Correction - AP 16

Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres - Le kurtosis

ESSEC I 2010

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

1. Si M est triangulaire, $M - \lambda I$ l'est aussi avec pour coefficients diagonaux $m_{i,i} - \lambda$ pour tout i.

   Les valeurs de λ pour laquelle elle n'est pas inversible sont les valeurs telles qu'il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que :
$$m_{i,i} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = m_{i,i}.$$
   On obtient bien
$$Sp(M) = \left\{ m_{i,i} \;\middle|\; i \in [\![1;n]\!] \right\}$$
   donc $M \in \mathcal{D}_n$.

2. Soit $M \in \mathcal{D}_n$, c'est-à-dire telle que $Sp(M) = \{m_{i,i} \,|\, i \in [\![1;n]\!]\}$.

   Soit $M' = M + \alpha I_n$, ses coefficients diagonaux sont $\{m_{i,i} + \alpha \,|\, i \in [\![1;n]\!]\}$ et on cherche ses valeurs propres :
$$M' - \lambda I_n = M + \alpha I_n - \lambda I_n = M - (\lambda - \alpha) I_n$$
   n'est pas inversible si et seulement si $\lambda - \alpha \in Sp(M)$, donc s'il existe i tel que
$$\lambda - \alpha = m_{i,i} \Leftrightarrow \lambda = m_{i,i} + \alpha$$
   c'est-à-dire si et seulement si λ est un des coefficients diagonaux de M'.

   D'où
$$M \in \mathcal{D}_n \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ M + \alpha I_n \in \mathcal{D}_n.$$

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   (a) Supposons que $K_n \in \mathcal{D}_n$, alors $Sp(K_n) = \{1\}$.
   Or K_n symétrique donc diagonalisable, il existe donc P inversible et D diagonale telle que $K_n = PDP^{-1}$.
   Enfin comme elles sont semblables, $Sp(D) = Sp(K_n) = \{1\}$, donc $D = I_n$ et enfin :
$$K_n = P I_n P^{-1} = I_n$$
   ce qui est absurde. On en déduit que $K_n \notin \mathcal{D}_n$.

   (b) On décompose K_n en somme de matrices triangulaires :
$$K_n = A_n + B_n$$
   avec A_n la matrice triangulaire supérieure avec des 1 au-dessus et sur la diagonale et B_n la matrice triangulaire inférieure avec des 1 sous la diagonale et des 0 sur la diagonale.
   Or A_n et B_n sont triangulaires donc ce sont des matrices de $\mathcal{D}_n$; leur somme K_n n'est pas dans $\mathcal{D}_n$, donc $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable par somme : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. (a) On échange les lignes L_1 et L_2 et on obtient une réduite triangulaire, dont les coefficients diagonaux sont y et x.
   Cette matrice est donc inversible si et seulement si x et y sont non nuls.

   (b) On a déjà vu que les matrices triangulaires sont dans $\mathcal{D}_2$.
   Soit M une matrice carrée d'ordre 2 non triangulaire :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad \text{avec } b \neq 0 \quad \text{et} \quad c \neq 0.$$

   Supposons que $M \in \mathcal{D}_2$. Alors par la question 2, $M - aI_2 \in \mathcal{D}_2$, donc

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2.$$

   On en déduit que $Sp(M') = \{0; d-a\}$ donc 0 est valeur propre de cette matrice, et elle n'est pas inversible.
   Or la question précédente montre que, comme $b \neq 0$ et $c \neq 0$, elle est inversible.
   On arrive à une absurdité et on en conclut que $M \notin \mathcal{D}_2$.
   Finalement $\mathcal{D}_2$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 triangulaires.

5. On considère les matrices

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Les deux premières ont deux colonnes égales, et dans la troisième on a $C_2 - 2C_3 - C_1 = 0$ donc aucune n'est inversible.

   On en déduit que 2, 3 et 4 sont des valeurs propres de A, et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut avoir plus de trois valeurs propres : ce sont donc les seules, et

$$Sp(A) = \{2; 3; 4\} = \left\{ a_{i,i} \;\middle|\; i \in [\![1; 3]\!] \right\}$$

   donc $A \in \mathcal{D}_3$.

