Correction - AP 17

Réduction
Durée de fonctionnement d'un système

Exercice 1 (ESSEC I 2004)

1. Il faut connaître (et surtout comprendre) les propriétés suivantes sur les degrés des polynômes :

   - $deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q))$.
     Et si $deg(P) \neq deg(Q)$, alors $deg(P+Q) = \max(deg(P), deg(Q))$.
   - $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$
   - $deg(P \circ Q) = deg(P) \times deg(Q)$.

   Ici, on remarque que $P(aX+1-a)$ est de la forme $P \circ Q$ où $Q(X) = aX+1-a$ donc $deg\left(P(aX+1-a)\right) = deg(P) \times deg(Q) = deg(P) \times 1 = deg(P)$.

2. Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_N[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$f_a(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(aX+1-a) = \lambda P(aX+1-a) + Q(aX+1-a) = \lambda f_a(P) + f_a(Q)$$

   f_a est donc bien linéaire.

   De plus, l'équation $f_a(P) = 0$ admet pour unique solution $P = 0$. En effet, $deg(P) = deg(f_a(P))$ d'après la question 1., donc $deg(P) = deg(0) = -\infty$ donc $P = 0$.

   On a donc $Ker(f_a) = \{0\}$, c'est-à-dire f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$ injectif donc bijectif (même dimension de l'espace de départ et d'arrivé).

   Donc f_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

3. (a) Pour tout $P \in \mathbb{R}_N[X]$,

   $$f_b \circ f_a(P) = f_b(P(aX+1-a)) = P(a(bX+1-b)+1-a) = P(abX+1-ab) = f_{ab}(P).$$

   Ainsi, $f_b \circ f_a = f_{ab}$.

   (b) On remarque que $\forall P \in \mathbb{R}_N[X]$, $f_1(P) = P$, c'est-à-dire $f_1 = Id$. Comme $a \neq 0$, on a avec la question précédente :

   $$f_a \circ f_{1/a} = f_1 = Id \quad \text{et} \quad f_{1/a} \circ f_a = f_1 = Id.$$

   Ainsi, $f_a^{-1} = f_{1/a}$.

   (c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété "$(f_a)^n = f_{a^n}$".

   Ini. $f_{a^0} = f_1 = Id$ d'après la question précédente, donc on a bien : $f_{a^0} = (f_a)^0$.

   Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(f_a)^n = f_{a^n}$. Alors :

   $$(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a = \underbrace{f_{a^n} \circ f_a}_{(H.R.)} = \underbrace{f_{a^n \times a}}_{\text{(d'après 3.(a))}} = f_{a^{n+1}}.$$

   Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_a)^n = f_{a^n}$.

4. (a) On a $f_a(1) = 1$, $f_a(X) = aX+1-a$, $f_a(X^2) = (aX+1-a)^2 = a^2X^2+2a(1-a)X+(1-a)^2$ et $f_a(X^3) = (aX+1-a)^3 = a^3X^3 + 3a^2(1-a)X^2 + 3a(1-a)^2X + (1-a)^3$.
   Ainsi,

   $$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

La $j+1$-ième colonne de M_a contient les coordonnées de $f_a(X^j)$ dans la base canonique.

On $f_a(X^j) = (aX+1-a)^j = \underbrace{\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^i (1-a)^{j-i} X^i}_{\text{(formule du binôme)}}$.

La $(i+1)$-ième ligne de M_a contient donc le coefficient $\binom{j}{i} a^i(1-a)^{j-i}$.

(b) On sait d'après la question 3.(c) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_a)^n = f_{a^n}$. Donc $M_{can}((f_a)^n) = M_{can}(f_{a^n})$, c'est-à-dire $(M_a)^n = M_{a^n}$.

Montrons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M_a)^n$ est inversible d'inverse $(M_a)^{-n} = M_{a^{-n}}$:

$$(M_a)^n \times M_{a^{-n}} = M_{a^n} \times M_{a^{-n}} = \underbrace{M_{a^n \times a^{-n}}}_{\text{(d'après 3.(a))}} = M_1 = I$$

Ainsi, on a bien $(M_a)^n$ inversible et $(M_a)^{-n} = M_{a^{-n}}$.

La formule est aussi vraie pour les entiers négatifs.

5. (a) La matrice M_a est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire $\forall i \in [\![0, N]\!]$, $\binom{i}{i} a^i(1-a)^{i-i} = a^i$.

