Correction - AP 13

Applications linéaires

Exercice 1

/

Exercice 2

/

Exercice 3

/

Exercice 4

1. $\Rightarrow$: Supposons que $g \circ f = 0$. Montrons que $Im(f) \subset Ker(g)$.

   Soit $y \in Im(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

   On a alors : $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$ donc $y \in Ker(g)$.

   On a donc $Im(f) \subset Ker(g)$.

   $\Leftarrow$: Supposons que $Im(f) \subset Ker(g)$. Montrons que $g \circ f = 0$.

   Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in Im(f)$. Comme $Im(f) \subset Ker(g)$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$.

   Ainsi, pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = 0$ donc $g \circ f = 0$.

   On a donc montré que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$.

2. $\Rightarrow$: Supposons que $Ker(g \circ f) = Ker(f)$. Montrons que $Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$.

   $0 \in Im(f)$ et $0 \in Ker(g)$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0 \in Im(f) \cap Ker(g)$. Ainsi $\{0\} \subset Im(f) \cap Ker(g)$.

   Soit $y \in Im(f) \cap Ker(g)$. Comme $y \in Im(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in Ker(g)$, $g(y) = 0$. Alors $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = 0$ donc $x \in Ker(g \circ f) = Ker(f)$. Donc $y = f(x) = 0$. Ainsi, $Im(f) \cap Ker(g) \subset \{0\}$.

   On a donc $Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$.

   $\Leftarrow$: Supposons que $Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$. Montrons que $Ker(g \circ f) = Ker(f)$.

   Soit $x \in Ker(f)$. Alors $f(x) = 0$. Comme g est linéaire, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$. Donc $x \in Ker(g \circ f)$ et $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.

   Soit $x \in Ker(g \circ f)$. Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in Ker(g)$. Comme $f(x) \in Im(f)$, $f(x) \in Ker(g) \cap Im(f) = \{0\}$. Donc $f(x) = 0$ et $x \in Ker(f)$. Ainsi, $Ker(g \circ f) \subset Ker(f)$.

   Finalement, $Ker(g \circ f) = Ker(f)$.

   On a donc montré que $Ker(g \circ f) = Ker(f) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$.

Exercice 5

1. (a) Soit $i \in \mathbb{N}$.

   Soit $x \in Ker(f^i)$. Alors $f^i(x) = 0$. En composant par f qui est une application linéaire, $f^{i+1}(x) = f(f^i(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in Ker(f^{i+1})$.

   (b) <u>Méthode 1</u> : (par récurrence)

   Notons $\mathcal{P}(i)$ la propriété : "$Ker(f^i) = Ker(f^{i+1})$".

   Ini. Par hypothèse, $Ker(f^r) = Ker(f^{r+1})$ donc $\mathcal{P}(r)$ est vraie.

   Héré. Soit $i \geq r$. Supposons que $\mathcal{P}(i)$ est vraie.
   On sait déjà que $Ker(f^{i+1}) \subset Ker(f^{i+2})$ avec la question 1.(a).
   Soit $x \in Ker(f^{i+2})$. Donc $f^{i+2}(x) = 0$. Comme $f^{i+2}(x) = f^{i+1}(f(x)) = 0$, $f(x) \in Ker(f^{i+1}) = Ker(f^i)$ par hypothèse de récurrence. Donc $f^{i+1}(x) = f^i(f(x)) = 0$. Ainsi, $x \in Ker(f^{i+1})$.
   On a donc $Ker(f^{i+1}) = Ker(f^{i+2})$ et $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie.

   Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $i \geq r$, $Ker(f^i) = Ker(f^{i+1})$.

   <u>Méthode 2</u> : (sans récurrence)

   Soit $i \geq r$. On sais déjà que $Ker(f^i) \subset Ker(f^{i+1})$ avec la question 1.(a).

   Soit $x \in Ker(f^{i+1})$. Alors $f^{i+1}(x) = 0$ donc $f^{r+1}(f^{i-r}(x)) = 0$ et $f^{i-r}(x) \in Ker(f^{r+1})$. Comme $Ker(f^{r+1}) \subset Ker(f^r)$, $f^{i-r}(x) \in Ker(f^r)$ et donc $f^i(x) = f^r(f^{i-r}(x) = 0$. Ainsi $x \in Ker(f^i)$ et on a bien démontré que $Ker(f^{i+1}) \subset Ker(f^i)$.

   Finalement $Ker(f^i) = Ker(f^{i+1})$, et ceci pour tout $i \geq r$.