   Montrons que A est diagonalisable. Pour chacune des trois valeurs propres $2, 3, 4$ de A, on peut trouver un vecteur propre V_2, V_3, V_4 associé. Comme un vecteur propre est toujours non nul, (V_2), (V_3) et (V_4) sont trois familles libres des sous-espaces propres $E_2(A)$, $E_3(A)$, $E_4(A)$. Par concaténation de familles libres associées à des valeurs propres distinctes, (V_2, V_3, V_4) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme son cardinal est égal à 3, c'est-à-dire à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable.

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

   (a) Cette fois on n'est pas sûrs que $M(t) \in \mathcal{D}_3$, donc on ne peut pas prendre directement les valeurs de la diagonale. On considère $M(t) - \lambda I$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\lambda \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 1+t \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_1) \end{matrix} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & \lambda-2 & 1+t-(3-\lambda)(4+2t-\lambda) \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_1) \\
\Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)
\end{aligned}$$

avec

$$P(\lambda) = 1 + t - (3-\lambda)(4+2t-\lambda) - 1 - t = -(3-\lambda)(4+2t-\lambda)$$

donc les valeurs propres de $M(t)$ sont les solutions de

$$2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{et} \quad (3-\lambda)(4+2t-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{3; 4+2t\}$$

Enfin on en déduit que pour tout t,

$$Sp(M(t)) = \{2; 3; 4+2t\} = \left\{ m_{i,i}(t) \;\middle|\; i \in [\![1;3]\!] \right\}$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t) \in \mathcal{D}_3$.

(b) On a trois cas :

- Si $4+2t \notin \{2; 3\}$, $M(t)$ admet trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable (même raisonnement qu'à la question 5).
- Si

$$4 + 2t = 2 \Leftrightarrow t = -1$$

on étudie les sous-espaces propres de $M(-1)$. On obtient :

$$E_2(M(-1)) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_3(M(-1)) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

et les familles génératrices obtenues sont à chaque fois libres (deux vecteurs non colinéaires pour les première, un vecteur non nul pour la seconde) donc ce sont des bases de ces espaces.
Par concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre et c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (car son cardinal est égal à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$). Donc $M(-1)$ est diagonalisable.
- Si

$$4 + 2t = 3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

on étudie les sous-espaces propres de $M(-1/2)$. On obtient :

$$E_2(M(-1/2)) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_3(M(-1/2)) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

et les familles génératrices obtenues sont à chaque fois libres (un vecteur non nul) donc ce sont des bases de ces espaces. Par concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ est libre. Ce n'est cependant pas une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est de cardinale $2 \neq 3$. Donc $M(-1/2)$ n'est pas diagonalisable.

Finalement, $M(t)$ est diagonalisable pour tout $t \neq -\frac{1}{2}$.

7. Supposons que M est inversible, alors en multipliant p fois par M^{-1} on obtient :

$$M^p = 0 \Longrightarrow I = 0$$

qui est absurde, donc M n'est pas inversible et $0 \in Sp(M)$.

De plus le polynôme $P(x) = x^p$ est annulateur de M et admet pour unique racine 0, donc c'est la seule possible. On obtient :

$$Sp(M) = \{0\}.$$

8. On suppose que $M^3 \neq 0$.

(a) Soit $x \in Ker(u)$, on a $u(x) = 0$ donc en composant par u :

$$u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0 \quad \text{donc} \quad x \in Ker(u^2).$$

On en déduit que $Ker(u) \subset Ker(u^2)$.
De même, si $x \in Ker(u^2)$, on a $u^2(x) = 0$ donc en composant par u :

$$u^3(x) = u(u^2(x)) = u(0) = 0 \quad \text{donc} \quad x \in Ker(u^3).$$

On en déduit que $Ker(u^2) \subset Ker(u^3)$.

(b) On suppose que $Ker(u^2) = Ker(u^3)$.
Montrons par récurrence sur $i \geq 2$ que $Ker(u^i) = Ker(u^2)$ pour tout $i \geq 2$.

Ini. : $Ker(u^2) = Ker(u^2)$ donc la propriété est vraie au rang 2.