(b) $f_a((X-1)^k) = (aX+1-a-1)^k = (a(X-1))^k = a^k(X-1)^k$.

(c) Notons, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $P_k(X) = (X-1)^k$ de sorte que $f_a(P_k) = a^k P_k$.

La famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, ..., P_N)$ est libre car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés et $card(\mathcal{F}) = N+1 = dim(\mathbb{R}_N[X])$ donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$. De plus,

$$M_{\mathcal{F}}(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^N \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est semblable à M_a car elle représente le même endomorphisme f_a. Ainsi, M_a est semblable à une matrice diagonale et elle est donc diagonalisable.

Problème : Durée de fonctionnement d'un système (ESSEC II 2010)

1. (a) X suit la loi exponentielle de paramètre μ donc admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\mu^2}.$$

(b) Par théorème de transfert et relation de Chasles, on s'intéresse à l'absolue convergence de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_\mu(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \mu \int_0^{+\infty} t^n e^{-\mu t}dt.$$

La première intégrale converge absolument et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle, la seconde est l'intégrale d'une fonction positive, qui n'est généralisée qu'en $+\infty$. Or :

$$\frac{t^n e^{-\mu t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}e^{-\mu t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad t^n e^{-\mu t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

au voisinage de $+\infty$. De plus l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge absolument (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\mu t}dt$ converge absolument.

On obtient finalement que X^n admet une espérance pour tout n et on obtient une relation de récurrence par intégration par parties :

$$E(X^{n+1}) = \int_0^{+\infty} \mu t^{n+1} e^{-\mu t} dt.$$

On se place entre 0 et x et on pose :

$$u = t^{n+1} \quad \text{et} \quad v = -e^{-\mu t}$$

qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, avec

$$u' = (n+1)t^n \quad \text{et} \quad v' = \mu e^{-\mu t}.$$

L'intégration par parties donne :

$$\int_0^x \mu t^{n+1} e^{-\mu t} dt = \left[-t^{n+1}e^{-\mu t}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-\mu t} dt = -x^{n+1}e^{-\mu x} + \frac{n+1}{\mu}\int_0^x \mu t^{n+1} e^{-\mu t} dt.$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient (le terme devant l'intégrale tend vers 0 par croissances comparées) :

$$E(X^{n+1}) = \frac{n+1}{\mu} E(X^n).$$

(c) On en déduit alors que :

$$E(X_n) = \frac{n}{\mu} E(X^{n-1}) = \frac{n(n-1)}{\mu^2} E(X^{n-2}) = \cdots = \frac{n(n-1)\times\cdots\times 1}{\mu^n} E(X^0)$$

et comme $X^0 = 1$ est une variable certaine dont l'espérance vaut 1, on obtient :

$$E(X_n) = \frac{n!}{\mu^n}.$$

(d) D'où par formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

2. (a) Pour tout $x \geq 0$,

$$P(X > x) = \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu t} dt = e^{-\mu x} > 0.$$

Pour tous réels positifs x et y, $(X > x+y) \subset (X > x)$ donc :

$$\begin{aligned} P_{(X>x)}(X > x+y) &= \frac{P[(X > x)\cap(X > x+y)]}{P(X > x)} = \frac{P[(X > x+y)]}{P(X > x)} \\ &= \frac{e^{-\mu(x+y)}}{e^{-\mu x}} = e^{-\mu y} = P(X > y) \end{aligned}$$

(b) i. f est continue strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $R(x) = 1 - F_X(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est $-f(x)$, strictement négative.
De plus par propriétés d'une fonction de répartition on sait que $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$, limite qui n'est jamais atteinte car R est strictement décroissante. D'où :

$$\forall x \geq 0,\ R(x) > 0 = \lim_{t\to+\infty} R(t).$$

ii. On vient de voir que R est de classe C^1, on a de plus $(X > x + y) \subset (X > x)$ donc :

$$\begin{aligned} P_{(X>x)}(X > x + y) = P(X > y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{P[(X > x + y) \cap (X > x)]}{P(X > x)} = P(X > y) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{R(x + y)}{R(x)} = R(y) \\ &\Leftrightarrow \quad R(x + y) = R(x)R(y). \end{aligned}$$

On dérive cette relation par rapport à y et on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ R'(x + y) = R(x)R'(y).$$

Enfin on pose $y = 0$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R'(x) = R(x)R'(0).$$

