Correction - AP 15

Applications linéaires

Exercice 1 (ECRICOME 2020)

1. Pour $a = 1$, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (M - I)^2 = 0.$$

2. De la relation $(M - I_3)^2 = 0$, on déduit que $(X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de M. Par conséquent, les valeurs propres de M sont incluses dans l'ensemble des racines de ce polynôme qui ne s'annule qu'en 1. Ainsi, la seule valeur propre possible pour M est 1,

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{1\}.$$

3. Comme 0 n'est pas valeur propre de M, M est inversible.

   Supposons que M est diagonalisable. Il existe alors P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Comme 1 est la seule valeur propre possible de M, alors nécessairement $D = I_3$ et $M = PI_3P^{-1} = I_3$. On aboutit à une contradiction donc M n'est pas diagonalisable.

4. Pour $a = 0$, la matrice M est alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Pour répondre à la question posée, on détermine $\mathrm{Ker}(M - I_3)$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M - I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad MX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z &= x \\ x - z &= y \\ x - y &= z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y + z \\ &\Leftrightarrow \quad X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   et on obtient $\mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

   En particulier, 1 est bien valeur propre de M, le sous-espace associé a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (la famille est génératrice et clairement libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et il est de dimension 2.

5. On montre que $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0\}$, ce qui suffit à garantir la non inversibilité de M (et dans ce cas, 0 est valeur propre de M).

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) \quad &\Leftrightarrow \quad MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z &= 0 \\ x - z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y = z \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, M n'est pas inversible, 0 est valeur propre et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre associé (car libre, un vecteur non nul, et génératrice).

6. Par concaténation des bases de $E_1(M)$ et $E_0(M)$ (valeurs propres distinctes), la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M. On peut alors conclure que M est diagonalisable et que $Sp(M) = \{0, 1\}$.

7. La famille (u, v, w) étant composée de trois vecteurs de E qui est de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre pour pouvoir conclure qu'elle en forme une base. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \alpha+\gamma & = & 0 \\ \alpha+\beta & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ainsi, la famille $\mathscr{B}'$ est bien libre et forme une base de E.

8. Le calcul donne

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ce qui permet de voir que $f(u) = au$ et $f(v) = v$. En particulier, les vecteurs u et v étant non nuls, a et 1 sont valeurs propres de f.

9. On calcule et résout

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1\\1\\a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

et donc $f(w) = av + w$ (ou encore $\alpha = a$ et $\beta = 1$).

10. Par définition de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ et ayant obtenu $f(u) = au$, $f(v) = v$, $f(w) = av + w$, on peut écrire

$$T = M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix}a&0&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

11. La matrice T étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi,

$$\text{Sp}(T) = \{a, 1\}.$$

On cherche les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres :

- Pour $E_a(T)$:

$$(T - aI_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (1-a)y+az & = & 0 \\ (1-a)z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = z = 0,$$

car $a \neq 1$. Donc $E_a(T) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ (on obtient une base car libre, un vecteur non nul, et génératrice).

- Pour $E_1(T)$:

$$(T - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (1-a)x & = & 0 \\ az & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = z = 0,$$

car $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Donc $E_1(T) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (on obtient une base car libre, un vecteur non nul, et génératrice).

12. Par concaténation (valeurs propres distinctes), on obtient une famille libre $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ de vecteurs propres de T. Ce n'est pas une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car le cardinal n'est pas égal à la dimension. Donc T n'est pas diagonalisable.

Les matrices M et T sont semblables car elle représente le même endomorphisme f. Donc M est diagonalisable si et seulement si T l'est (voir démonstration dans le chapitre 12).

Comme T n'est pas diagonalisable, M n'est donc pas non plus diagonalisable.