Héré. : Soit $i \geq 2$. Supposons que $Ker(u^i) = Ker(u^2)$.
De manière identique à la question précédente, en composant par u^{i-1}, on a :

$$Ker(u^2) \subset Ker(u^{i+1}).$$

Montrons l'autre inclusion : Soit $x \in Ker(u^{i+1}) = Ker(u^i \circ u)$, alors :

$$u^i(u(x)) = 0 \quad \text{donc} \quad u(x) \in Ker(u^i).$$

Or $Ker(u^i) = Ker(u^2)$, donc

$$u(x) \in Ker(u^2) \quad \text{et} \quad u^2(u(x)) = u^3(x) = 0$$

D'où $x \in Ker(u^3) = Ker(u^2)$ (on l'a supposé au départ).
Enfin on obtient que, $Ker(u^{i+1}) \subset Ker(u^2)$ donc $Ker(u^{i+1}) = Ker(u^2)$ et la propriété est vraie au rang $i + 1$.

Ccl. Pour tout $i \geq 2$, $Ker(u^i) = Ker(u^2)$.

Obtenons alors une contradiction : On a supposé que $M^3 \neq 0$, donc $M^2 \neq 0$ et $u^2 \neq 0$, donc $Ker(u^2) \neq \mathbb{R}^3$.
On en déduit que $Ker(u^i) \neq \mathbb{R}^3$ pour tout i, donc $u^i \neq 0$ pour tout i, et finalement $M^p \neq 0$ pour tout p, et M n'est pas nilpotente, ce qui est absurde.
On en déduit donc que $Ker(u^2) \neq Ker(u^3)$.

(c) Supposons que $Ker(u) = Ker(u^2)$, montrons alors que $Ker(u^2) = Ker(u^3)$, ce qui est absurde par la question précédente :
On a vu précédemment (question a) que $Ker(u^2) \subset Ker(u^3)$.
Soit $x \in Ker(u^3)$, alors

$$u^3(x) = u^2(u(x)) = 0 \quad \text{donc} \quad u(x) \in Ker(u^2) = Ker(u).$$

D'où $u(u(x)) = u^2(x) = 0$, et $x \in Ker(u^2)$.
Donc $Ker(u^3) \subset Ker(u^2)$, et $Ker(u^3) = Ker(u^2)$, ce qui est absurde.
On en déduit que $Ker(u) \neq Ker(u^2)$.

(d) On a vu que M n'est pas inversible donc u n'est pas bijective. Donc $dim(Ker(u)) \geq 1$ (car u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie et on a donc équivalence entre u injective et u bijective).
De plus on a $Ker(u) \subset Ker(u^2)$, donc $dim(Ker(u^2)) \geq dim(Ker(u))$.
Leurs dimensions ne peuvent être égales, sinon au aurait $Ker(u) = Ker(u^2)$: on en déduit que

$$dim(Ker(u^2)) \geq dim(Ker(u)) + 1 \geq 2.$$

De même on a $Ker(u^2) \subset Ker(u^3)$ et ils ne sont pas égaux donc :

$$dim(Ker(u^3)) \geq dim(Ker(u^2)) + 1 \geq 3.$$

On en déduit que $dim(Ker(u^3)) = 3$ (il est inclus dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc sa dimension ne peut dépasser 3) ce qui donne :

$$Ker(u^3) \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad dim(Ker(u^3)) = dim(\mathbb{R}^3) \quad \text{donc} \quad Ker(u^3) = \mathbb{R}^3.$$

Cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $u^3(x) = 0$, donc u^3 est l'endomorphisme nul et enfin $M^3 = 0$.
C'est absurde puisqu'on a supposé que $M^3 \neq 0$, et on en déduit que : $M^3 = 0$.

9. (a) On calcule M^3 et $\gamma(M)M + \delta(M)I_3$ et on vérifie qu'ils sont bien égaux.

(b) Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3 = 0M + 0I_3 = 0$, donc M est nilpotente.
Si M est nilpotente, la question précédente prouve que $M^3 = 0$, donc $\gamma(M)M+\delta(M)I_3 = 0$.
1er cas : $a = b = c = d = e = f = 0$, alors $M = 0$ et $\gamma(M) = \delta(M) = 0$ de manière évidente.
2e cas : l'un des coefficients est non nul. Alors la famille (M, I_3) est libre (deux matrices non colinéaires), et on en déduit que

$$\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = 0 \Rightarrow \gamma(M) = \delta(M) = 0.$$

On obtient bien que M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M) = \delta(M) = 0$.

