

**Applications linéaires**

**Exercice 1 (ECRICOME 2020)**

1. Pour  $a = 1$ , on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (M - I)^2 = 0.$$

2. De la relation  $(M - I_3)^2 = 0$ , on déduit que  $(X - 1)^2$  est un polynôme annulateur de  $M$ . Par conséquent, les valeurs propres de  $M$  sont incluses dans l'ensemble des racines de ce polynôme qui ne s'annule qu'en 1. Ainsi, la seule valeur propre possible pour  $M$  est 1,

$$\text{Sp}(M) \subset \{1\}.$$

3. Comme 0 n'est pas valeur propre de  $M$ ,  $M$  est inversible.

Supposons que  $M$  est diagonalisable. Il existe alors  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $M = PDP^{-1}$ . Comme 1 est la seule valeur propre possible de  $M$ , alors nécessairement  $D = I_3$  et  $M = PI_3P^{-1} = I_3$ . On aboutit à une contradiction donc  $M$  n'est pas diagonalisable.

4. Pour  $a = 0$ , la matrice  $M$  est alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour répondre à la question posée, on détermine  $\text{Ker}(M - I_3)$ :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M - I_3) &\Leftrightarrow MX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = x \\ x - z = y \\ x - y = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y + z \\ &\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient  $\text{Ker}(M - I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

En particulier, 1 est bien valeur propre de  $M$ , le sous-espace associé a pour base  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(la famille est génératrice et clairement libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et il est de dimension 2.

5. On montre que  $\text{Ker}(M) \neq \{0\}$ , ce qui suffit à garantir la non inversibilité de  $M$  (et dans ce cas, 0 est valeur propre de  $M$ ).

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M) &\Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker}(M) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $M$  n'est pas inversible, 0 est valeur propre et  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base du sous-espace propre associé (car libre, un vecteur non nul, et génératrice).

6. Par concaténation des bases de  $E_1(M)$  et  $E_0(M)$  (valeurs propres distinctes), la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , c'est donc une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $M$ . On peut alors conclure que  $M$  est diagonalisable et que  $\text{Sp}(M) = \{0, 1\}$ .

7. La famille  $(u, v, w)$  étant composée de trois vecteurs de  $E$  qui est de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre pour pouvoir conclure qu'elle en forme une base. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . On a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ainsi, la famille  $\mathcal{B}'$  est bien libre et forme une base de  $E$ .

8. Le calcul donne

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de voir que  $f(u) = au$  et  $f(v) = v$ . En particulier, les vecteurs  $u$  et  $v$  étant non nuls,  $a$  et 1 sont valeurs propres de  $f$ .

9. On calcule et résout

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc  $f(w) = aw + w$  (ou encore  $\alpha = a$  et  $\beta = 1$ ).

10. Par définition de la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  et ayant obtenu  $f(u) = au$ ,  $f(v) = v$ ,  $f(w) = aw + w$ , on peut écrire

$$T = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. La matrice  $T$  étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi,

$$\text{Sp}(T) = \{a, 1\}.$$

On cherche les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres :

- Pour  $E_a(T)$  :

$$(T - aI_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)y + az = 0 \\ (1-a)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0,$$

car  $a \neq 1$ . Donc  $E_a(T) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  (on obtient une base car libre, un vecteur non nul, et génératrice).

- Pour  $E_1(T)$  :

$$(T - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x = 0 \\ az = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = z = 0,$$

car  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ . Donc  $E_1(T) = Vect \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  (on obtient une base car libre, un vecteur non nul, et génératrice).

12. Par concaténation (valeurs propres distinctes), on obtient une famille libre  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  de vecteurs propres de  $T$ . Ce n'est pas une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  car le cardinal n'est pas égal à la dimension. Donc  $T$  n'est pas diagonalisable.

Les matrices  $M$  et  $T$  sont semblables car elle représente le même endomorphisme  $f$ . Donc  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $T$  l'est (voir démonstration dans le chapitre 12).

Comme  $T$  n'est pas diagonalisable,  $M$  n'est donc pas non plus diagonalisable.