Exercice 2 (EDHEC 2020)

1. On vérifie les conditions successives :

- L'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Il est non vide car la matrice nulle appartient à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$: ${}^t0 = 0 = -0$.
- Pour tous $A, B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} {}^t(\lambda A + B) & = & \lambda^t A +^t B \quad \text{(par linéarité de la transposition)} \\ & = & -\lambda A - B \quad \text{(car } A \text{ et } B \text{ sont dans } \mathscr{A}_n(\mathbb{R})\text{)} \\ & = & -(\lambda A + B). \end{array}$$

Ce qui montre que $\lambda A + B$ appartient à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned} {}^tf(M) &= {}^t\left[\left({}^tA\right) M + MA\right] \\ &= {}^tM\, {}^t\left({}^tA\right) + {}^tA\, {}^tM \quad \text{(car } {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA \text{ pour tous } A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\text{)} \\ &= {}^tM\, A + {}^tA\, {}^tM \quad \text{(car } {}^t\left({}^tA\right) = A\text{)} \\ &= -MA - {}^tAM \quad \text{(car } M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})\text{)} \\ &= -\left[MA + {}^tAM\right] \\ &= -f(M). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

(b) Montrons que f est linéaire. Soient $M, N \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$ quelconques. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= {}^tA(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A \\ &= \left(\lambda^t AM + {}^tAN\right) + (\lambda MA + NA) \\ &= \lambda\left({}^tAM + MA\right) + \left({}^tAN + NA\right) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est linéaire. De plus, on a vu à la question précédente que $f(M)$ appartient à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ quel que soit M dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
Par conséquent, f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

3. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$M \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ e & = & 0 \\ i & = & 0 \\ d & = & -b \\ g & = & -c \\ h & = & -f \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ bJ + cK + fL,\ (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} = Vect(J,K,L). \end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille (J,K,L) est génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\alpha J + \beta K + \gamma L = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ce qui montre que la famille (J,K,L) est libre. On en déduit, avec le résultat de la question précédente, que c'est une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Et comme elle est constituée de 3 éléments, on a $dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = 3$.

4. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} f(J) &= {}^tAJ + JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $f(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, soit $f(J) = -J - L$.

De même :

$$\begin{aligned} f(K) &= {}^tAK + KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Et enfin

$$\begin{aligned} f(L) &= {}^tAL + LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -L$.

(b) On détermine l'image de f :

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect(f(J), f(K), f(L)) \quad \text{(car } (J,K,L) \text{ est une base de } \mathscr{A}_3(\mathbb{R})\text{)} \\ &= Vect(-J-L, 0, -L) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= Vect(-J-L, -L) \\ &= Vect(J+L, L) \quad \text{(on change les vecteurs en leurs opposés)} \\ &= Vect(J, L) \quad \text{(on soustrait le deuxième au premier)} \end{aligned}$$

Or, la famille (J, L) est libre (puisque (J, K, L) l'est).

Par conséquent, (J, L) est une base de $Im(f)$, et elle est constituée d'éléments de $\mathscr{B}$.

(c) D'après la question précédente, $dim(Im(f)) = 2$. Donc, par le théorème du rang :

$$dim(Ker(f)) = dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) - dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$$

Or, $f(K) = 0$ (cf question 4.(a)), donc K appartient à $Ker(f)$. Ainsi, la famille (K) est une famille libre (elle est constituée d'un seul vecteur non nul) constituée d'éléments de $Ker(f)$, et de cardinal $dim(Ker(f))$.

Conclusion : la famille (K) est une base de $Ker(f)$.

Remarque : on pouvait aussi chercher explicitement le noyau de f, mais c'est bien plus long. Autant réutiliser ce que l'on sait.

5. (a) D'après la question 4.(a), la matrice F de f dans la base (J, K, L) est $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) F est une matrice triangulaire inférieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire -1 et 0.

(c) Supposons F diagonalisable. Il existe donc P inversible et D diagonale telles que $F = PDP^{-1}$.

Comme $Sp(F) = \{-1, 0\}$, les coefficients diagonaux de D sont donc égaux à -1 et 0. Donc $D^2 = -D$ et finalement :

$$F^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P(-D)P^{-1} = -PDP^{-1} = -F.$$

(d) En faisant le calcul matricielle, on a :

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -F.$$

On a donc une contradiction et F n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 3 (HEC 2009)

1. (a) On calcule :

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad d(2I) = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4 \quad \text{alors que} \quad d(I) = 1.$$

Donc $d(2I) \neq 2d(I)$, et d n'est pas linéaire.