(c) M est alors nilpotente si et seulement si :

$$\begin{cases} c+f+e=0 \\ cf+e=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e=-c-f \\ cf+e=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e=-c-f \\ cf-c-f=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e=-\frac{f}{f-1}-f \\ c=\frac{f}{f-1} \end{cases}$$

avec $f \neq 1$.
On en déduit qu'il y a une infinité de solutions, car pour tout $f \neq 1$, il existe une solution associée avec c et e parfaitement déterminés.
Il existe donc bien une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) qui rendent la matrice M nilpotente.

(d) En prenant $f \notin \{0;1\}$ ($f \neq 0$ pour que la matrice ne soit pas triangulaire), on a une infinité de matrices non triangulaires et nilpotentes, dont la diagonale est constituée de 0.

Or ces matrices sont nilpotentes donc leur seule valeur propre est 0, et elles appartiennent donc à $\mathcal{D}_3$.

On a donc exhibé une infinité de matrices nilpotentes non triangulaires appartenant à $\mathcal{D}_3$.

(e) On prend une matrice de l'ensemble précédent, avec $a = b = d = 1$, puis $f = 2$, ce qui donne $c = \frac{2}{1} = 2$, et $e = -\frac{4}{1} = -4$.

On obtient une matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente et appartenant à $\mathcal{D}_3$.

On a prouvé qu'en rajoutant αI_3, on obtient à nouveau une matrice de $\mathcal{D}_3$.

D'où $N = M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{D}_3$, et tous ses coefficients sont non nuls.

Problème 2. Le kurtosis

1. X admet des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4.

   Or le moment centré d'ordre 2 est la variance, donc par propriétés de la variance, $\alpha X + \beta$ admet un moment centré d'ordre 2 et :

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X) \neq 0.$$

   Par linéarité de l'espérance on a :

$$\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta) = \alpha[X - E(X)]$$

   On en déduit que :

$$(\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta))^3 = \alpha^3 [X - E(X)]^3 \quad \text{et} \quad (\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta))^4 = \alpha^4 [X - E(X)]^4$$

   donc par linéarité de l'espérance, comme X admet des moments centrés d'ordre 3 et 4, $\alpha X + \beta$ en admet aussi et on a de plus :

$$\mu_4(\alpha X + \beta) = \alpha^4 E\left[(X - E(X))^4\right] = \alpha^4 \mu_4(X).$$

   Enfin on en déduit que $\alpha X + \beta$ admet un kurtosis et :

$$K(\alpha X + \beta) = \frac{\alpha^4 \mu_4(X)}{(\alpha^2 V(X))^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{(V(X))^2} - 3 = K(X).$$

2. (a) On a par une propriété du cours :

$$E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   D'autre part on considère, avec f une densité de X, et décompose par relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_1^{+\infty} 0dt.$$

   Les deux intégrales de la fonction nulle convergent absolument et valent 0, et l'intégrale de 0 à 1 converge absolument car elle n'est pas généralisée : donc X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance et :

$$E(X^2) = \int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad V(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

(b) On vient de voir que $V(X) \neq 0$, et par théorème de transfert, les moments centrés de tous ordres s'écrivent comme une somme de deux intégrales de la fonction nulle et d'une intégrale non généralisée, donc ces intégrales convergent absolument et les moments centrés de tous ordres existent.
D'où X admet un kurtosis, et de plus :

$$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 dt = \left[\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{80}.$$

Donc on obtient finalement :

$$K(X) = \frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{144}} - 3 = \frac{144}{80} - 3 = \frac{144 - 240}{80} = \frac{-96}{80} = -\frac{6}{5}.$$

