Correction - AP 18

Réduction - Variables poissoniennes

Exercice 1 (HEC 2010)

1. E est de dimension $n+1$ et sa base canonique est la famille $(P_0, P_1, P_2, ..., P_n)$ où $P_i(x) = x^i$.

2. Pour tous $P, Q \in E$ et tout réel λ,
$$d(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda d(P) + d(Q)$$
donc d est linéaire.

   De plus pour tout $P \in E$, $deg(P) \leq n$ donc $deg(d(P)) = deg(P') \leq n-1$, et $d(P) \in E$, donc d est une application linéaire de E dans E, donc un endomorphisme de E.

3. $P \in Ker(d) \Leftrightarrow d(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P = constante$.

   Ainsi, $Ker(d) = \mathbb{R}_0[X]$ et $dim(Ker(d)) = 1$.

   Par théorème du rang, on a donc $dim(Im(d)) = dim(\mathbb{R}_n[X]) - dim(Ker(d)) = n$. Or on remarque que $Im(d) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car pour tout $P \in E$, $deg(d(P)) = deg(P') \leq n-1$.

   Comme $Im(d) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension, on a donc $Im(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. On écrit la matrice A de d dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de E :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On remarque qu'elle est triangulaire supérieure avec des coefficients tous nuls sur la diagonale donc $Sp(A) = \{0\}$. Si A est diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle donc elle serait nulle ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable.

5. (a) $d^k(P) = d(d(....d(P))) = P^{(k)}$.
   Donc $P \in Ker(d^k) \Leftrightarrow P^{(k)} = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Donc $Ker(d^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.
   Soit enfin $P \in d(Ker(d^k))$, alors il existe Q dans $Ker(d^k)$ tel que $P = d(Q)$.
   On en déduit que $d^k(P) = d^k(d(Q)) = d^{k+1}(Q) = d(d^k(Q)) = d(0) = 0$, et $P \in Ker(d^k)$.
   On en déduit bien que $d(Ker(d^k)) \subset Ker(d^k)$.

   (b) Si $deg(P) = r$, on a de manière évidente pour tout $k \in [\![0; r]\!]$, $deg(d^k(P)) = r - k$ (donc aucun n'est nul puisque le degré minimal est 0, qui représente une constante non nulle).
   La famille $(d^0(P), d^1(P), \ldots, d^r(P))$ est donc une famille de F (car F est stable par d et $P \in F$) étagée en degré. C'est donc une famille libre de F.

6. (a) Soit Q un polynôme non nul de F, alors comme $dim(F) = 1$, $F = Vect(Q)$.
   On a alors $d(Q) \in F = Vect(Q)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(Q) = \lambda Q$.
   On a donc $Q' = \lambda Q$. Supposons que $\lambda \neq 0$. On a deux cas :
   - Si $Q' = 0$, alors $Q = 0$ et c'est impossible.
   - Sinon, en considérant les degrés, $deg(Q') = deg(Q)$ donc $deg(Q) - 1 = deg(Q)$ donc $-1 = 0$ ce qui est encore impossible.

Donc $\lambda = 0$ et donc $Q' = 0$ et Q est constant. On en déduit que :

$$F = Vect(Q) = Vect(P_0) = \mathbb{R}_0[X].$$

(b) Supposons que F ne contient aucun polynôme de degré supérieur ou égal à 1, alors $F \subset \mathbb{R}_0[X]$ de dimension 1 et $dim(F) \leq 1$, ce qui est absurde. On peut donc trouver un polynôme Q dans F de degré r supérieur ou égal à 1.
La question 5 montre que la famille $(d^i(Q))_{0\leq i\leq r}$ est libre, et ce sont tous des vecteurs de F puisque $d(F) \subset F$ donc :

$$Q \in F \Rightarrow d(Q) \in F \Rightarrow d^2(Q) \in F \Rightarrow \cdots \Rightarrow d^k(Q) \in F.$$