   (c) i. D'après la question 1.(a), $Ker(f^i) \subset Ker(f^{i+1})$. Donc $dim(Ker(f^i)) \leq dim(Ker(f^{i+1}))$, c'est-à-dire $d_i \leq d_{i+1}$. La suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

   ii. Par l'absurde, supposons que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $d_i \neq d_{i+1}$.
   La suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on en déduit que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $d_i < d_{i+1}$.
   Comme (d_i) est une famille strictement croissante d'entiers positifs, $d_i \geq i$.
   En particulier, $d_{n+1} \geq n + 1$.
   Or par définition, $Ker(f^{n+1}) \subset E$ donc $d_{n+1} = dim(Ker(f^{n+1})) \leq n$. On a donc une contradiction.
   Donc il existe bien $r \in [\![0, n]\!]$ tel que $d_r = d_{r+1}$.

   iii. D'après la question 1.(a), $Ker(f^r) \subset Ker(f^{r+1})$. D'après la question précédente, $d_r = dim(Ker(f^r)) = d_{r+1} = dim(Ker(f^{r+1}))$. Donc $Ker(f^r) = Ker(f^{r+1})$.
   Avec la question 1.(b), on en déduit que pour tout $i \geq r$, $Ker(f^i) = Ker(f^{i+1})$ donc $d_i = dim(Ker(f^i)) = dim(Ker(f^{i+1})) = d_{i+1}$.
   La suite (d_i) est donc stationnaire.

   (d) i. Soit $j \in \mathbb{N}$.
   Soit $y \in Im(f^{j+1})$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{j+1}(x)$. Alors $y = f^j(f(x))$ donc $y \in Im(f^j)$.
   On a donc bien que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $Im(f^{j+1}) \subset Im(f^j)$.

   ii. <u>Méthode 1</u> : (par récurrence)
   Notons $\mathcal{P}(j)$ la propriété : "$Im(f^j) = Im(f^{j+1})$".

   Ini. Par hypothèse, $Im(f^s) = Im(f^{s+1})$ donc $\mathcal{P}(s)$ est vraie.

   Héré. Soit $j \geq s$. Supposons que $\mathcal{P}(j)$ est vraie.
   On sait déjà que $Im(f^{j+2}) \subset Im(f^{j+1})$ avec la question 2.(a).
   Soit $y \in Im(f^{j+1})$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{j+1}(x)$. Donc $y = f(f^j(x))$.
   Or $f^j(x) \in Im(f^j) = Im(f^{j+1})$ par hypothèse de récurrence. Donc il existe $z \in E$ tel que $f^j(x) = f^{j+1}(z)$. On a alors $y = f(f^j(x)) = f(f^{j+1}(z)) = f^{j+2}(z) \in Im(f^{j+2})$. Ainsi, $y \in Im(f^{j+2})$.
   On a donc $Im(f^{j+1}) = Im(f^{j+2})$ et $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.

   Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $j \geq s$, $Im(f^j) = Im(f^{j+1})$.

   <u>Méthode 2</u> : (sans récurrence)
   Soit $j \geq s$. On sais déjà que $Im(f^{j+1}) \subset Im(f^j)$ avec la question 2.(a).

Soit $y \in Im(f^j)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^j(x)$. Alors $y = f^{j-s}(f^s(x))$ et $f^s(x) \in Im(f^s)$. Comme $Im(f^s) = Im(f^{s+1})$, $f^s(x) \in Im(f^{s+1})$ et donc il existe $z \in E$ tel que $f^s(x) = f^{s+1}(z)$. On a alors $y = f^{j-s}(f^s(x)) = f^{j-s}(f^{s+1}(z)) = f^{j+1}(z)$ donc $y \in Im(f^{j+1})$. On a donc montré que $Im(f^j) \subset Im(f^{j+1})$.
Finalement, $Im(f^j) = Im(f^{j+1})$, et ceci pour tout $j \geq s$.

(e) i. D'après la question 2.(a), $Im(f^{j+1}) \subset Im(f^j)$. Donc $dim(Im(f^{j+1})) \leq dim(Im(f^j))$, c'est-à-dire $m_{j+1} \leq m_j$. La suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

ii. En appliquant le théorème du rang à $f^r \in \mathscr{L}(E)$, on obtient :
$$dim(E) = dim(Ker(f^r)) + dim(Im(f^r)).$$
Donc $n = d_r + m_r$.
De la même façon, en appliquant le théorème du rang à $f^{r+1} \in \mathscr{L}(E)$, on obtient :
$$dim(E) = dim(Ker(f^{r+1})) + dim(Im(f^{r+1})).$$
Donc $n = d_{r+1} + m_{r+1}$.
Comme $d_r = d_{r+1}$, $m_r = n - d_r = n - d_{r+1} = m_{r+1}$.

iii. D'après la question 2.(a), $Im(f^{r+1}) \subset Im(f^r)$. Or avec la question précédente, $dim(Im(f^{r+1})) = m_{r+1} = m_r = dim(Im(f^r))$. Donc $Im(f^{r+1}) = Im(f^r)$.
Avec la question 2.(b), on en déduit que pour tout $j \geq r$, $Im(f^{j+1}) = Im(f^j)$ donc $m_{j+1} = dim(Im(f^{j+1})) = dim(Im(f^j)) = m_j$.
La suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire.