(c) Si Y suit une loi uniforme sur $[a;b]$, alors

$$X = \frac{Y-a}{b-a} = \frac{1}{b-a}Y - \frac{a}{b-a}$$

suit la loi uniforme sur $[0;1]$; d'où d'après le préliminaire,

$$Y = (b-a)X + a$$

admet un kurtosis et :

$$K(Y) = K(X) = -\frac{6}{5}.$$

3. (a) On sait que $E(X) = 0$ donc les moments centrés de X sont ses moments.
Soit $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ une densité de X. Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\frac{t^n\varphi(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{n+2}e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}+(n+2)\ln t}.$$

Par croissances comparées,

$$-\frac{t^2}{2} + (n+2)\ln(t) = \frac{t^2}{2}\left(2(n+2)\frac{\ln(t)}{t^2} - 1\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

donc par composition :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n\varphi(t)}{\frac{1}{t^2}} = 0 \quad \text{donc} \quad t^n\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge absolument (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), $\int_0^{+\infty} t^n\varphi(t)\ dt$ converge absolument.
De plus la fonction $t \mapsto t^n\varphi(t)$ est paire ou impaire selon la parité de n; dans tous les cas on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\varphi(t)\ dt$ converge absolument.
D'où X admet des moments centrés de tous ordres.

(b) On effectue une intégration par parties sur $\mu_n(X)$, avec :

$$u = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{et} \quad v = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

$$u' = -te^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{et} \quad v' = t^n.$$

Enfin on a pour tous a et b réels :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b t^n\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_a^b + \frac{1}{n+1}\int_a^b t^{n+2}e^{-\frac{t^2}{2}}\right).$$

Les termes du crochets tendent vers 0 lorsque a tend vers $-\infty$ puis b tend vers $+\infty$ (par croissances comparées, sur le même modèle que la question a) et on en déduit :

$$\mu_n(X) = \frac{1}{n+1}\mu_{n+2}(X) \quad \text{donc} \quad \mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X).$$

(c) De plus on a $V(X) = 1 \neq 0$ donc X admet un kurtosis et

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(V(X))^2} - 3 = \frac{3V(X)}{1^2} - 3 = 3 - 3 = 0.$$

(d) Si Y suit la loi normale de paramètres m et σ^2, $X = \frac{Y-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
D'où $Y = \sigma X + m$ admet un kurtosis et $K(Y) = K(X) = 0$ avec le préliminaire.

4. (a) X est finie donc admet des moments et des moments centrés de tous ordres. Par théorème de transfert on a :

$$\begin{aligned}\mu_4(X) &= E((X-p)^4) = (0-p)^4\times(1-p) + (1-p)^4\times p = p(1-p)[p^3 + (1-p)^3] \\ &= p(1-p)[p^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3] = p(1-p)[3p^2 - 3p + 1].\end{aligned}$$

De plus $V(X) = p(1-p) \neq 0$ donc X admet un kurtosis. Enfin

$$\begin{aligned}K(X) &= \frac{p(1-p)[3p^2-3p+1]}{[p(1-p)]^2} - 3 = \frac{3p^2-3p+1}{p(1-p)} - 3 \\ &= \frac{3p^2-3p+1-3p(1-p)}{p(1-p)} = \frac{6p^2-6p+1}{p(1-p)}.\end{aligned}$$

(b) On cherche le minimum sur $]0;1[$ de la fonction

$$f(x) = \frac{6x^2-6x+1}{x-x^2}.$$

La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(12x-6)(x-x^2) - (1-2x)(6x^2-6x+1)}{(x-x^2)^2} \\ &= \frac{6(2x-1)(x-x^2) + (2x-1)(6x^2-6x+1)}{(x-x^2)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(6x-6x^2+6x^2-6x+1)}{(x-x^2)^2} = \frac{2x-1}{(x-x^2)^2}.\end{aligned}$$

La dérivée est négative pour $x \leq \frac{1}{2}$ et positive après, donc f admet un minimum atteint en $x = 1/2$. $K(X)$ est donc minimale pour $p = \frac{1}{2}$ et pour $p = \frac{1}{2}$,

$$K(X) = -6 + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = -6 + 4 = -2.$$

5. $V(Y) = E([Y - E(Y)]^2)$ est positive comme espérance d'une variable positive, et par théorème de Kenig-Huygens :

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \geq 0 \iff E(Y^2) \geq [E(Y)]^2.$$

6. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis.
$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4) = E([(X - E(X))^2]^2) \geq [E((X - E(X))^2)]^2 = \mu_2(X)^2$ d'après la question précédente en prenant $Y = (X - E(X))^2$.
donc $\dfrac{\mu_4(X)}{\mu_2(X)^2} \geq 1$, d'où :
$$K(X) \geq 1 - 3 = -2.$$

7. $Y = \frac{X-a}{b-a}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc $X = (b-a)Y + a$ admet un kurtosis et
$$K(X) = K(Y) = -2$$
par le préliminaire et la question 4b.