### Exercice 2 (EDHEC 2020)

1. On vérifie les conditions successives :

- L'ensemble  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est inclus dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par définition.
- Il est non vide car la matrice nulle appartient à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  :  ${}^t0 = 0 = -0$ .
- Pour tous  $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + B) &= \lambda {}^tA + {}^tB \quad (\text{par linéarité de la transposition}) \\ &= -\lambda A - B \quad (\text{car } A \text{ et } B \text{ sont dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\ &= -(\lambda A + B). \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\lambda A + B$  appartient à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

2. (a) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned} {}^t f(M) &= {}^t [({}^tA)M + MA] \\ &= {}^tM {}^t({}^tA) + {}^tA {}^tM \quad (\text{car } {}^t(AB) = {}^tB {}^tA \text{ pour tous } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ &= {}^tM A + {}^tA {}^tM \quad (\text{car } {}^t({}^tA) = A) \\ &= -MA - {}^tAM \quad (\text{car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\ &= -[MA + {}^tAM] \\ &= -f(M). \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $f(M)$  est une matrice antisymétrique.

- (b) Montrons que  $f$  est linéaire. Soient  $M, N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^2$  quelconques. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= {}^tA(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A \\ &= (\lambda {}^tAM + {}^tAN) + (\lambda MA + NA) \\ &= \lambda ({}^tAM + MA) + ({}^tAN + NA) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $f$  est linéaire. De plus, on a vu à la question précédente que  $f(M)$  appartient à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  quel que soit  $M$  dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

Par conséquent,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

3. (a) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On a les équivalences suivantes :

$$M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \\ i = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{ bJ + cK + fL, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \} = \text{Vect}(J, K, L). \end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille  $(J, K, L)$  est génératrice de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ .

- (b) Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ . On a les équivalences suivantes :

$$\alpha J + \beta K + \gamma L = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ce qui montre que la famille  $(J, K, L)$  est libre. On en déduit, avec le résultat de la question précédente, que c'est une base de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ . Et comme elle est constituée de 3 éléments, on a  $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$ .

4. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} f(J) &= {}^tAJ + JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne :  $f(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , soit  $f(J) = -J - L$ .

De même :

$$\begin{aligned} f(K) &= {}^tAK + KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne :  $f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ .

Et enfin

$$\begin{aligned} f(L) &= {}^tAL + LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne :  $f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -L.$

(b) On détermine l'image de  $f$  :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) \quad (\text{car } (J, K, L) \text{ est une base de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) \\ &= \text{Vect}(-J - L, 0, -L) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \text{Vect}(-J - L, -L) \\ &= \text{Vect}(J + L, L) \quad (\text{on change les vecteurs en leurs opposés}) \\ &= \text{Vect}(J, L) \quad (\text{on soustrait le deuxième au premier}) \end{aligned}$$

Or, la famille  $(J, L)$  est libre (puisque  $(J, K, L)$  l'est).

Par conséquent,  $(J, L)$  est une base de  $\text{Im}(f)$ , et elle est constituée d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

(c) D'après la question précédente,  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ . Donc, par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$$

Or,  $f(K) = 0$  (cf question 4.(a)), donc  $K$  appartient à  $\text{Ker}(f)$ . Ainsi, la famille  $(K)$  est une famille libre (elle est constituée d'un seul vecteur non nul) constituée d'éléments de  $\text{Ker}(f)$ , et de cardinal  $\dim(\text{Ker}(f))$ .

Conclusion : la famille  $(K)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ .

Remarque : on pouvait aussi chercher explicitement le noyau de  $f$ , mais c'est bien plus long. Autant réutiliser ce que l'on sait.

5. (a) D'après la question 4.(a), la matrice  $F$  de  $f$  dans la base  $(J, K, L)$  est  $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(b)  $F$  est une matrice triangulaire inférieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire  $-1$  et  $0$ .

(c) Supposons  $F$  diagonalisable. Il existe donc  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $F = PDP^{-1}$ .

Comme  $\text{Sp}(F) = \{-1, 0\}$ , les coefficients diagonaux de  $D$  sont donc égaux à  $-1$  et  $0$ . Donc  $D^2 = -D$  et finalement :

$$F^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P(-D)P^{-1} = -PDP^{-1} = -F.$$

(d) En faisant le calcul matricielle, on a :

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -F.$$

On a donc une contradiction et  $F$  n'est donc pas diagonalisable.

**Exercice 3 (HEC 2009)**

1. (a) On calcule :

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad d(2I) = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4 \quad \text{alors que} \quad d(I) = 1.$$

Donc  $d(2I) \neq 2d(I)$ , et  $d$  n'est pas linéaire.

