Correction - AP 14

Variables aléatoires à densité

Exercice 1 (ECRICOME 2007)

1. La densité d'une variable aléatoire X suivant une exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ est :

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

De plus, on a : $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$.

2. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0. f est positive. Enfin,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = 0 + E(X) = 1.$$

Donc f est une densité.

(b) $E(T)$ existe si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge. Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = E(X^2),$$

et X admet un moment d'ordre 2. Donc T admet une espérance.
De plus, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ donc $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 1^2 = 2$.
Ainsi, $E(T)$ existe et est égale à 2. Le temps moyen d'attente de passage en caisse est donc de deux unités de temps.

3. (a) Par définition de la fonction de répartition, $F_T(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Alors :

- Si $x < 0$,
$$F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$
- Si $x \geq 0$, en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} te^{-t}dt = \left[t(-e^{-t})\right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t})dt \\ &= -xe^{-x} + 0 + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + e^0 \\ &= 1 - (x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, $F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(b) On cherche $P_{(T\geq 1)}(T \leq 2)$. On a (en utilisant que T est à densité à la deuxième et à la troisième égalité) :

$$\begin{aligned} P_{(T\geq 1)}(T \leq 2) &= \frac{P((T \geq 1) \cap (T \leq 2))}{P(T \geq 1)} = \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{1 - P(T \leq 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{(1 - 3e^{-2}) - (1 - 2e^{-1})}{1 - (1 - 2e^{-1})} = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{2e^{-1}} = \frac{2e^1 - 3}{2e^1}. \end{aligned}$$

4. (a) Le client C pourra passer en caisse dès que le plus rapide de A ou B aura fini. En d'autres termes, le temps d'attente de C sera égal au minimum du temps de passage de A et de B. Donc $M = \min(T_A, T_B)$.

(b) Si $x < 0$, $F_M(x) = P(M \leq x) = P(\min(T_A, T_B) \leq x) = 0$ car les temps de passage de A et B ne peuvent pas être négatif. Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} F_M(x) & = & P(M \leq x) = 1 - P(M > x) \\ & = & 1 - P(\min(T_A, T_B) > x) \\ & = & 1 - P((T_A > x) \cap (T_B > x)) \\ & = & 1 - P(T_A > x) \times P(T_B > x) \quad (T_A \text{ et } T_B \text{ sont indépendantes}) \\ & = & 1 - (1 - F_A(x)) \times (1 - F_B(x)) \\ & = & 1 - (x+1)e^{-x} \times (x+1)e^{-x} \\ & = & 1 - (1+x)^2 e^{-2x}. \end{array}$$

On a donc $F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(c) La fonction de répartition F_M de M est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en 0 car :

- Sur $]-\infty, 0[$, $F_M(x) = 0$ qui est C^1.
- Sur $]0, +\infty[$, $F_M(x) = 1-(1+x)^2 e^{-2x}$ qui est C^1 comme somme et produit de fonctions de classe C^1.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} F_M(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 = F_M(0)$
  $\lim\limits_{x \to 0^+} F_M(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - (1+x)^2 e^{-2x}) = 1 - 1 = 0 = F_M(0)$
  Donc F_M est continue en 0.

On peut donc affirmer que M est une variable à densité.

Pour obtenir la densité f_M de M, il suffit de dériver F_M où elle est dérivable et de "compléter" où elle n'est pas dérivable. On obtient après calculs :

$$f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x(1+x)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a complété en 0 en posant $f_M(0) = 0$.