8. (a) Soit $Y = X - E(X)$, Y est centrée et admet un kurtosis et $K(Y) = K(X) = -2$ par le préliminaire.
Montrons que Y^2 est une variable certaine, en se servant du résultat admis par l'énoncé : comme Y est centrée, ses moments sont égaux à ses moments centrés donc :
$$V(Y^2) = E(Y^4) - E(Y^2)^2 = \mu_4(Y) - V(Y)^2$$
Or on sait que $K(Y) = -2$ donc :
$$K(Y) = -2 \Longrightarrow \frac{\mu_4(Y)}{(V(Y))^2} = 1 \Longrightarrow \mu_4(Y) = V(Y)^2$$
et enfin $V(Y^2) = 0$, et Y^2 est bien une variable aléatoire certaine.

(b) On sait que $(X - E(X))^2$ est une variable certaine ; notons c la seule valeur (positive) qu'elle prend.
On a donc $(X - E(X))^2(\Omega) = \{c\}$ donc $[X - E(X)](\Omega) = \{\sqrt{c}; -\sqrt{c}\}$ et enfin :
$$X(\Omega) = \{E(X) + \sqrt{c}; E(X) - \sqrt{c}\}.$$
On pose $a = E(X) + \sqrt{c}$ et $b = E(X) - \sqrt{c}$, alors
$$X(\Omega) = \{a; b\}$$
donc pour tout $x \notin \{a; b\}$, $P(X = x) = 0$.
De plus on a bien $a \neq b$ car si $a = b$, alors $c = 0$ puis $X = E(X)$ de manière certaine et X est une variable certaine, donc sa variance est nulle et X n'a pas de kurtosis.

(c) Soit $p = P(X = a)$; on a $P(X = b) = 1 - p$.
On a vu que $a = E(X) + \sqrt{c}$ et $b = E(X) - \sqrt{c}$ donc on en déduit que :
$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$
Or en calculant avec la définition on a :
$$E(X) = ap + b(1-p) = b + p(a-b)$$
ce qui donne :
$$b + p(a-b) = \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow p(a-b) = \frac{a+b-2b}{2} \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$$
et X suit la loi uniforme sur $\{a; b\}$.
Remarque : on pouvait aussi utiliser $\frac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et l'étude du kurtosis des lois de Bernoulli réalisée précédemment montre qu'elle a un kurtosis égal à -2 (ce que donne le préliminaire) si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

9. La fonction $f(p)$ donnant le kurtosis d'une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre p admet pour limite $+\infty$ pour $p \to 0$ et pour $p \to 1$ donc il n'y a pas de majoration du kurtosis.

10. Comme X et Y sont centrées, $E(X) = E(Y) = 0$ et les moments centrés sont égaux aux moments non centrés donc :
$$\mu_4(X) = E(X^4) \quad , \quad \mu_4(Y) = E(Y^4) \quad \text{et} \quad V(X) = E(X^2) \quad , \quad V(Y) = E(Y^2).$$
On a alors (formule du binôme de Newton, puis linéarité de l'espérance et indépendance de X et Y) :
$$\begin{aligned} E\big((X+Y)^4\big) &= E\big(X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4\big) \\ &= E(X^4) + 4E(X^3)E(Y) + 6E(X^2)E(Y^2) + 4E(X)E(Y^3) + E(Y^4) \\ &= E(X^4) + 6E(X^2)E(Y^2) + E(Y^4) = E(X^4) + 6V(X)V(Y) + E(Y^4). \end{aligned}$$