(b) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ et on a :

$$d({}^tA) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = d(A).$$

(c) Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, on a alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} d(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \times (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \times (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ &\quad - [a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}] \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \end{aligned}$$

d'une part, et d'autre part

$$\begin{aligned} d(A)d(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \times (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\ &= d(AB). \end{aligned}$$

(d) Si A et B sont semblables, il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. On obtient alors avec la commutativité du produit entre deux réels :

$$d(A) = d(PBP^{-1}) = d(P)d(B)d(P^{-1}) = d(B)d(P)d(P^{-1}) = d(BPP^{-1}) = d(B).$$

2. (a) Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

donc

$$t(\lambda A + B) = \lambda a_{11} + b_{11} + \lambda a_{22} + b_{22} = \lambda(a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = \lambda t(A) + t(B).$$

t est donc une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Avec la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on obtient :

$$Im(t) = Vect[(1), (0), (0), (1)] = Vect[(1)] = \mathbb{R}$$

donc $Im(t)$ est de dimension 1, et par théorème du rang,

$$dim(Ker(t)) = dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - dim(Im(t)) = 4 - 1 = 3.$$

De plus,

$$A \in Ker(t) \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} = 0 \Leftrightarrow a_{22} = -a_{11} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \text{ où } (a_{11}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi,

$$Ker(t) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} ; (a_{11}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de 3 vecteurs génératrice d'un espace de dimension 3 donc c'est une base de cet espace.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ donc $t({}^tA) = a_{11} + a_{22} = t(A)$.

(c) Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad t(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

d'une part, et d'autre part

$$BA = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \text{ donc } t(BA) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

On obtient des résultats égaux, donc pour touts A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$t(AB) = t(BA).$$

(d) Si A et B sont semblables, $A = PBP^{-1}$ et on peut écrire :

$$t(A) = t([PB]P^{-1}) = t(P^{-1}[PB]) = t(B).$$

3. (a) Comme A et I sont deux matrices non colinéaires, elles forment une famille libre et α et β, si ils existent, sont uniques.

Reste à démontrer l'existence : soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}\left(a_{11} + a_{22}\right) \\ a_{21}\left(a_{11} + a_{22}\right) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \beta + \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{11} \\ a_{12}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{12} \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{21} \\ a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{22} \end{cases}$$

Comme on a déjà prouvé l'unicité, on peut se contenter d'exhiber une solution, sans raisonner par équivalence. On pose alors par identification

$$\alpha = a_{11} + a_{22} = t(A)$$

qui assure que les équations 2 et 3 sont vérifiées et :

$$\begin{aligned} \beta &= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{11} = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}\left(a_{11} + a_{22}\right) \\ &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -d(A) \end{aligned}$$

qui assure la première équation, et enfin on vérifie que la quatrième est vérifiée :

$$\begin{aligned}\beta+\alpha a_{22} &= a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}+a_22(a_{11}+a_{22}) = a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}+a_{22}a_{11}+a_{22}^2\\ &= a_{22}^2+a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

donc $\alpha = t(A)$ et $\beta = -d(A)$ constituent une solution unique du système.

(b) On a obtenu

$$\alpha = t(A) \quad \text{et} \quad \beta = -d(A) \quad \text{donc} \quad A^2 = t(A)A - d(A)I.$$

4. (a) Supposons qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $u(e_1) = \alpha e_1$, $u(e_2) = \beta e_2$ et $u(w) = \gamma w$. On peut alors écrire :

$$u(e_1) = \alpha e_1 \quad , \quad u(e_2) = \beta e_2 \quad \text{et} \quad u(e_1+e_2) = \gamma(e_1+e_2) = \gamma e_1 + \gamma e_2$$

Mais par linéarité on a également :

$$u(e_1+e_2) = u(e_1)+u(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2.$$

Donc :

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = \gamma e_1 + \gamma e_2 \Leftrightarrow (\alpha-\gamma)e_1 + (\beta-\gamma)e_2 = 0.$$

Donc par liberté de la famille (e_1, e_2), on obtient que

$$\alpha = \gamma \quad \text{et} \quad \beta = \gamma.$$

Ainsi, dans la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, la matrice de u est αI_2. Par la formule de changement de base, on a donc :

$$A = P\alpha I_2 P^{-1} = \alpha PP^{-1} = \alpha I_2,$$

ce qui est absurde car A et I_2 ne sont pas colinéaires.