Or on a vu que $R'(x) = -f(x)$ et pour $x = 0$ on a : $R'(0) = -f(0) = -\mu$. On obtient bien finalement :

$$R'(x) + \mu R(x) = 0.$$

iii. R est solution de l'équation différentielle homogène $y' + \mu y = 0$. Donc $R(x) = \lambda e^{-\mu x}$, avec λ un réel à déterminer.
Or $R(0) = P(X > 0) = P(X \geq 0) = 1$ car X est une variable à densité positive. Donc $\lambda = 1$ et on obtient pour tout $x \geq 0$:

$$R(x) = e^{-\mu x} \Leftrightarrow F_X(x) = 1 - R(x) = 1 - e^{-\mu x}.$$

On reconnaît la loi exponentielle de paramètre $\mu = f(0)$.

3. (a) On sait que $(Y \leq t) = (X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)$ donc par indépendance de X_1 et X_2, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P[(X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)] = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) = F_{X_1}(t)F_{X_2}(t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(1 - e^{-\mu_1 t}\right) \times \left(1 - e^{-\mu_2 t}\right) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de F_{X_1} et F_{X_2} qui le sont car X_1 et X_2 sont à densité, et de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ donc Y est une variable à densité, et en dérivant F_Y sauf en 0 où on donne une valeur arbitraire, une densité de Y est :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu_1 e^{-\mu_1 t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t} - (\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

(b) On sait que $(Z > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t)$ donc par indépendance de X_1 et X_2, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) = 1 - P(Z > t) = 1 - P[(X_1 > t) \cap (X_2 > t)] \\ &= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t) = 1 - [1 - F_{X_1}(t)] \times [1 - F_{X_2}(t)] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On voit alors que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + \mu_2$.

4. On fait apparaître F_T puis R_T (comme T à densité) :

$$P(t \leq T \leq t + h) = F_T(t + h) - F_T(t) = 1 - R_T(t + h) - (1 - R_T(t)) = R_T(t) - R_T(t + h).$$

5. Pour tout réel t positif ou nul,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{P(t\le T\le t+h)}{h} &= \lim_{h\to 0,h>0}\frac{R_T(t)-R_T(t+h)}{h} = -\lim_{h\to 0,h>0}\frac{R_T(t+h)-R_T(t)}{h}\\ &= -R_T'(t)=f_T(t)\end{aligned}$$

car $R_T(t)=1-F_T(t)$ est dérivable au point t, de dérivée $-f_T(t)$.

6. (a) La question a déjà été traitée précédemment : f_T est continue strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $R_T(t)=1-F_T(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $-f_T(t)$, strictement négative.
De plus par propriétés d'une fonction de répartition on sait que $\lim_{t\to+\infty} R_T(t)=0$, limite qui n'est jamais atteinte car R_T est strictement décroissante. D'où :

$$\forall t>0,\ R_T(t)>0=\lim_{t\to+\infty}R(t).$$

Enfin en $t=0$, comme T est positive on a :

$$R_T(0)=1-F_T(0)=1-P(T\le 0)=1-0=1>0.$$

(b) La fonction $t\to \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)=-\ln(R_T(t))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composition de fonctions dérivables car R_T est dérivable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est :

$$\frac{d}{dt}\left(-\ln(R_T(t))\right)=-\frac{R_T'(t)}{R_T(t)}=-\frac{-f_T(t)}{R_T(t)}=\lambda(t).$$

(c) On en déduit que $G(t)=-\ln(R_T(t))$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de λ, qui s'annule lorsque :

$$R_T(t)=1\Leftrightarrow F_T(t)=0\Leftrightarrow t=0.$$

D'où on en déduit l'écriture :

$$-\ln(R_T(t))=\int_0^t\lambda(x)dx\Rightarrow \ln(R_T(t))=-\int_0^t\lambda(x)\ dx\Rightarrow R_T(t)=e^{-\int_0^t\lambda(x)dx}.$$

7. (a) On dérive v, et on a vu précédemment que $R_Z'(t)=-f_Z(t)=-g(t)$:

$$v'(t)=1\times R_Z(t)+t\times R_Z'(t)=R_Z(t)-tg(t)\Longleftrightarrow tg(t)=R_Z(t)-v'(t).$$