11. $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0$ donc $X+Y$ est centrée ce qui donne :
$$\mu_4(X+Y) = E((X+Y)^4)$$
On en déduit (par indépendance de X et Y pour la décomposition de la variance) que :
$$\begin{aligned} K(X+Y) &= \frac{E(X^4) + 6V(X)V(Y) + E(Y^4)}{(V(X)+V(Y))^2} - 3 \\ &= \frac{E(X^4) + 6V(X)V(Y) + E(Y^4) - 3\left[(V(X))^2 + (V(Y))^2 + 2V(X)V(Y)\right]}{(V(X)+V(Y))^2} \\ &= \frac{E(X^4) + E(Y^4) - 3(V(X))^2 - 3(V(Y))^2}{(V(X)+V(Y))^2} \end{aligned}$$
Or X et Y sont centrée donc on a :
$$K(X) = \frac{E(X^4)}{(V(X))^2} - 3 = \frac{E(X^4) - 3(V(X))^2)}{(V(X))^2} \quad \text{donc} \quad E(X^4) - 3(V(X))^2 = K(X)(V(X))^2$$
et de même
$$E(Y^4) - 3(V(Y))^2 = K(Y)(V(Y))^2$$
ce qui donne enfin :
$$K(X+Y) = \frac{K(X)(V(X))^2 + K(Y)(V(Y))^2}{(V(X)+V(Y))^2}.$$

12. Les variables $X' = X - E(X)$ et $Y' = Y - E(Y)$ sont centrées et indépendantes donc on peut leur appliquer la formule précédente :
$$K(X'+Y') = \frac{V(X')^2K(X') + V(Y')^2K(Y')}{[V(X') + V(Y')]^2}.$$
Or on sait par les propriétés de la variance et par le préliminaire pour les kurtosis que :
$$V(X') = V(X) \quad , \quad K(X') = K(X) \quad , \quad V(Y') = V(Y) \quad \text{et} \quad K(Y') = K(Y).$$
Enfin, on a $X' + Y' = (X+Y) - [E(X) + E(Y)]$ où $[E(X) + E(Y)]$ est une constante donc le préliminaire prouve que
$$K(X+Y) = K(X'+Y') = \frac{V(X')^2K(X') + V(Y')^2K(Y')}{[V(X') + V(Y')]^2} = \frac{V(X)^2K(X) + V(Y)^2K(Y)}{[V(X) + V(Y)]^2}$$
et la formule précédente est donc encore valable.

13. On prouve cette formule par récurrence sur $n \geq 1$.

La formule est valable pour $n = 1$ (évidente) et $n = 2$ d'après la question 3, ce qui initialise la récurrence.

Hérédité : on suppose la formule valable pour une somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes, montrons qu'elle est valable pour $n + 1$ variables.

On pose alors : $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $X = X_{n+1}$ qui sont indépendantes par lemme des coalitions et la formule du 3 donne :

$$K\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k\right) = K(Y + X) = \frac{V(X_{n+1})^2 K(X_{n+1}) + V(Y)^2 K(Y)}{(V(Y) + V(X_{n+1}))^2}.$$

De plus par indépendance des variables on a $V(Y) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} K\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k\right) &= \frac{V(X_{n+1})^2 K(X_{n+1}) + \left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2 \dfrac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2}}{\left(\sum_{k=1}^{n+1} V(X_k)\right)^2} \\ &= \frac{V(X_{n+1})^2 K(X_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n+1} V(X_k)\right)^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} V(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n+1} V(X_k)\right)^2}. \end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes,

$$K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2}.$$

14. (a) La formule précédente donne :

$$K(S_n) = \frac{nV(X)^2 K(X)}{[nV(X)]^2} = \frac{nV(X)^2 K(X)}{n^2 V(X)^2} = \frac{K(X)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

(b) Le théorème de la limite centrée dit que la variable centrée réduite associée à la somme de variables indépendantes et de même loi converge en loi vers la loi normale centrée réduite, ce qui donne (S_n) converge en loi vers la loi normale de paramètres $nE(X)$ et $nV(X)$, qui a un kurtosis nul.

On a prouvé (dans le cas de la somme centrée réduite de variables indépendantes et de même loi uniquement!) que la limite du kurtosis est égale au kurtosis de la limite.