(b) L'un de ces trois vecteurs, noté x, est non nul (ils sont tous les trois non nul) et non colinéaire à $u(x)$.
Donc la famille $(x, u(x))$ est libre. Comme cette famille est de cardinal 2, égal à la dimension de $\mathbb{R}^2$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

(c) On cherche la matrice dans cette base, on a :

$$u(x) = 0x + 1u(x) \quad \text{et} \quad u(u(x)) = u^2(x) = (t(A)u - d(A)Id)(x) = -d(A)x + t(A)u(x)$$

car $A^2 = t(A)A - d(A)I$ et A est une matrice de u. Enfin on en déduit que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}.$$

(d) A est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$.
Or ${}^tA$ n'est pas colinéaire à I non plus, sinon $A = {}^t({}^tA) = {}^t(\lambda I) = \lambda {}^tI = \lambda I$ ce qui est absurde.
On en déduit que ${}^tA$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -d({}^tA) \\ 1 & t({}^tA) \end{pmatrix}$.
Enfin, avec les questions 1.(b) et 2.(b), on a $d({}^tA) = d(A)$ et $t({}^tA) = t(A)$ donc A et ${}^tA$ sont semblables à la même matrice.
Montrons que A et ${}^tA$ sont semblables. Comme $A = PMP^{-1}$ et ${}^tA = QMQ^{-1}$, on a :

$$A = P(Q^{-1}({}^tA)Q)P^{-1} = (PQ^{-1}){}^tA(QP^{-1}) = (PQ^{-1}){}^tA(PQ^{-1})^{-1}$$

car

$$(PQ^{-1})(QP^{-1}) = PQQ^{-1}P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$

5. (a) L'ensemble est défini sous forme implicite, on utilise la caractérisation des sous-espaces :
   - $\mathcal{C}(A) \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   - La matrice nulle est élément de $\mathcal{C}(A)$ car $A0 = 0A = 0$.
   - Si B_1 et B_2 appartiennent à $\mathcal{C}(A)$ et λ est un réel, on a :
   $$AB_1 = B_1A \quad \text{et} \quad AB_2 = B_2A$$
   donc :
   $$A(\lambda B_1 + B_2) = \lambda AB_1 + AB_2 = \lambda B_1 A + B_2 A = (\lambda B_1 + B_2)A$$
   et $(\lambda B_1 + B_2) \in \mathcal{C}(A)$ qui est donc stable par combinaison linéaire.

   On en déduit que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Si A est colinéaire à I alors toute matrice commute avec A et $\mathcal{C}(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, et la base canonique bien connue en est une base.

   Si A n'est pas colinéaire avec I alors il existe P inversible telle que $A = PMP^{-1}$, où
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$$
   On peut alors écrire :
   $$AB = BA \Leftrightarrow PMP^{-1}B = BPMP^{-1} \Leftrightarrow M(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)M.$$
   Soit alors $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & a \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on résout :
   $$\begin{aligned}
   MN = NM \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} -d(A)z = y \\ -d(A)a = -d(A)x + t(A)y \\ x + t(A)z = a \\ y + t(A)a = -d(A)z + t(A)a \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -d(A)z \\ -d(A)a = -d(A)x - t(A)d(A)z \\ x + t(A)z = a \\ -d(A)z + t(A)a = -d(A)z + t(A)a \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -d(A)z \\ d(A)(-a + a - t(A)z + t(A)z) = 0 \\ x = a - t(A)z \\ 0 = 0 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -d(A)z \\ 0 = 0 \\ x = a - t(A)z \\ 0 = 0 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} a - t(A)z & -d(A)z \\ z & a \end{pmatrix} = aI + z\begin{pmatrix} -t(A) & -d(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
   \end{aligned}$$
   donc
   $$MN = NM \Leftrightarrow N \in Vect[I, M - t(A)I] = Vect[I, M]$$
   et on en déduit finalement que :
   $$B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow P^{-1}BP = \alpha I + \beta M \Leftrightarrow B = \alpha PIP^{-1} + \beta PMP^{-1} = \alpha I + \beta A$$
   donc
   $$\mathcal{C}(A) = Vect[I, A]$$
   et la famille (I, A) est libre (2 vecteurs non colinéaires) et génératrice de $\mathcal{C}(A)$, c'est donc une base de $\mathcal{C}(A)$ et $dim[\mathcal{C}(A)] = 2$.