(b) On écrit R_Z à l'aide d'une intégrale ce qui donne :

$$v(t)=tR_Z(t)=tP(Z>t)=t\int_t^{+\infty}g(u)du=\int_t^{+\infty}tg(u)du\le\int_t^{+\infty}ug(u)du$$

car pour tout $x\in[t;+\infty[$, $t\le u$ donc $tg(u)\le ug(u)$ et on intègre sur des bornes croissantes. D'où on obtient

$$0\le v(t)\le\int_t^{+\infty}ug(u)du$$

(cette intégrale converge bien car Z admet une espérance).
Or par relation de Chasles,

$$\int_t^{+\infty}ug(u)du=\int_0^{+\infty}ug(u)du-\int_0^t ug(u)du.$$

De plus on sait que $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t ug(u)\ du=\int_0^{+\infty}ug(u)du$ donc

$$\lim_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty}ug(u)du=0$$

et par théorème d'encadrement,

$$\lim_{t\to+\infty}v(t)=0.$$

(c) Comme Z est à valeurs positives, l'intégrale de $-\infty$ à 0 est nulle donc :

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} (R_Z(t) - v'(t))dt.$$

Étudions cette intégrale, en passant par l'intégrale partielle pour primitiver et faire apparaître $v(t)$:

$$\begin{aligned}\int_0^x (R_Z(t) - v'(t))dt &= \int_0^x R_Z(t)dt - \int_0^x v'(t)dt = \int_0^x R_Z(t)dt - [v(t)]_0^x \\ &= \int_0^x R_Z(t)dt - v(x) + v(0) = \int_0^x R_Z(t)dt - v(x).\end{aligned}$$

car $v(0) = 0 \times R_Z(0) = 0$. D'où

$$\int_0^x R_Z(t)dt = \int_0^x tg(t)dt + v(x).$$

De plus on sait que $\int_0^x tg(t)dt$ converge en $+\infty$ vers $E(Z)$ et $v(x)$ converge vers 0. D'où $\int_0^{+\infty} R_Z(t)dt$ converge et vaut $E(Z)$, ce qui donne bien :

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t)dt.$$

8. (a) Pour tout réel x positif, comme $(T > x + t) \subset (T > t)$,

$$R_{T_t}(x) = P_{[T>t]}(T > t + x) = \frac{P([T > t] \cap [T > t + x])}{P(T > t)} = \frac{P(T > x + t)}{P(T > t)} = \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)}$$

(b) Il faut prouver que T_t admet une espérance pour utiliser le résultat ci-dessus. Puisque T_t est trivialement positive, et $F_{T_t} = 1 - R_{T_t}$, on obtient :

$$F_{T_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1 donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, de plus elle est continue sur $\mathbb{R}$ car par continuité de R_T :

$$F_{T_t}(0) = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)} = 1 - \frac{R_T(t)}{R_T(t)} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} 0 = 0.$$

On en déduit que T_t est à densité, et une densité de T_t est donnée par :

$$f_{T_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{f_T(t+x)}{R_T(t)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Enfin comme l'intégrale sur $\mathbb{R}_-$ est nulle, sous réserve de convergence absolue et avec le changement de variable $v = x + t$ et la linéarité de l'intégrale on a :

$$\begin{aligned}E(T_t) &= \int_0^{+\infty} x\frac{f_T(t + x)}{R_T(t)}dx = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} (v - t)f_T(v)dv \\ &= \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} vf_T(v)dv - \frac{t}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} f_T(v)dv\end{aligned}$$

Or la première intégrale converge absolument car T admet une espérance, et la seconde car T est à densité : on en déduit que T_t admet bien une espérance.

La question 7.(c) donne alors :

$$E(T_t) = \int_0^{+\infty} R_{T_t}(u)du = \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+u)du$$

et avec le changement de variable affine $v = t + u$ on obtient finalement :

$$E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(v)dv.$$

9. (a) Si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors pour tout $t \geq 0$:

$$R_T(t) = P(T > t) = e^{-\mu t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu.$$

(b) On remarque que $T = \min(T_1, T_2)$ donc avec la fin de la partie I on sait que T suit la loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + \mu_2$.
On en déduit avec la question précédente que : pour tout $t \geq 0$,

$$R_T(t) = P(T > t) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \mu_1 + \mu_2.$$

(c) On remarque que $T = \max(T_1, T_2)$ donc d'après la partie I, pour $t \geq 0$:

$$F_T(t) = 1 - e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t} + e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \quad \text{donc} \quad R_T(t) = 1 - F_T(t) = e^{\mu_1 t} + e^{\mu_2 t} - e^{-(\mu_1+\mu_2)t}.$$