On en déduit que $r \leq 1$, sinon on obtient une famille libre de trois vecteurs ou plus dans un espace de dimension 2, ce qui est absurde.
On sait que $r \geq 1$, donc $r = 1$ et la famille $(Q, d(Q))$ est libre et de cardinal 2 donc c'est une base de F.
Enfin, comme Q est de degré 1, il s'écrit $Q = aP_1 + bP_0$ avec $a \neq 0$, donc :

$$\begin{aligned} F &= Vect(Q, d(Q)) = Vect(aP_1 + bP_0, aP_0) = Vect(aP_1 + bP_0, P_0) \\ &= Vect(aP_1, P_0) = Vect(P_1, P_0) = \mathbb{R}_1[X] \end{aligned}$$

Problème : ESSEC II 2007

1. La société versant s pour chaque décès, au moment du bilan financier, pour Y décès elle aura du versé Ys euros.

2. Il suffirait que le nombre de décès soit indépendants d'une année sur l'autre (ce qui n'est pas le cas puisque les clients décédés ne remeurent pas ...) pour que la somme des décès suivent une loi de Poisson de paramètre la somme $k + k + k + k + k = 5k$.

3. On a alors :
$$E(Y) = V(Y) = 5k.$$

4. La fonction $\Phi : t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$, fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, est continue sur $\mathbb{R}$, vaut $\frac{1}{2}$ en 0 et tend vers 1 en $+\infty$.
De plus elle est dérivable et sa dérivée est :
$$\Phi'(t) = \varphi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0.$$
Donc Φ est strictement croissante et continue, bijective de $]0; +\infty[$ dans $\left]\lim_0 \Phi\ ;\ \lim_{+\infty} \Phi\right[= \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.
Et comme $0,99 \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$, il existe un unique $t_0 > 0$ tel que :
$$\Phi(t_0) = 0,99 \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{t_0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = 0,99.$$

5. Il s'agit clairement d'utiliser ici le théorème central limite; la difficulté est que Y n'est pas la somme de k variables (avec k tend vers $+\infty$), mais de 5 variables. On va poser une autre variable, de même loi que Y, mais pour laquelle on échange les rôles de k et 5 :

Soient k variables $(X_i)_i$ indépendantes de même loi $\mathcal{P}(5)$. Alors

$$Z = \sum_{i=1}^{k} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(5k).$$

Comme $V(X_i) \neq 0$, $V(Z) \neq 0$ et par théorème central limite, la variable centrée réduite associée,

$$Z^* = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{V(Z)}} = \frac{Z - 5k}{\sqrt{5k}}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ quand k tend vers $+\infty$. On en déduit (Y et Z suivent la même loi) que :

$$\begin{aligned} P\left(Y - 5k > t_0\sqrt{5k}\right) &= P\left(Z - 5k > t_0\sqrt{5k}\right) = P(Z^* > t_0) = 1 - P(Z^* \leq t_0) \\ &\xrightarrow[k\to+\infty]{} 1 - \Phi(t_0) = 0,01. \end{aligned}$$

6. Pour faire face à toutes les indemnisations, il faut et il suffit que les sommes en caisse soient supérieures ou égales aux sommes à débourser :

   - Les sommes en caisses sont les cotisations et les fonds de réserve : $5sk(1+\lambda) + R$.
   - Les dépenses sont les indemnisations : sY.

   Donc il faut il suffit que $5sk(1+\lambda) + R \geq sY$.

7. "la société peut faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de 5 ans" est l'événement :

$$A = [5sk(1+\lambda) + R \geq sY] = \left[5k(1+\lambda) + \frac{R}{s} \geq Y\right] = \left[5k\lambda + \frac{R}{s} \geq Y - 5k\right]$$

   dont la probabilité vaut $0,99$ pour

$$5k\lambda + \frac{R}{s} = t_0\sqrt{5k} \iff R = s(t_0\sqrt{5k} - 5k\lambda)$$

8. Pour que la société puisse se dispenser d'un fond de réserve pour un exercice de 5 ans tout en maintenant à plus de 99%, il suffit que la réserve précédente soit négative ou nulle c'est-à-dire (avec $s > 0$) :

$$t_0\sqrt{5k} - 5k\lambda \leq 0 \iff t_0 - \lambda\sqrt{5k} \leq 0 \iff t_0 - \lambda\sqrt{5\mu N} \leq 0 \iff N \geq \frac{1}{5\mu}\left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^2.$$

   Comme N est un entier, on obtient que

$$N = \left\lfloor \frac{1}{5\mu}\left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^2 \right\rfloor + 1$$

   est le plus petit nombre de clients permettant de maintenir à 99% ou plus la probabilité de faire face à toutes les indemnisations en se dispensant de fond de réserve.

