

Applications linéaires

Exercice 1

/

Exercice 2

/

Exercice 3

/

Exercice 4

1. \Rightarrow : Supposons que $g \circ f = 0$. Montrons que $Im(f) \subset Ker(g)$.

Soit $y \in Im(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On a alors : $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$ donc $y \in Ker(g)$.

On a donc $Im(f) \subset Ker(g)$.

\Leftarrow : Supposons que $Im(f) \subset Ker(g)$. Montrons que $g \circ f = 0$.

Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in Im(f)$. Comme $Im(f) \subset Ker(g)$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = 0$ donc $g \circ f = 0$.

On a donc montré que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$.

2. \Rightarrow : Supposons que $Ker(g \circ f) = Ker(f)$. Montrons que $Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$.

$0 \in Im(f)$ et $0 \in Ker(g)$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0 \in Im(f) \cap Ker(g)$.

Ainsi $\{0\} \subset Im(f) \cap Ker(g)$.

Soit $y \in Im(f) \cap Ker(g)$. Comme $y \in Im(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in Ker(g)$, $g(y) = 0$. Alors $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = 0$ donc $x \in Ker(g \circ f) = Ker(f)$. Donc $y = f(x) = 0$. Ainsi, $Im(f) \cap Ker(g) \subset \{0\}$.

On a donc $Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$.

\Leftarrow : Supposons que $Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$. Montrons que $Ker(g \circ f) = Ker(f)$.

Soit $x \in Ker(f)$. Alors $f(x) = 0$. Comme g est linéaire, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$. Donc $x \in Ker(g \circ f)$ et $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.

Soit $x \in Ker(g \circ f)$. Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in Ker(g)$. Comme $f(x) \in Im(f)$, $f(x) \in Ker(g) \cap Im(f) = \{0\}$. Donc $f(x) = 0$ et $x \in Ker(f)$. Ainsi, $Ker(g \circ f) \subset Ker(f)$.

Finalement, $Ker(g \circ f) = Ker(f)$.

On a donc montré que $Ker(g \circ f) = Ker(f) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{0\}$.

Exercice 5

1. (a) Soit $i \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \text{Ker}(f^i)$. Alors $f^i(x) = 0$. En composant par f qui est une application linéaire, $f^{i+1}(x) = f(f^i(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(f^{i+1})$.

(b) Méthode 1 : (par récurrence)

Notons $\mathcal{P}(i)$ la propriété : " $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$ ".

Ini. Par hypothèse, $\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+1})$ donc $\mathcal{P}(r)$ est vraie.

Héré. Soit $i \geq r$. Supposons que $\mathcal{P}(i)$ est vraie.

On sait déjà que $\text{Ker}(f^{i+1}) \subset \text{Ker}(f^{i+2})$ avec la question 1.(a).

Soit $x \in \text{Ker}(f^{i+2})$. Donc $f^{i+2}(x) = 0$. Comme $f^{i+2}(x) = f^{i+1}(f(x)) = 0$, $f(x) \in \text{Ker}(f^{i+1}) = \text{Ker}(f^i)$ par hypothèse de récurrence. Donc $f^{i+1}(x) = f^i(f(x)) = 0$. Ainsi, $x \in \text{Ker}(f^{i+1})$.

On a donc $\text{Ker}(f^{i+1}) = \text{Ker}(f^{i+2})$ et $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $i \geq r$, $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$.

Méthode 2 : (sans récurrence)

Soit $i \geq r$. On sait déjà que $\text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1})$ avec la question 1.(a).

Soit $x \in \text{Ker}(f^{i+1})$. Alors $f^{i+1}(x) = 0$ donc $f^{r+1}(f^{i-r}(x)) = 0$ et $f^{i-r}(x) \in \text{Ker}(f^{r+1})$. Comme $\text{Ker}(f^{r+1}) \subset \text{Ker}(f^r)$, $f^{i-r}(x) \in \text{Ker}(f^r)$ et donc $f^i(x) = f^r(f^{i-r}(x)) = 0$. Ainsi $x \in \text{Ker}(f^i)$ et on a bien démontré que $\text{Ker}(f^{i+1}) \subset \text{Ker}(f^i)$.

Finalement $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$, et ceci pour tout $i \geq r$.

(c) i. D'après la question 1.(a), $\text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1})$. Donc $\dim(\text{Ker}(f^i)) \leq \dim(\text{Ker}(f^{i+1}))$, c'est-à-dire $d_i \leq d_{i+1}$. La suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

ii. Par l'absurde, supposons que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, d_i \neq d_{i+1}$.

La suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ étant croissante, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, d_i < d_{i+1}$. Comme (d_i) est une famille strictement croissante d'entiers positifs, $d_i \geq i$.

En particulier, $d_{n+1} \geq n+1$.

Or par définition, $\text{Ker}(f^{n+1}) \subset E$ donc $d_{n+1} = \dim(\text{Ker}(f^{n+1})) \leq n$. On a donc une contradiction.

Donc il existe bien $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $d_r = d_{r+1}$.

iii. D'après la question 1.(a), $\text{Ker}(f^r) \subset \text{Ker}(f^{r+1})$. D'après la question précédente, $d_r = \dim(\text{Ker}(f^r)) = d_{r+1} = \dim(\text{Ker}(f^{r+1}))$. Donc $\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+1})$.

Avec la question 1.(b), on en déduit que pour tout $i \geq r$, $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$ donc $d_i = \dim(\text{Ker}(f^i)) = \dim(\text{Ker}(f^{i+1})) = d_{i+1}$.

La suite (d_i) est donc stationnaire.

(d) i. Soit $j \in \mathbb{N}$.

Soit $y \in \text{Im}(f^{j+1})$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{j+1}(x)$. Alors $y = f^j(f(x))$ donc $y \in \text{Im}(f^j)$.

On a donc bien que : $\forall j \in \mathbb{N}, \text{Im}(f^{j+1}) \subset \text{Im}(f^j)$.

ii. Méthode 1 : (par récurrence)

Notons $\mathcal{P}(j)$ la propriété : " $\text{Im}(f^j) = \text{Im}(f^{j+1})$ ".

Ini. Par hypothèse, $\text{Im}(f^s) = \text{Im}(f^{s+1})$ donc $\mathcal{P}(s)$ est vraie.

Héré. Soit $j \geq s$. Supposons que $\mathcal{P}(j)$ est vraie.

On sait déjà que $\text{Im}(f^{j+2}) \subset \text{Im}(f^{j+1})$ avec la question 2.(a).

Soit $y \in \text{Im}(f^{j+2})$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{j+2}(x)$. Donc $y = f(f^{j+1}(x))$. Or $f^{j+1}(x) \in \text{Im}(f^j) = \text{Im}(f^{j+1})$ par hypothèse de récurrence. Donc il existe $z \in E$ tel que $f^{j+1}(x) = f^{j+1}(z)$. On a alors $y = f(f^{j+1}(x)) = f(f^{j+1}(z)) = f^{j+2}(z) \in \text{Im}(f^{j+2})$. Ainsi, $y \in \text{Im}(f^{j+2})$.

On a donc $\text{Im}(f^{j+1}) = \text{Im}(f^{j+2})$ et $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $j \geq s$, $\text{Im}(f^j) = \text{Im}(f^{j+1})$.

Méthode 2 : (sans récurrence)

Soit $j \geq s$. On sait déjà que $\text{Im}(f^{j+1}) \subset \text{Im}(f^j)$ avec la question 2.(a).

Soit $y \in \text{Im}(f^j)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^j(x)$. Alors $y = f^{j-s}(f^s(x))$ et $f^s(x) \in \text{Im}(f^s)$. Comme $\text{Im}(f^s) = \text{Im}(f^{s+1})$, $f^s(x) \in \text{Im}(f^{s+1})$ et donc il existe $z \in E$ tel que $f^s(x) = f^{s+1}(z)$. On a alors $y = f^{j-s}(f^s(x)) = f^{j-s}(f^{s+1}(z)) = f^{j+1}(z)$ donc $y \in \text{Im}(f^{j+1})$. On a donc montré que $\text{Im}(f^j) \subset \text{Im}(f^{j+1})$.

Finalement, $\text{Im}(f^j) = \text{Im}(f^{j+1})$, et ceci pour tout $j \geq s$.

- (e) i. D'après la question 2.(a), $\text{Im}(f^{j+1}) \subset \text{Im}(f^j)$. Donc $\dim(\text{Im}(f^{j+1})) \leq \dim(\text{Im}(f^j))$, c'est-à-dire $m_{j+1} \leq m_j$. La suite $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.
- ii. En appliquant le théorème du rang à $f^r \in \mathcal{L}(E)$, on obtient :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f^r)) + \dim(\text{Im}(f^r)).$$

Donc $n = d_r + m_r$.

De la même façon, en appliquant le théorème du rang à $f^{r+1} \in \mathcal{L}(E)$, on obtient :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f^{r+1})) + \dim(\text{Im}(f^{r+1})).$$

Donc $n = d_{r+1} + m_{r+1}$.

