et une variance et :

$$E(N) = \frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)a}{1-a} = \frac{a+b}{1-a} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)a}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

et le résultat est bien valable dans les trois cas.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [U_k = 0]\right)$$

et par indépendance des variables (U_k) on obtient :

$$P(X_n = 0) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k = 0) = (q_0)^n$$

car les (U_k) suivent toutes la même loi.

On en déduit que :

$$r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(X_n = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (q_0)^n.$$

12. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

(a) Sachant que $(X_n = j)$, X_n est certaine égale à j donc :

$$E_{(X_n=j)}(X_n) = j$$

De plus par linéarité de l'espérance on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n} E_{(X_n=j)}(U_k) = j$$

Or les variables U_k suivent toutes la même loi et "rentrent en compte de manière symétrique dans X_n" donc les lois conditionnelles des U_k (pour k allant de 1 à n uniquement!) sachant $X_n = j$ sont les mêmes, et on obtient :

$$nE_{(X_n=j)}(U_k) = j \Leftrightarrow E_{(X_n=j)}(U_1) = \frac{j}{n}.$$

(b) On sait que :

$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(X_n = j)$$

avec $P(X_0 = j) = 0$ car X_0 est certaine égale à 0 puis comme N suit la loi de Panjer de paramètre a et b on a :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} \left(a + \frac{b}{n}\right) P(X_n = j)$$

On calcule alors

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) = a + \frac{b}{j} E_{(X_n=j)}(U_1) = a + \frac{b}{j} \times \frac{j}{n} = a + \frac{b}{n}$$

et on peut donc remplacer :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j)$$

(c) Par théorème de transfert on a :

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(a + \frac{bi}{j}\right) P_{(X_n=j)}(U_1 = i)$$

Or X_n est la somme des U_i donc est supérieure ou égale à U_1 : pour $i > j$, on a donc $P_{(X_n=j)}(U_1 = i) = 0$ donc :

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) P_{(X_n=j)}(U_1 = i)$$

On multiplie par $P(X_n = j)$ qu'on rentre dans la somme et on reconnaît :

$$\begin{aligned} E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) P_{(X_n=j)}(U_1 = i) P(X_n = j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) P\left[(U_1 = i) \cap (X_n = j)\right]. \end{aligned}$$

Or $X_n = U_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} U_k = U_1 + Y_n$, où Y_n suit la même loi que X_{n-1} et est indépendante de U_1 donc :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) P\left[(U_1 = i) \cap (Y_n = j - i)\right]$$

puis par indépendance :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i)P(Y_n = j - i)$$

et enfin puisque Y_n a la même loi que X_{n-1} :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i)P(X_{n-1} = j - i).$$

(d) On reprend le calcul de r_j :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}\left[\sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i)\Pr(X_{n-1} = j - i)\right] \end{aligned}$$

On échange l'ordre des sommes :

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i)\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}P(X_{n-1} = j - i)$$

On reconnaît alors $P(U_1 = i) = q_i$, et dans la somme sur n on change d'indice avec $n' = n - 1$:

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i\sum_{n=0}^{+\infty} p_nP(X_n = j - i)$$

Enfin on reconnaît dans cette dernière somme la valeur de $P(X = j - i) = r_{j-i}$ et on obtient :

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_ir_{j-i}$$

On sépare alors le terme $i = 0$:

$$r_j = \sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_ir_{j-i} + aq_0r_j \Leftrightarrow r_j(1 - aq_0) = \sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_ir_{j-i}$$

et enfin :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_ir_{j-i}\right).$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

13. (a) i. On en déduit que $q_i = 0$ pour $i \geq 2$, $q_1 = P(U_k = 1) = p$ et $q_0 = 1 - p$ ce qui donne :

$$r_j = \frac{1}{1 - a(1-p)} \left(a + \frac{b}{j}\right) p r_{j-1} = \frac{p}{1 - a + ap} \left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}.$$

On reconnaît la relation de récurrence qui définit les lois de Panjer, donc X suit une loi de Panjer de paramètres a' et b' tels que :

$$a' = \frac{ap}{1 - a + ap} \qquad \text{et} \qquad b' = \frac{bp}{1 - a + ap}$$

On prouve en partant de $a < 1$ que $0 < \dfrac{p}{1 - a + ap} < 1$:

$$\begin{aligned} a < 1 \quad &\Rightarrow \quad a(1-p) < 1 - p \Rightarrow -a(1-p) > p - 1 \\ &\Rightarrow \quad 1 - a(1-p) = 1 - a + ap > p > 0 \Rightarrow 0 < \frac{p}{1 - a + ap} < 1 \end{aligned}$$

puis $\dfrac{ap}{1 - a + ap} < a < 1$ si $a > 0$, et $\dfrac{ap}{1 - a + ap} < 0$ si $a < 0$ donc on a bien prouvé que $a' < 1$. D'autre part on a :

$$a' + b' = \frac{(a+b)p}{1 - a + ap} = (a+b) \times \frac{p}{1 - a + ap}$$

est bien strictement positif comme produit de deux facteurs strictement positifs.