9. La fonction de répartition F de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = P(X \leq x).$$

10. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. $X(\Omega) = \{0,1\}$ donc :

- Si $m < 0$ alors $P(X < m) = P(X \leq m) = P(\emptyset) = 0$.
- Si $m = 0$ alors $P(X < m) = P(\emptyset) = 0$ et $P(X \leq m) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$.
- Si $m \in]0, 1[$ alors $P(X < m) = P(X \leq m) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$.
- Si $m = 1$ alors $P(X < m) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X \leq m) = P(\Omega) = 1$.
- Enfin, si $m > 1$ alors $P(X < m) = P(X \leq m) = P(\Omega) = 1$.

$P(X < m) \leq \frac{1}{2}$ est vraie pour $m \leq 1$, et $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ est vraie pour $m \geq 0$, on obtient donc :

$$\mathcal{M}(X) = [0, 1].$$

11. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ de fonction de répartition

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Comme X est à densité, on sait que pour tout $m \in \mathbb{R}$:

$$P(X < m) = P(X \leq m) = F_X(m)$$

et on en déduit que :

$$m \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow F_X(m) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(m) \Leftrightarrow F_X(m) = \frac{1}{2}$$

et comme F_X est nulle sur $\mathbb{R}_-$, cette équation n'a aucune solution sur $\mathbb{R}_-$ donc :

$$m \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ F_X(m) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 1 - e^{-\alpha m} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ -\alpha m = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m = \frac{\ln(2)}{\alpha} \end{cases}$$

et cette solution est bien positive, donc on obtient finalement :

$$\mathcal{M}(X) = \left\{\frac{\ln(2)}{\alpha}\right\}.$$

12. Soient $a \in \mathcal{M}(X)$ et $b \in \mathcal{M}(X)$ avec $a \leq b$.
Si $c \in [a, b]$, alors

$$(X < a) \subset (X < c) \subset (X < b) \quad \text{et} \quad (X \leq a) \subset (X \leq c) \subset (X \leq b)$$

et comme a et b sont dans $\mathcal{M}(X)$ on obtient :

$$P(X < a) \leq P(X < c) \leq P(X < b) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq a) \leq P(X \leq c) \leq P(X \leq b)$$

et en particulier :

$$P(X < c) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq c)$$

donc $c \in \mathcal{M}(X)$.

13. Supposons que X possède une densité f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x réel.
Comme X est à densité, on obtient de nouveau

$$P(X < m) = P(X \leq m) = F_X(m) \quad \text{donc} \quad m \in \mathcal{M}(X) \Longleftrightarrow F_X(m) = \frac{1}{2}.$$

De plus comme f, densité de X, est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive, F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$F_X'(x) = f(x) > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

La fonction F_X est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ (c'est une fonction de répartition), donc F_X réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$.
Enfin $\frac{1}{2} \in]0;1[$, donc l'équation $F_X(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution m sur $\mathbb{R}$, et on a bien :

$$\mathcal{M}(X) = \{m\}.$$

De plus pour une loi normale centrée réduite, on sait que :

$$F_X(0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

donc 0 est une solution, et d'après ce qui précède c'est la seule donc :

$$\mathcal{M}(X) = \{0\}.$$

14. On teste cette propriété sur les lois usuelles étudiées précédemment : elle est vraie pour la loi uniforme sur $\{0;1\}$ ($E(X) = \frac{1}{2} \in [0;1]$) et la loi normale centrée réduite ($E(X) = 0 \in \{0\}$), mais fausse pour la loi exponentielle de paramètre α car :

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} \notin \left\{\frac{\ln(2)}{\alpha}\right\} \quad \text{car} \quad \ln(2) \neq 1.$$

On a trouvé un contre-exemple, cette propriété est donc fausse.