10. (a) $\varphi_{n,\beta}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et sur $]-\infty; 0[$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en 0.
De plus on a $\varphi_{n,\beta}(t) = \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \times \beta t^{n-1} e^{-\beta t}$.
On calcule $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt$; on reconnaît l'intégrale définissant l'espérance de X^{n-1} où X suit une loi exponentielle de paramètre β, donc on sait que cette intégrale converge absolument et :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt = \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} = 1.$$

De plus l'intégrale de $-\infty$ à 0 de $\varphi_{n,\beta}$ converge et vaut 0 car c'est l'intégrale de la fonction nulle.
On obtient finalement que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt = 1$ donc $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité.

(b) On a par définition :

$$R_T(t) = P(T > t) = \int_t^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(u)du = 1 - \int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)du.$$

On montre alors le résultat par récurrence sur $n \geq 1$:

Ini. Pour $n = 1$, $\varphi_{1,\beta}(t) = \beta e^{-\beta t}$ donc on reconnaît la loi exponentielle de paramètre β, et on a vu :

$$R_T(t) = e^{-\beta t}$$

Or on calcule facilement :

$$e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{0} \frac{(\beta t)^k}{k!} = e^{-\beta t}$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Héré. Soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété soit vraie pour $\varphi_{n,\beta}$, on a alors :

$$\int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)\ du = 1 - e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

Calculons R_T pour $\varphi_{n+1,\beta}$:

$$R_T(t) = 1 - \frac{\beta^n}{n!} \int_0^t u^n \times \beta e^{-\beta u} du.$$

On pose

$$v = u^n \quad \text{et} \quad w = -e^{-\beta u}$$

qui sont de classe C^1 sur $[0;t]$ avec :

$$v' = nu^{n-1} \quad \text{et} \quad w' = \beta e^{-\beta u}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} R_T(t) &= 1 - \frac{\beta^n}{n!}\left(\left[-u^n e^{-\beta u}\right]_0^t + n\int_0^t u^{n-1} e^{-\beta u} du\right) \\ &= 1 + \frac{\beta^n}{n!} \times t^n e^{-\beta t} - 0 - \int_0^t \frac{\beta}{(n-1)!}(\beta u)^{n-1} e^{-\beta u} du \\ &= 1 + e^{-\beta t}\frac{(\beta t)^n}{n!} - \left[1 - e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta t)^k}{k!}\right] \\ &= 1 - 1 + e^{-\beta t}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta t)^k}{k!} + \frac{(\beta t)^n}{n!}\right] \\ &= e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\beta t)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ccl. Pour tout $n \geq 1$, si T suit la loi d'Erlang de paramètres n et β, on a :

$$R_T(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

11. (a) La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est positive et continue sur $[0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en 0.
Son intégrale de $-\infty$ à 0 converge et vaut 0 car c'est l'intégrale de la fonction nulle.
Pour $x \geq 0$, on considère

$$\int_0^x \psi_{\beta,\eta}(t)\ dt = \left[-e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\right]_0^x = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

donc l'intégrale de 0 à $+\infty$ et par suite l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ convergent et valent toutes deux 1.
La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est donc une densité de probabilité.

(b) On a vu qu'on sait primitiver $\psi_{\beta,\eta}$, on peut donc calculer, avec $t \geq 0$:

$$R_T(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - \int_{-\infty}^0 0\ dx - \int_0^t \psi_{\beta,\eta}(x)\ dx = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\right) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}.$$

On en déduit que pour tout $t \geq 0$,

$$\lambda(t) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}.$$

(c) $\frac{\beta}{\eta}$ et $\frac{1}{\eta}$ sont des constantes strictement positives, la limite dépend de la constante $\beta - 1$ qui peut être nulle :

- Si $\beta = 1 \iff \beta - 1 = 0$, alors

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{1}{\eta}.$$

(On retrouve à nouveau le cas de la loi exponentielle, car pour $\beta = 1$, la loi de Weibull est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\eta}$).

- Si $\beta > 1 \iff \beta - 1 > 0$, alors

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty.$$

12. (a) Le théorème de transfert donne la formule immédiatement, à condition de prouver la convergence absolue de la série.