Exercice 6

1. (a) Soit f un endomorphisme nilpotent. Il existe donc $k \geq 1$ tel que $f^{k-1} \neq 0$ et $f^k = 0$.
Supposons par l'absurde que f est bijectif. Donc f admet une bijection réciproque f^{-1} (qui est linéaire). En composant la relation $f^k = 0$ par f^{-1}, on a :
$$f^{-1} \circ f^k = f^{-1} \circ 0 \quad \text{donc} \quad f^{k-1} = 0.$$
Ceci contredit le fait que $f^{k-1} \neq 0$. Donc f n'est pas bijectif.

(b) Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, f est bijective si et seulement si f est injective. Donc, d'après la question précédente, f n'est pas injective et $Ker(f) \neq \{0\}$. Donc $dim(Ker(f)) \geq 1$.

(c) Supposons que $Ker(f) = Ker(f^2)$. D'après l'exercice précédent, pour tout $i \geq 1$, $Ker(f^i) = Ker(f)$. Donc, avec $i = k$, $Ker(f) = Ker(f^k) = Ker(0) = E$. Comme $Ker(f) = E$, $f = 0$ donc f est d'indice de nilpotence $k \leq 1$. Contradiction avec l'hypothèse $k > 3$.
Supposons que $Ker(f^2) = Ker(f^3)$. D'après l'exercice précédent, pour tout $i \geq 2$, $Ker(f^i) = Ker(f^2)$. Donc, avec $i = k$, $Ker(f^2) = Ker(f^k) = Ker(0) = E$. Comme $Ker(f^2) = E$, $f^2 = 0$ donc f^2 est d'indice de nilpotence $k \leq 2$. Contradiction avec l'hypothèse $k > 3$.

(d) Avec la question 1.(b), $dim(Ker(f)) \geq 1$.
Avec la question 1.(c) et en utilisant l'exercice précédent, on a :
$$1 \leq dim(Ker(f)) < dim(Ker(f^2)) < dim(Ker(f^3)).$$
Donc $dim(Ker(f^3)) \geq 3$. Comme $Ker(f^3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $Ker(f^3) = \mathbb{R}^3$ et $f^3 = 0$.
Donc $k = 3$ ce qui contredit l'hypothèse $k > 3$. Donc $k \leq 3$.

2. (a) Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin Ker(f^2)$.

(b) On a déjà $Card(\mathscr{B}) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$.

Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$.

En composant par f qui est linéaire, on a : $af(x) + bf^2(x) + cf^3(x) = 0$. Or $f^3 = 0$ donc on obtient : $af(x) + bf^2(x) = 0$.

En composant une nouvelle fois par f, on a : $af^2(x)+bf^3(x) = 0$ et de même en simplifiant, $af^2(x) = 0$.

Or $f^2(x) \neq 0$, donc $af^2(x) = 0 \Rightarrow a = 0$. Donc $af(x) + bf^2(x) = 0$ donne $bf^2(x) = 0 \Rightarrow b = 0$. Donc $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$ donne $cf^2(x) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Donc $\mathscr{B}$ est une famille libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On obtient sans calcul $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $Im(f^2) = Vect(f^2(x), f^2(f(x)), f^2(f^2(x))) = Vect(f^2(x), f^3(x), f^4(x)) = Vect(f^2(x), 0, 0) = Vect(f^2(x))$. Donc $dim(Im(f^2)) = 1$.

$Im(f) = Vect(f(x), f(f(x)), f(f^2(x)) = Vect(f(x), f^2(x), f^3(x)) = Vect(f(x), f^2(x), 0) = Vect(f(x), f^2(x))$. Donc $dim(Im(f)) = 2$.

Avec le théorème du rang appliqué à $f \in \mathscr{L}(E)$, $dim(\mathbb{R}^3) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$ donc $dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$. On a donc $dim(Im(f^2)) = dim(Ker(f))$.

Or $f^3 = 0$ donc $f \circ f^2 = 0$. D'après l'exercice 1 (question 1 avec $g = f$ et $f = f^2$), on a $Im(f^2) \subset Ker(f)$.

Comme $dim(Im(f^2)) = dim(Ker(f))$ et $Im(f^2) \subset Ker(f)$. Finalement, $Im(f^2) = Ker(f)$.