Comme $d_r = d_{r+1}$, $m_r = n - d_r = n - d_{r+1} = m_{r+1}$.

- iii. D'après la question 2.(a), $\text{Im}(f^{r+1}) \subset \text{Im}(f^r)$. Or avec la question précédente, $\dim(\text{Im}(f^{r+1})) = m_{r+1} = m_r = \dim(\text{Im}(f^r))$. Donc $\text{Im}(f^{r+1}) = \text{Im}(f^r)$. Avec la question 2.(b), on en déduit que pour tout $j \geq r$, $\text{Im}(f^{j+1}) = \text{Im}(f^j)$ donc $m_{j+1} = \dim(\text{Im}(f^{j+1})) = \dim(\text{Im}(f^j)) = m_j$. La suite $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est donc stationnaire.

Exercice 6

- 1. (a) Soit f un endomorphisme nilpotent. Il existe donc $k \geq 1$ tel que $f^{k-1} \neq 0$ et $f^k = 0$. Supposons par l'absurde que f est bijectif. Donc f admet une bijection réciproque f^{-1} (qui est linéaire). En composant la relation $f^k = 0$ par f^{-1} , on a :

$$f^{-1} \circ f^k = f^{-1} \circ 0 \quad \text{donc} \quad f^{k-1} = 0.$$

Ceci contredit le fait que $f^{k-1} \neq 0$. Donc f n'est pas bijectif.

- (b) Comme f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , f est bijective si et seulement si f est injective. Donc, d'après la question précédente, f n'est pas injective et $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$. Donc $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$.
- (c) Supposons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. D'après l'exercice précédent, pour tout $i \geq 1$, $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f)$. Donc, avec $i = k$, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(0) = E$. Comme $\text{Ker}(f) = E$, $f = 0$ donc f est d'indice de nilpotence $k \leq 1$. Contradiction avec l'hypothèse $k > 3$.
Supposons que $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f^3)$. D'après l'exercice précédent, pour tout $i \geq 2$, $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^2)$. Donc, avec $i = k$, $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(0) = E$. Comme $\text{Ker}(f^2) = E$, $f^2 = 0$ donc f^2 est d'indice de nilpotence $k \leq 2$. Contradiction avec l'hypothèse $k > 3$.
- (d) Avec la question 1.(b), $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$.

Avec la question 1.(c) et en utilisant l'exercice précédent, on a :

$$1 \leq \dim(\text{Ker}(f)) < \dim(\text{Ker}(f^2)) < \dim(\text{Ker}(f^3)).$$

Donc $\dim(\text{Ker}(f^3)) \geq 3$. Comme $\text{Ker}(f^3)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , $\text{Ker}(f^3) = \mathbb{R}^3$ et $f^3 = 0$.

Donc $k = 3$ ce qui contredit l'hypothèse $k > 3$. Donc $k \leq 3$.

- 2. (a) Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin \text{Ker}(f^2)$.

(b) On a déjà $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Montrons que \mathcal{B} est une famille libre. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$.

En composant par f qui est linéaire, on a : $af(x) + bf^2(x) + cf^3(x) = 0$. Or $f^3 = 0$ donc on obtient : $af(x) + bf^2(x) = 0$.

En composant une nouvelle fois par f , on a : $af^2(x) + bf^3(x) = 0$ et de même en simplifiant, $af^2(x) = 0$.

Or $f^2(x) \neq 0$, donc $af^2(x) = 0 \Rightarrow a = 0$. Donc $af(x) + bf^2(x) = 0$ donne $bf^2(x) = 0 \Rightarrow b = 0$. Donc $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$ donne $cf^2(x) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Donc \mathcal{B} est une famille libre. C'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

(c) On obtient sans calcul $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\text{Im}(f^2) = \text{Vect}(f^2(x), f^2(f(x)), f^2(f^2(x))) = \text{Vect}(f^2(x), f^3(x), f^4(x)) = \text{Vect}(f^2(x), 0, 0) = \text{Vect}(f^2(x))$. Donc $\dim(\text{Im}(f^2)) = 1$.

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x), f(f(x)), f(f^2(x))) = \text{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x)) = \text{Vect}(f(x), f^2(x), 0) = \text{Vect}(f(x), f^2(x))$. Donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Avec le théorème du rang appliqué à $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$. On a donc $\dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f))$.

Or $f^3 = 0$ donc $f \circ f^2 = 0$. D'après l'exercice 1 (question 1 avec $g = f$ et $f = f^2$), on a $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Comme $\dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f))$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$. Finalement, $\text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f)$.