Exercice 2 (EDHEC 2016)

1. Le cours donne ces fonctions de répartition :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+3}{4} & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2. (a) On applique les probabilités totales avec le système complet annoncé et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} (X \leq x) & = & [(X \leq x) \cap (Z = 1)] \cup [(X \leq x) \cap (Z = -1)] \\ & = & [(U \leq x) \cap (Z = 1)] \cup [(V \leq x) \cap (Z = -1)] \end{array}$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance de U et Z d'une part, de V et Z d'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; F_X(x) = P(Z = 1)P(U \leq x) + P(Z = -1)P(V \leq x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x).$$

(b) Selon la valeur de Z, X est égal à U donc prend ses valeurs dans $[-3; 1]$, ou à V donc prend ses valeurs dans $[-1; 3]$. On en déduit que X prend ses valeurs dans la réunion de ces deux ensembles donc

$$Z(\Omega) = [-3; 3].$$

On en déduit que $F_X(x)$ est nul pour $x < -3$ et vaut 1 pour $x > 3$, puis on traite chaque intervalle demandé :

- si $-3 \leq x \leq -1$, $F_U(x) = \frac{x+3}{4}$ et $F_V(x) = 0$ donc
$$F_X(x) = p\frac{x+3}{4}.$$
- si $-1 \leq x \leq 1$, $F_U(x) = \frac{x+3}{4}$ et $F_V(x) = \frac{x+1}{4}$ donc
$$F_X(x) = p\frac{x+3}{4} + (1-p)\frac{x+1}{4}.$$
- si $1 \leq x \leq 3$, $F_U(x) = 1$ et $F_V(x) = \frac{x+1}{4}$ donc
$$F_X(x) = p + (1-p)\frac{x+1}{4}.$$

(c) En dérivant F_X sauf en -3, -1, 1 et 3, valeurs arbitraires, une densité de X est alors donnée par :
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ p/4 & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ 1/4 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (1-p)/4 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(d) On considère l'intégrale, qu'on décompose par relation de Chasles et linéarité :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-3} 0\, dx + \frac{p}{4}\int_{-3}^{-1} x\, dx + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x\, dx + \frac{1-p}{4}\int_{1}^{3} x\, dx + \int_{3}^{+\infty} 0\, dx$$
Les deux intégrales de la fonction nulle convergent absolument et valent 0, les autres intégrales ne sont pas généralisées donc convergent absolument. Finalement X admet une espérance et
$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{p}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} \\ &= \frac{p}{4} \times \frac{1-9}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1-1}{2} + \frac{1-p}{4} \times \frac{9-1}{2} \\ &= \frac{-8p + 8(1-p)}{8} = 1 - 2p. \end{aligned}$$
Pour les mêmes raisons conjuguées au théorème de transfert, X admet un moment d'ordre deux et donc une variance, puis
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{p}{4}\int_{-3}^{-1} x^2\, dx + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2\, dx + \frac{1-p}{4}\int_{1}^{3} x^2\, dx \\ &= \frac{p}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} \\ &= \frac{p}{4} \times \frac{-1+27}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1+1}{3} + \frac{1-p}{4} \times \frac{27-1}{3} \\ &= \frac{26p + 2 + 26(1-p)}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$
Enfin par formule de Koenig-Huygens on obtient :
$$V(X) = \frac{7}{3} - (1-2p)^2.$$

3. (a) Z prend les valeurs 1 et -1, on fait deux cas :

- si $Z=1$, alors $X=U$ et on a :

$$U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}=U\frac{1+1}{2}+V\frac{1-1}{2}=U=X$$

- si $Z=-1$, alors $X=V$ et on a :

$$U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}=U\frac{1-1}{2}+V\frac{1+1}{2}=V=X$$

donc dans tous les cas on a bien :

$$X=U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}.$$

(b) La linéarité de l'espérance d'une part et l'indépendance de U, V et Z qui donne par lemme des coalitions celle de U et $\frac{1+Z}{2}$ d'une part, et de V et $\frac{1-Z}{2}$ d'autre part, X admet bien une espérance et :

$$E(X)=E(U)\frac{1+E(Z)}{2}+E(V)\frac{1-E(Z)}{2}$$

Or le cours pour les deux premières et un calcul immédiate pour la troisième donnent

$$E(U)=-1 \quad , \quad E(V)=1 \quad , \quad E(Z)=p-(1-p)=2p-1$$

donc

$$E(X)=-\frac{2p}{2}+\frac{2-2p}{2}=-p+1-p=1-2p$$

qui confirme bien le résultat de 2d.