Or pour tout $s \in [0;1]$, et pour tout $k \geq 0$, on a :

$$0 \leq s \leq 1 \Rightarrow 0 \leq s^k \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(N_u = k)s^k \leq P(N_u = k)$$

et la série de terme général $P(N_u = k)$ converge absolument (c'est la somme des probabilités sur un système complet d'évènement, la série vaut même 1) donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série cherchée converge absolument.

On en déduit finalement que $G_u(s)$ existe pour tout $s \in [0;1]$ et :

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k)s^k.$$

(b) Par définition de G et en faisant apparaître astucieusement les hypothèses données par l'énoncé :

$$G_{u+v}(s) = E\left(s^{N_{u+v}}\right) = E\left(s^{N_u + (N_{u+v} - N_u)}\right) = E\left(s^{N_u} s^{(N_{u+v} - N_u)}\right).$$

Or les variables N_u et $(N_{u+v} - N_u)$ sont indépendantes d'après l'énoncé, donc par lemme des coalitions s^{N_u} et $s^{N_{u+v} - N_u}$ le sont aussi donc :

$$G_{u+v}(s) = E\left(s^{N_u}\right) E\left(s^{(N_{u+v} - N_u)}\right) = G_u(s) E\left(s^{(N_{u+v} - N_u)}\right).$$

L'énoncé dit aussi que $N_{u+v} - N_u$ suit la même loi que $N_{(u+v)-u} = N_v$ donc

$$E\left(s^{(N_{u+v} - N_u)}\right) = E(s^{N_v}) = G_v(s)$$

et enfin

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s).$$

13. (a) On fait apparaître un terme strictement positif dans la somme (le premier) :

$$G_1(s) = E(s^{N_1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k)s^k = P(N_1 = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_1 = k)s^k.$$

Or $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(N_1 = k)s^k \geq 0$ donc $G_1(s) \geq P(N_1 = 0) > 0$ d'après l'énoncé.

(b) Une récurrence immédiate donne

$$G_{\sum_{i=1}^{n} u_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} G_{u_i}(s)$$

donc en posant $u_1 = \cdots = u_k = 1$,

$$G_k(s) = \prod_{i=1}^{k} G_1(s) = G_1(s)^k = e^{k \ln G_1(s)} = e^{-k\theta(s)}.$$

(c) De même en utilisant la propriété énoncée au début de la question b,

$$G_1(s) = G_{\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q.$$

D'où

$$G_{\frac{1}{q}}(s) = G_1(s)^{\frac{1}{q}} = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.$$

(d) On fait la même opération sur

$$G_p(s) = G_{\sum_{i=1}^{q} \frac{p}{q}}(s) = \left(G_{\frac{p}{q}}(s)\right)^q$$

donc

$$\psi(r) = (\psi(p))^{\frac{1}{q}} = \left(e^{-p\theta(s)}\right)^{\frac{1}{q}} = e^{-\frac{p}{q}\theta(s)} = e^{-r\theta(s)}.$$

(e) Question très difficile, qui utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Celle-ci dit que pour tout réel u, il existe deux suites u_n et v_n de rationnels adjacentes ayant pour limite u. On a donc pour tout n,

$$u_n \leq u \leq v_n.$$

De plus l'énoncé dit que la fonction $u \to N_u$ est croissante.
D'où pour tous $u \leq v$ on a, avec $s \leq 1$ donc $\ln(s) \leq 0$:

$$N_u \leq N_v \Rightarrow \ln(s)N_u \geq \ln(s)N_v \Rightarrow e^{\ln(s)N_u} \geq e^{\ln(s)N_v} \Rightarrow s^{N_u} \leq s^{N_v} \Rightarrow E(s^{N_u}) \geq E(s^{N_v}).$$

Enfin on en déduit que

$$u \leq v \Rightarrow G_u(s) \geq G_v(s) \Rightarrow \psi(u) \geq \psi(v)$$

et la fonction ψ est décroissante, ce qui permet d'écrire :

$$u_n \leq u \leq v_n \Rightarrow \psi(u_n) \geq \psi(u) \geq \psi(v_n)$$

Comme u_n et v_n sont des rationnels on a pour tout n,

$$\psi(u_n) = e^{-u_n\theta(s)} \quad \text{et} \quad \psi(v_n) = e^{-v_n\theta(s)}$$

Comme le réel s est fixé, la fonction $u \to e^{-u\theta(s)}$ est continue et on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-u_n\theta(s)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-v_n\theta(s)} = e^{-u\theta(s)} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \psi(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \psi(v_n) = e^{-u\theta(s)}.$$