(b) Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  et on a :

$$d({}^tA) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = d(A).$$

(c) Soient  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ , on a alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} d(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \times (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \times (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ &\quad - [a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}] \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \end{aligned}$$

d'une part, et d'autre part

$$\begin{aligned} d(A)d(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \times (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\ &= d(AB). \end{aligned}$$

(d) Si  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ . On obtient alors avec la commutativité du produit entre deux réels :

$$d(A) = d(PBP^{-1}) = d(P)d(B)d(P^{-1}) = d(B)d(P)d(P^{-1}) = d(BPP^{-1}) = d(B).$$

2. (a) Soient  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

donc

$$t(\lambda A + B) = \lambda a_{11} + b_{11} + \lambda a_{22} + b_{22} = \lambda(a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = \lambda t(A) + t(B).$$

$t$  est donc une application linéaire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .

Avec la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on obtient :

$$Im(t) = Vect[(1), (0), (0), (1)] = Vect[(1)] = \mathbb{R}$$

donc  $Im(t)$  est de dimension 1, et par théorème du rang,

$$dim(Ker(t)) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - dim(Im(t)) = 4 - 1 = 3.$$

De plus,

$$A \in \text{Ker}(t) \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} = 0 \Leftrightarrow a_{22} = -a_{11} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \text{ où } (a_{11}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi,

$$\text{Ker}(t) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}; (a_{11}, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est une famille de 3 vecteurs génératrice d'un espace de dimension 3 donc c'est une base de cet espace.

(b) Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  alors  ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  donc  $t({}^tA) = a_{11} + a_{22} = t(A)$ .

(c) Soient  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \text{ donc } t(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

d'une part, et d'autre part

$$BA = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \text{ donc } t(BA) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

On obtient des résultats égaux, donc pour tous  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$t(AB) = t(BA).$$

(d) Si  $A$  et  $B$  sont semblables,  $A = PBP^{-1}$  et on peut écrire :

$$t(A) = t([PB]P^{-1}) = t(P^{-1}[PB]) = t(B).$$

3. (a) Comme  $A$  et  $I$  sont deux matrices non colinéaires, elles forment une famille libre et  $\alpha$  et  $\beta$ , si ils existent, sont uniques.

Reste à démontrer l'existence : soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \text{ et } \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \beta + \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{11} \\ a_{12}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{12} \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{21} \\ a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{22} \end{cases}$$

Comme on a déjà prouvé l'unicité, on peut se contenter d'exhiber une solution, sans raisonner par équivalence. On pose alors par identification

$$\alpha = a_{11} + a_{22} = t(A)$$

qui assure que les équations 2 et 3 sont vérifiées et :

$$\begin{aligned} \beta &= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{11} = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}(a_{11} + a_{22}) \\ &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -d(A) \end{aligned}$$

qui assure la première équation, et enfin on vérifie que la quatrième est vérifiée :

$$\begin{aligned} \beta + \alpha a_{22} &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_2 2(a_{11} + a_{22}) = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{22}a_{11} + a_{22}^2 \\ &= a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

donc  $\alpha = t(A)$  et  $\beta = -d(A)$  constituent une solution unique du système.

(b) On a obtenu

$$\alpha = t(A) \quad \text{et} \quad \beta = -d(A) \quad \text{donc} \quad A^2 = t(A)A - d(A)I.$$

4. (a) Supposons qu'il existe trois réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $u(e_1) = \alpha e_1$ ,  $u(e_2) = \beta e_2$  et  $u(w) = \gamma w$ . On peut alors écrire :

$$u(e_1) = \alpha e_1 \quad , \quad u(e_2) = \beta e_2 \quad \text{et} \quad u(e_1 + e_2) = \gamma(e_1 + e_2) = \gamma e_1 + \gamma e_2$$

Mais par linéarité on a également :

$$u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2.$$

Donc :

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = \gamma e_1 + \gamma e_2 \Leftrightarrow (\alpha - \gamma)e_1 + (\beta - \gamma)e_2 = 0.$$

Donc par liberté de la famille  $(e_1, e_2)$ , on obtient que

$$\alpha = \gamma \quad \text{et} \quad \beta = \gamma.$$

Ainsi, dans la base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice de  $u$  est  $\alpha I_2$ . Par la formule de changement de base, on a donc :

$$A = P\alpha I_2 P^{-1} = \alpha P P^{-1} = \alpha I_2,$$

ce qui est absurde car  $A$  et  $I_2$  ne sont pas colinéaires.

- (b) L'un de ces trois vecteurs, noté  $x$ , est non nul (ils sont tous les trois non nul) et non colinéaire à  $u(x)$ .