(c) On calcule X^2 en fonction de U, V et Z et leurs carrés :

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}\right)^2=U^2\frac{(1+Z)^2}{4}+V^2\frac{(1-Z)^2}{4}+2UV\frac{(1+Z)(1-Z)}{4} \\ &= U^2\frac{1+Z^2+2Z}{4}+V^2\frac{1+Z^2-2Z}{4}+UV\frac{1-Z^2}{2} \end{aligned}$$

Or on remarque que $Z^2=1$ puisque Z ne prend que les valeurs -1 et 1, donc son carré vaut toujours 1. On obtient donc :

$$X^2=U^2\frac{2+2Z}{4}+V^2\frac{2-2Z}{4}+0=\frac{U^2(1+Z)+V^2(1-Z)}{2}.$$

La linéarité de l'espérance et l'indépendance, toujours par coalitions, de U^2 et $1+Z$ d'une part, et de V^2 et $1-Z$ d'autre part, donnent l'existence du moment d'ordre deux de X et :

$$E(X^2)=\frac{E(U^2)(1+E(Z))+E(V^2)(1-E(Z))}{2}$$

La formule de Koenig-Huygens permet d'obtenir :

$$E(U^2)=V(U)+[E(U)]^2=\frac{(3+1)^2}{12}+(-1)^2=\frac{4^2}{12}+1=\frac{1}{3}+1=\frac{7}{3}$$

et de même $E(V^2)=\frac{7}{3}$ et on obtient enfin :

$$E(X^2)=\frac{\frac{7}{3}(1+E(Z)+1-E(Z))}{2}=\frac{7}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{7}{3}.$$

qui confirme à nouveau le résultat de 2.(d).

4. (a) $T(\Omega) = \{0; 1\}$ donc $(2T-1)(\Omega) = \{2 \times 0 - 1; 2 \times 1 - 1\} = \{-1; 1\}$ puis on transforme les événements :

$$(2T-1=-1) = (2T=0) = (T=0) \quad , \quad (2T-1=1) = (2T=2) = (T=1)$$

donc

$$P(2T-1=-1) = P(T=0) = 1-p \quad , \quad P(2T-1=1) = P(T=1) = p$$

et $(2T-1)$ suit la même loi que Z.

(b) On en déduit que le programme suivant simule U, V, Z et X :

```
U = rd.uniform(-3, 1)
V = rd.uniform(-1, 3)
Z = 2*rd.binomial(1, p)-1
X = U*(1+Z)/2+V*(1-Z)/2
```

Remarque : la dernière ligne, qui utilise 3.(a), peut être remplacée par la définition conditionnelle de X :

```
if Z==1:
    X = U
else:
    X = V
```

Exercice 3 (ESSEC I 2011)

1. (a) Le changement de variable $t = \alpha + (\beta - \alpha)x$ donne directement le résultat :

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta g(t)\ dt = \int_0^1 g\big(\alpha + (\beta - \alpha)x\big)\ dx.$$

(b) Avec l'égalité ci-dessus, l'encadrement cherché est équivalent à :

$$\int_0^1 g(c + (b-c)x)\ dx \leq \int_0^1 g(c + (d-c)x)\ dx \leq \int_0^1 g(a + (d-a)x)\ dx.$$

Or on a $a < c < d < b$ donc pour tout $x \in [0; 1]$ $(x \geq 0)$:

$$d < b \Longrightarrow d - c \leq b - c \Longrightarrow (d-c)x \leq (b-c)x \Longrightarrow c + (d-c)x \leq c + (b-c)x$$

et par décroissance de g,

$$g(c + (b-c)x) \leq g(c + (d-c)x).$$

En intégrant l'inégalité sur $[0; 1]$ (bornes croissantes), on obtient l'inégalité de gauche.