Par encadrement on en déduit que

$$\psi(u) = e^{-u\theta(s)} \quad \text{et enfin} \quad G_u(s) = e^{-u\theta(s)}.$$

(f) On utilise l'équivalent usuel de l'exponentielle, avec $h \to 0 \Rightarrow -h\theta(s) \to 0$ (avec s fixé) :

$$\frac{G_h(s)-1}{h} = \frac{e^{-h\theta(s)}-1}{h} \underset{0}{\sim} \frac{-h\theta(s)}{h} = -\theta(s) \xrightarrow[h\to 0, h>0]{} -\theta(s).$$

14. On part du côté droit, plus compliqué, et on simplifie :

$$\begin{aligned} P(N_h=1)(s-1)+\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_h=k)s^k - \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_h=k) \\ &= \left[G_h(s) - P(N_h=0)\times s^0\right] - [1-P(N_h=0)] \\ &= G_h(s) - 1 - P(N_h=0) + P(N_h=0) \\ &= G_h(s)-1. \end{aligned}$$

15. Comme on ne peut pas échanger la limite et la somme infinie, on procède par encadrement :

$$0 \le s \le 1 \Rightarrow \forall k \ge 2,\ \ 0 \le s^k \le 1 \Rightarrow \forall k \ge 2,\ \ -1 \le s^k - 1 \le 0$$

puis on somme les inégalités pour k allant de 2 à $+\infty$ et on divise par $h>0$:

$$\begin{aligned} 0 \le s \le 1 \quad &\Rightarrow \quad -\frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)}{h} \le \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} \le 0 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{P(N_h>1)}{h} \le \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} \le 0 \end{aligned}$$

et l'énoncé dit que le terme de gauche de l'encadrement tend vers 0 lorsque h tend vers 0^+ donc par encadrement :

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} = 0.$$

16. (a) D'après la question 14,

$$\begin{aligned} \frac{G_h(s)-1}{h} &= \frac{P(N_h=1)(s-1)+\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} \\ &= \frac{P(N_h=1)(s-1)}{h} + \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h}. \end{aligned}$$

On en déduit avec la question 15 que :

$$\frac{P(N_h=1)(s-1)}{h} = \frac{G_h(s)-1}{h} - \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} \xrightarrow[h\to 0, h>0]{} -\theta(s) - 0 = -\theta(s).$$

D'où on tire que si $s-1 \neq 0 \Leftrightarrow s \neq 1$,

$$\frac{P(N_h=1)}{h} \xrightarrow[h\to 0, h>0]{} -\frac{\theta(s)}{s-1} = \frac{\theta(s)}{1-s}$$

et cette limite, notée α, est positive puisque c'est la limite d'un quotient de facteurs positifs et vérifie bien pour $s \in [0;1[$:

$$\theta(s) = \alpha(1-s).$$

Si $s = 1$, il faut prouver que $\theta(1) = 0$ pour généraliser la relation. Or

$$G_1(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k)1^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k) = 1$$

donc

$$\theta(1) = -\ln(G_1(1)) = -\ln(1) = 0.$$

On obtient bien qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{h\to 0, h>0} \frac{P(N_h=1)}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0, 1]$, $\theta(s) = \alpha(1 - s)$.

(b) On calcule :

$$G_u(0) = P(N_u = 0) \times 0^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_u = k) \times 0^k = P(N_u = 0)$$

et l'énoncé donne

$$\forall u > 0, \quad 0 < P(N_u = 0) < 1.$$

On en déduit que

$$0 < G_1(0) < 1 \Rightarrow \ln(G_1(0)) < 0 \Rightarrow \theta(0) = -\ln(G_1(0)) > 0.$$

Enfin on remarque qu'en posant $s = 0$, on a :

$$\theta(0) = \alpha(1 - 0) = \alpha > 0.$$

17. (a) On a $\theta(s) = \alpha(1 - s)$ donc :

$$G_u(s) = e^{-u\theta(s)} = e^{-u\alpha(1-s)} = e^{-\alpha u}e^{\alpha su}.$$

Or la série exponentielle prise en $x = \alpha su$ donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha su)^k}{k!} = e^{\alpha su}$$

donc pour tout $s \in [0; 1]$,

$$G_u(s) = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha su)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k.$$

(b) On a obtenu : pour tout $s \in [0; 1]$, en posant X qui suit la loi de Poisson de paramètre (αu) : on a $N_u(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)s^k.$$

Cela n'assure pas forcément que les termes de la série sont égaux deux à deux. L'idée pour l'obtenir est de poser $s = 0$, qui donne les termes $s = 0$ égaux.