Donc la famille  $(x, u(x))$  est libre. Comme cette famille est de cardinal 2, égal à la dimension de  $\mathbb{R}^2$ , c'est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

- (c) On cherche la matrice dans cette base, on a :

$$u(x) = 0x + 1u(x) \quad \text{et} \quad u(u(x)) = u^2(x) = (t(A)u - d(A)Id)(x) = -d(A)x + t(A)u(x)$$

car  $A^2 = t(A)A - d(A)I$  et  $A$  est une matrice de  $u$ . Enfin on en déduit que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}.$$

- (d)  $A$  est donc semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$ .

Or  ${}^t A$  n'est pas colinéaire à  $I$  non plus, sinon  $A = {}^t({}^t A) = {}^t(\lambda I) = \lambda {}^t I = \lambda I$  ce qui est absurde.

On en déduit que  ${}^t A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & -d({}^t A) \\ 1 & t({}^t A) \end{pmatrix}$ .

Enfin, avec les questions 1.(b) et 2.(b), on a  $d({}^t A) = d(A)$  et  $t({}^t A) = t(A)$  donc  $A$  et  ${}^t A$  sont semblables à la même matrice  $M$ .

Montrons que, dans ce cas,  $A$  et  ${}^t A$  sont semblables. Comme  $A$  et  ${}^t A$  sont semblables à  $M$ , il existe  $P$  et  $Q$  inversibles telles que  $A = PMP^{-1}$  et  ${}^t A = QMQ^{-1}$ . Alors on a :

$$A = P(Q^{-1}({}^t A)Q)P^{-1} = (PQ^{-1}){}^t A(QP^{-1}) = (PQ^{-1}){}^t A(PQ^{-1})^{-1}$$

car  $(PQ^{-1})^{-1} = (Q^{-1})^{-1}P^{-1} = QP^{-1}$ . Donc  $A$  et  ${}^t A$  sont semblables.

5. (a) L'ensemble est défini sous forme implicite, on utilise la caractérisation des sous-espaces :

- $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- La matrice nulle est élément de  $\mathcal{C}(A)$  car  $A0 = 0A = 0$ .
- Si  $B_1$  et  $B_2$  appartiennent à  $\mathcal{C}(A)$  et  $\lambda$  est un réel, on a :

$$AB_1 = B_1A \quad \text{et} \quad AB_2 = B_2A$$

donc :

$$A(\lambda B_1 + B_2) = \lambda AB_1 + AB_2 = \lambda B_1A + B_2A = (\lambda B_1 + B_2)A$$

et  $(\lambda B_1 + B_2) \in \mathcal{C}(A)$  qui est donc stable par combinaison linéaire.

On en déduit que  $\mathcal{C}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

(b) Si  $A$  est colinéaire à  $I$  alors toute matrice commute avec  $A$  et  $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est de dimension 4, et la base canonique bien connue en est une base.

Si  $A$  n'est pas colinéaire avec  $I$  alors il existe  $P$  inversible telle que  $A = PMP^{-1}$ , où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire :

$$AB = BA \Leftrightarrow PMP^{-1}B = BPMP^{-1} \Leftrightarrow M(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)M.$$

Soit alors  $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & a \end{pmatrix}$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on résout :

$$\begin{aligned} MN = NM &\Leftrightarrow \begin{cases} -d(A)z = y \\ -d(A)a = -d(A)x + t(A)y \\ x + t(A)z = a \\ y + t(A)a = -d(A)z + t(A)a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -d(A)z \\ -d(A)a = -d(A)x - t(A)d(A)z \\ x + t(A)z = a \\ -d(A)z + t(A)a = -d(A)z + t(A)a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -d(A)z \\ d(A)(-a + a - t(A)z + t(A)z) = 0 \\ x = a - t(A)z \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -d(A)z \\ 0 = 0 \\ x = a - t(A)z \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a - t(A)z & -d(A)z \\ z & a \end{pmatrix} = aI + z \begin{pmatrix} -t(A) & -d(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$MN = NM \Leftrightarrow N \in \text{Vect}[I, M - t(A)I] = \text{Vect}[I, M]$$

et on en déduit finalement que :

$$B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow P^{-1}BP = \alpha I + \beta M \Leftrightarrow B = \alpha PIP^{-1} + \beta PMP^{-1} = \alpha I + \beta A$$

donc

$$\mathcal{C}(A) = \text{Vect}[I, A]$$

et la famille  $(I, A)$  est libre (2 vecteurs non colinéaires) et génératrice de  $\mathcal{C}(A)$ , c'est donc une base de  $\mathcal{C}(A)$  et  $\dim[\mathcal{C}(A)] = 2$ .