D'autre part, on a

$$[c + (d-c)x] - [a + (d-a)x] = (c-a) + (a-c)x = (c-a)\ (1-x) \geq 0$$

sur $[0; 1]$, car $1 - x \geq 0$ et $c - a \geq 0$. D'où

$$c + (d-c)x \geq a + (d-a)x$$

et par décroissance de g,

$$g(c + (d-c)x) \leq g(a + (d-a)x.$$

En intégrant l'inégalité sur $[0;1]$ (bornes croissantes), on obtient l'inégalité de droite.

L'encadrement

$$\int_0^1 g(c+(b-c)x)\ dx \leq \int_0^1 g(c+(d-c)x)\ dx \leq \int_0^1 g(a+(d-a)x)\ dx$$

est donc vrai et par équivalence des deux résultats, on a bien :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\ dt \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\ dt \leq \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\ dt.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lfloor x \rfloor \leq x \quad \text{donc} \quad \{x\} = \lfloor x \rfloor - x \geq 0.$$

D'où pour tout $y < 0$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\{X\} \leq y) = 0$$

car c'est un évènement impossible.
D'autre part, on a

$$x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{donc} \quad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor < 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où pour tout $y \geq 1$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$$

car c'est un évènement certain.

3. On transforme l'évènement par équivalence :

$$Y = 0 \Leftrightarrow \{X\} = 0 \Leftrightarrow X - \lfloor X \rfloor = 0 \Leftrightarrow X = \lfloor X \rfloor \Leftrightarrow X \in \mathbb{Z}.$$

De plus on sait que X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc ne peut être négatif, ce qui donne :

$$Y = 0 \Leftrightarrow X \in \mathbb{N}.$$

On en déduit bien que

$$(Y = 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = n).$$

La réunion est incompatible, on en déduit (X est à densité) :

$$P(Y = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

Enfin $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P((Y < 0) \cup (Y = 0)) = P(Y < 0) + P(Y = 0) = 0 + 0 = 0$.

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0,1[$.

   (a) Avec le système complet d'évènements $(\lfloor X \rfloor = n)_{n \in \mathbb{N}}$, les probabilités totales donnent :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X - \lfloor X \rfloor \leq y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left[(X - \lfloor X \rfloor \leq y) \cap (\lfloor X \rfloor = n)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left[(X \leq n + y) \cap (\lfloor X \rfloor = n)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left[(X \leq n+y) \cap (n \leq X < n+1)\right] \end{aligned}$$

   Or a a supposé que $y < 1$, donc $n + y < n + 1$ enfin :

$$(X \leq n + y) \cap (X < n + 1) = (X \leq n + y)$$

   ce qui donne (X est à densité et sa densité est f) :

$$F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leq X \leq n + y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt.$$

(b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n < n+y < n+1$ et f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en appliquant le préliminaire avec $c = n$, $b = n+1$ et $d = n+y$:

$$\frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1} f(t)\ dt \leq \frac{1}{n+y-n}\int_n^{n+y} f(t)\ dt$$

donc

$$y\int_n^{n+1} f(t)\ dt \leq \int_n^{n+y} f(t)\ dt.$$

• Pour tout $n \geq 1$ on a $n-1+y < n < n+y$ car $0 < y < 1$ et f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en appliquant le préliminaire avec $c = n$, $a = n-1+y$ et $d = n+y$:

$$\frac{1}{n+y-n}\int_n^{n+y} f(t)\ dt \leq \frac{1}{n+y-(n-1+y)}\int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt$$

donc

$$\int_n^{n+y} f(t)\ dt \leq y\int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt.$$

(c) On somme de 0 à $+\infty$ la première inégalité du b) :

$$y\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+y} f(t)\ dt = F_Y(y).$$

Pour l'inégalité de droite, on somme la deuxième inégalité du b) pour n allant de 1 à $+\infty$:

$$y\int_y^{+\infty} f(t)\ dt \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+y} f(t)\ dt.$$

Enfin, on ajoute $\displaystyle\int_0^y f(t)\ dt$ des deux côtés et on obtient :

$$\int_0^y f(t)\ dt + y\int_y^{+\infty} f(t)\ dt \geq F_Y(y)$$

ce qui donne bien :

$$y\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \leq F_Y(y) \leq \int_0^y f(t)dt + y\int_y^{+\infty} f(t)\ dt.$$