Puis on retire ces termes, on divise par s (pour $s > 0$) et on prend la limite lorsque s tend vers 0 (d'une somme infinie, donc par encadrement), qui donne l'égalité pour $s = 0$.

Enfin on prend $s = 0$ et les termes 1 sont égaux, puis on réitère.... ce qui se traite rigoureusement par récurrence.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P(N_u = i) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^i}{i!}$.

Ini. On prend la relation précédente pour $s = 0$. Tous les termes pour $k \geq 1$ s'annulent en on obtient $P(N_u = 0) = P(X = 0)$.

Héré. On suppose que pour tout $k \leq i$ (récurrence forte), $P(N_u = k) = P(X = k)$.
On obtient alors en retirant les termes égaux que pour tout $s \in [0;1]$:

$$\sum_{k=i+1}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=i+1}^{+\infty} P(X = k)s^k$$

Pour tout $s > 0$ (pour pouvoir diviser) on en déduit que :

$$\sum_{k=i+1}^{+\infty} P(N_u = k)s^{k-i-1} = \sum_{k=i+1}^{+\infty} P(X = k)s^{k-i-1}$$

et on sépare le premier terme de chaque somme et on isole la probabilité cherchée :

$$P(N_u = i+1) = P(X = i+1) + s\left(\sum_{k=i+2}^{+\infty} P(X = k)s^{k-i-2} - \sum_{k=i+2}^{+\infty} P(X = k)s^{k-i-2}\right)$$

Or, sur le modèle de la question 1a, on peut encadrer les séries : pour Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (donc cela s'applique à X et N_u) on a ;

$$0 \leq P(Y = k)s^{k-i-2} \leq P(Y = k)$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=i+2}^{+\infty} P(Y = k)s^{k-i-2} \leq \sum_{k=i+2}^{+\infty} P(Y = k) \leq 1.$$

Donc on obtient que :

$$-1 \leq \left(\sum_{k=i+2}^{+\infty} P(X = k)s^{k-i-2} - \sum_{k=i+2}^{+\infty} P(X = k)s^{k-i-2}\right) \leq 1$$

puis

$$-s \leq s\left(\sum_{k=i+2}^{+\infty} P(X = k)s^{k-i-2} - \sum_{k=i+2}^{+\infty} P(X = k)s^{k-i-2}\right) \leq s$$

et par encadrement, le terme central tend vers 0 lorsque s tend vers 0, ce qui donne finalement :

$$P(N_u = i+1) = P(X = i+1)$$

et la propriété est vraie au rang $i+1$.

Ccl. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(N_u = k) = P(X = k)$$

et N_u suit la même loi que X, donc la loi de Poisson de paramètre (αu).

18. $(T > t) = (N_t = 0)$ donc pour tout t on a :

$$P(T > t) = P(N_t = 0) = e^{-\alpha t} \quad \text{donc} \quad P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t}.$$

D'autre part $P(T \leq t) = 0$ si $t \leq 0$ car il ne peut pas y avoir de panne avant l'instant de mise en marche.

On reconnaît bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre α.

19. (a) N_{t+h} est le nombre de panne à l'instant $t+h$ et N_t le nombre de pannes à l'instant t donc $N_{t+h} - N_t$ représente bien le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t; t+h]$.
    (b) Question pas difficile mais fastidieuse.
    L'énoncé dit que $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ suit la même loi que N_h, et on obtient, une par une, toutes les propriétés du processus de Poisson à l'aide de celles vérifiées par N_h.

(c) On applique la question 7 à la famille $(\tilde{N}_h)_{h\geq 0}$ et on obtient le résultat.

(d) Question mal posée : le taux de défaillance du système après t n'a jamais été défini, et sur ce système, les pannes sont réparées, contrairement au cas où on avait défini le taux de défaillance du système.

Il faut comprendre que la taux de défaillance après t est le taux de défaillance de la variable T_t définie à la question II5.

Or T puis T_t suivent des lois exponentielles de paramètre α (remarquer que $T_t = \tilde{T}$), donc le taux de défaillance est constant égal à α (question II6a).