ii. A la question 3, N suivait une loi binomiale de paramètres m et π donc une loi Panjer de paramètres a et b tels que :

$$\frac{a+b}{-a} = m \quad \text{et} \quad \frac{-a}{1-a} = \pi$$

La deuxième équation donne facilement :

$$a = \frac{\pi}{\pi - 1}$$

puis :

$$b = -am - a = -a(m+1) = \frac{\pi(m+1)}{1 - \pi}$$

On en déduit que X suit la loi de Panjer de paramètres a et b tels que :

$$a' = \frac{ap}{1 - a(1-p)} = \frac{\pi p}{(\pi - 1)\left(1 - \frac{\pi}{\pi - 1}(1-p)\right)} = \frac{\pi p}{\pi - 1 - \pi + \pi p} = \frac{\pi p}{\pi p - 1}$$

(qui est bien strictement négatif donc X suit une loi binomiale) et

$$b' = \frac{a'}{\times} \frac{b}{a} = \frac{\pi p}{\pi p - 1} \times (-m - 1)$$

D'où X suit la loi binomiale de paramètres :

$$m' = -\frac{b'}{a'} - 1 = -(-m-1) - 1 = m$$

et

$$\pi' = \frac{-a'}{1 - a'} = \frac{\frac{\pi p}{1 - \pi p}}{\frac{\pi p - 1 - \pi p}{\pi p - 1}} = \frac{\pi p(\pi p - 1)}{(1 - \pi p)(-1)} = \pi p$$

et on retrouve bien le résultat de la question 3.
Pour la question 4, on avait supposé $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(0, \lambda)$.
Donc X suit la loi de Panjer de paramètres $a' = 0$ et $b' = \lambda p$, c'est-à-dire la loi de Poisson de paramètre λp, et on retrouve bien le résultat de la question 4).

(b) i. La série $\sum_{i\geq 1} \frac{p^i}{i}$ converge par théorème de comparaison.

En effet, elle est à termes positifs et pour tout $i \geq 1$, on a $\frac{p^i}{i} \leq p^i$ avec $\sum_{i\geq 1} p^i$ une série géométrique convergente, car $|p| < 1$.

Cette série étant à termes strictement positifs, elle converge vers un réel $\ell > 0$, et pour tout α réel, la série $\sum_{i\geq 1} \alpha \frac{p^i}{i}$ converge également, et vérifie :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha \frac{p^i}{i} = \alpha\ell = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\ell}$$

Il existe donc une unique valeur réelle pour α telle que cette série converge vers 1.

ii. On applique le résultat de la question 13 : pour tout $j \geq 1$, et avec $a = q_0 = 0$ cela donne :

$$r_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{bi}{j} q_i r_{j-i}.$$

On peut à présent remplacer q_i par $\alpha \frac{p^i}{i}$ et sortir les constantes de la somme :

$$r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j} i \frac{p^i}{i} r_{j-i} = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}.$$

iii. Pour faire apparaître la somme donnant r_{j-1}, on applique un changement d'indice qui transformera $j - i$ en $j - 1 - i'$, donc $-i = -1 - i'$ et enfin $i' = i - 1$:

$$r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=0}^{j-1} p^{i+1} r_{j-(i+1)} = \frac{b\alpha}{j} p \sum_{i=0}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i}$$

Il reste à sortir le terme pour $j = 0$, qui vaut $p^0 r_{j-1} = r_{j-1}$ donc :

$$r_j = \frac{pb\alpha}{j} \left(r_{j-1} + \sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} \right)$$

Enfin cette somme vaut :

$$\sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} = \frac{(j-1) r_{j-1}}{b\alpha}$$

ce qui donne :

$$r_j = \frac{pb\alpha}{j} \left(r_{j-1} + \frac{(j-1)}{b\alpha} r_{j-1} \right) = r_{j-1} \left(\frac{pb\alpha}{j} + p\frac{j-1}{j} \right) = r_{j-1} \left(\frac{pb\alpha - p}{j} + p \right)$$

et enfin :

$$r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1}.$$

Pour finir on a pour $j = 1$:

$$r_1 = \frac{b\alpha}{1} \sum_{i=1}^{1} p^i r_{1-i} = b\alpha p r_0 = (p + pb\alpha - p) r_0 = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{1} \right) r_0$$

et la formule est également vraie pour $j = 1$.

iv. On reconnaît alors une loi de Panjer de paramètres $a' = p > 0$ et $b' = p(b\alpha - 1)$.

Comme $a' > 0$, c'est donc une loi binomiale négative de paramètres :

$$r = \frac{b'}{a'} + 1 = b\alpha - 1 + 1 = b\alpha \qquad \text{et} \qquad p' = 1 - a' = 1 - p$$

donc :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(b\alpha, 1 - p\right).$$