De plus X est à valeurs positives donc :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = P(X \geq 0) = 1 \quad \text{et l'inégalité de gauche donne} \quad y \leq F_Y(y).$$

De plus on a

$$\int_y^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt - \int_0^y f(t)\ dt = 1 - \int_0^y f(t)\ dt \leq 1$$

par positivité de l'intégrale; en effet $f(t) \geq 0$ et les bornes sont dans l'ordre croissant donc $\displaystyle\int_0^y f(t)\ dt \geq 0$. On en déduit que

$$F_Y(y) \leq \int_0^y f(t)\ dt + y.$$

Enfin on a pour tout $t \in [0; y]$, par décroissance de f, $f(t) \leq f(0) = M$ donc en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$\int_0^y f(t)\ dt \leq \int_0^y M dt = My \leq M \quad \text{car} \quad y \leq 1.$$

Cela donne bien $F_Y(y) \leq y + M$, puis :

$$y \leq F_Y(y) \leq y + M.$$

5. g_λ est une fonction à valeurs positives, continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, il reste à vérifier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt$ converge et vaut 1. Par relation de Chasles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt = \int_{-\infty}^{1} 0\ dt + \int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}}\ dt$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\ dt$ converge et vaut 0. La deuxième intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$ et pour $x \geq 1$,

$$\int_1^x g_\lambda(t)\ dt = \left[\frac{\lambda t^{-\lambda}}{-\lambda}\right]_1^x = -\frac{1}{x^\lambda} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

car $\lambda > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\lambda = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\lambda} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt$ converge et vaut 1, et g_λ est une densité de probabilité.

6. Pour tout $x < 1$,

$$G_\lambda(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0.$$

Pour tout $x \geq 1$,

$$G_\lambda(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{1} 0\ dt + \int_1^x \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}}\ dt = 0 + \left[\frac{\lambda t^{-\lambda}}{-\lambda}\right]_1^x = -\frac{1}{x^\lambda} + 1.$$

On rassemble :

$$G_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^\lambda} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

7. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= P(X_\lambda \leq x) = P(\log(Z_\lambda) \leq x) = P\left(\frac{\ln(Z_\lambda)}{\ln(10)} \leq x\right) \\ &= P\left(\ln(Z_\lambda) \leq x \ln(10)\right) = P\left(Z_\lambda \leq e^{x \ln(10)}\right) \quad \text{(par croissance de exp)} \\ &= P\left(Z_\lambda \leq 10^x\right) = G_\lambda\big(10^x\big). \end{aligned}$$

(b) On en déduit que :

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 10^x < 1 \\ 1 - \frac{1}{(10^x)^\lambda} & \text{si } 10^x \geq 1. \end{cases}$$

On résout les inéquations (avec $\ln(10) > 0$ car $10 > e$) :

$$10^x < 1 \Leftrightarrow x \ln(10) < \ln(1) \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{donc} \quad 10^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Enfin on a calcule $(10^x)^\lambda = 10^{\lambda x} = e^{\lambda x \ln 10}$ et on obtient :

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-[\lambda \ln(10)]x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

et X_λ suit donc une loi exponentielle de paramètre $\lambda \ln(10)$.

8. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \ln(10) e^{-\lambda \ln 10 x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de X_λ, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue, décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ donc les résultats de la partie I s'appliquent.

On en déduit que pour tout $y \in]0;1[$,

$$y \leq F_{Y_\lambda}(y) \leq y + f(0) = y + \lambda \ln 10.$$

Or $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \lambda \ln(10) = 0$ donc par encadrement,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} F_{Y_\lambda}(y) = \lim_{\lambda \to 0^+} P(Y_\lambda \leq y) = y.$$

Il reste à prouver que :

$$\forall y \in]-\infty; 0], \quad \lim_{\lambda \to 0^+} P(Y_\lambda \leq y) = 0 \quad \text{ et } \quad \forall y \in [1; +\infty[, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} P(Y_\lambda \leq y) = 1.$$

Or la partie I (question 2) montre que la fonction de répartition de Y_λ vérifie exactement ces deux propriétés (nulle sur $\mathbb{R}^-$ et égale à 1 sur $[1; +\infty[$).

En passant à la limite pour $\lambda \to 0$ on obtient le résultat.

D'où en posant une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} F_{Y_\lambda}(y) = F_Y(y)$$

et Y_λ converge en loi vers Y quand λ tend vers 0 par valeurs positives.

9. (a) $\alpha(x) = k$ signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \times 10^n \leq x < (k+1) \times 10^n$$

(où $n = 0$ si $1 \leq x < 10$, 1 si $10 \leq x < 100$, 2 si $100 \leq x < 1000$, etc...)
D'où, par croissance de ln,

$$\begin{aligned} \alpha(x) = k \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \ln(k) + n \ln(10) \leq \ln(x) < \ln(k+1) + n \ln(10) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\ln(k)}{\ln(10)} + n \leq \frac{\ln(x)}{\ln(10)} < \frac{\ln(k+1)}{\ln(10)} + n \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \log(k) + n \leq \log(x) < \log(k+1) + n \end{aligned}$$

Montrons alors que n est la partie entière de $\log(x)$: Pour tout $k \in [\![1; 9]\!]$,

$$\log(1) = 0 \leq \log(k) \leq \log(9) = \frac{\ln(9)}{\ln(10)} < 1.$$

Donc d'une part, $\log(x) \geq n$ car $\log(k) \geq 0$.
D'autre part pour tout $k \in [\![1; 9]\!]$, $\log(k+1) \leq \log(10) = 1$ donc $\log(x) < n + 1$.
On obtient que

$$n \leq \log(x) < n + 1 \quad \text{ et } \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{ donc } \quad n = \lfloor \log(x) \rfloor.$$

En remplaçant on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha(x) = k \quad &\Leftrightarrow \quad \log(k) + \lfloor \log(x) \rfloor \leq \log(x) < \log(k+1) + \lfloor \log(x) \rfloor \\ &\Leftrightarrow \quad \log(k) \leq \log(x) - \lfloor \log(x) \rfloor < \log(k+1) \\ &\Leftrightarrow \quad \log(k) \leq \{\log(x)\} < \log(k+1) \Leftrightarrow \{\log(x)\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $\lambda > 0$ et tout $k \in [\![1;9]\!]$ on a :

$$\begin{aligned} P(C_\lambda = k) &= P(\alpha(Z_\lambda) = k) = P(\log(k) \leq \{\log(Z_\lambda)\} < \log(k+1)) \\ &= P(\log(k) \leq Y_\lambda < \log(k+1)) = P(\log(k) < Y_\lambda \leq \log(k+1)) \\ &= F_{Y_\lambda}(\log(k+1)) - F_{Y_\lambda}(\log(k)), \end{aligned}$$

en utilisant que Y_λ est à densité à l'avant dernière égalité (ceci n'a pas été prouvé dans le sujet et il faudrait a priori l'admettre... pour une preuve que la partie fractionnaire d'une loi exponentielle de paramètre 1 est une loi à densité, voir l'exercice 11 TD 13).

Or Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ lorsque λ tend vers 0^+ donc

$$\lim_{\lambda \to 0^+} F_{Y_\lambda}(\log(k+1)) - F_{Y_\lambda}(\log(k)) = F_Y(\log(k+1)) - F_Y(\log(k))$$

Comme $k \in [\![1;9]\!]$, on a vu que $0 \leq \log(k) \leq 1$ donc

$$F_Y(\log(k)) = \log(k) \quad \text{et} \quad F_Y(\log(k+1)) = \log(k+1).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0^+} P(C_\lambda = k) &= \log(k+1) - \log(k) = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)} = \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(10)} \\ &= \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$