15. Pour tout $x \in [0;1]$ la fonction g définie par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{4}$ est dérivable et :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{2 - 2(1+x) + x(1+x)}{2(1+x)} = \frac{-x + x^2}{2(1+x)} = \frac{x(x-1)}{2(1+x)} \leq 0$$

sur $[0;1]$, donc g est décroissante sur $[0;1]$.
De plus on a $g(0) = 0$ donc $g(x) \leq g(0) = 0$ sur $[0;1]$, et enfin

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4} \quad \text{sur } [0;1].$$

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-n-1}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{e^{-n}\frac{n^n}{n!}} = e^{-1}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)}}{n^n} = e^{-1}\frac{(n+1)^n}{n^n} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

17. En prenant le ln de l'inverse du quotient précédent (strictement positif) on obtient :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = -n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 \geq -n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}\right) + 1 = \frac{1}{4n} \geq 0.$$

Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{4n}$ est divergente (Riemann) donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ est divergente vers $+\infty$.

18. On remarque que la série précédente se télescope :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \big[\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big] + \ln(u_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Enfin par composition de limites :

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est le produit d'un polynôme de classe C^2 et de la composée de l'exponentielle et d'un polynôme, de classe C^2. Elle est donc de classe C^2 et de plus :

$$P_n'(\lambda) = -e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = -e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

On obtient ensuite :

$$P_n''(\lambda) = -\left[-\lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + ne^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{n!}\right] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{n!}(\lambda - n).$$

20. On calcule :

$$\begin{aligned} P_n(n-1) + P_n'(n-1) &= e^{-(n-1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)^k}{k!} - e^{-(n-1)}\frac{(n-1)^n}{n!} = e^{-(n-1)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)^k}{k!} \\ &= P_{n-1}(n-1). \end{aligned}$$

21. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule $\int_{n-1}^{n}(n-t)Q''(t)\,dt$ par intégration par parties : en posant

$$u = (n-t) \quad \text{et} \quad v = Q'(t)$$

qui sont de classe C^1 sur $[n-1;n]$ (car Q est de classe C^2 donc Q' est de classe C^1), avec :

$$u' = -1 \quad \text{et} \quad v' = Q''(t)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^{n}(n-t)Q''(t)\,dt &= \left[\,(n-t)Q'(t)\,\right]_{n-1}^{n} + \int_{n-1}^{n}Q'(t)\,dt \\ &= 0 - [n-(n-1)]Q'(n-1) + \left[\,Q(t)\,\right]_{n-1}^{n} \\ &= -Q'(n-1) + Q(n) - Q(n-1) \end{aligned}$$

et on en déduit bien que :

$$Q(n) = Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^{n}(n-t)Q''(t)\,dt.$$

(b) On commence par appliquer (E) à $Q = P_n$ (qui est bien de classe C^2), on obtient :

$$P_n(n) = P_n(n-1) + P_n'(n-1) + \int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,dt$$

On pose ensuite $v_n = P_n(n)$, et avec la relation précédente qui concerne n et $n-1$ on cherche alors le signe de $v_n - v_{n-1}$ (pour $n \geq 2$) :

$$v_n - v_{n-1} = P_n(n) - P_{n-1}(n-1) = P_n(n-1) + P_n'(n-1) - P_{n-1}(n-1) + \int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,dt$$

Or d'après la question 20, on sait que

$$P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1)$$

il reste donc :

$$v_n - v_{n-1} = \int_{n-1}^{n}(n-t)e^{-t}\frac{t^{n-1}}{n!}(t-n)\,dt = -\int_{n-1}^{n}(n-t)^2e^{-t}\frac{t^{n-1}}{n!}\,dt \leq 0$$

car tous les facteurs dans l'intégrale sont positifs, la fonction intégrée est donc positive par produit, et l'intégrale est positive par positivité de l'intégrale avec des bornes dans l'ordre croissant.
On en déduit que la suite $(v_n) = (P_n(n))$ est décroissante.

(c) Avec $Q = P_{n-1}$ on obtient :

$$P_{n-1}(n) = P_{n-1}(n-1) + P'_{n-1}(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t)P''_{n-1}(t)\ dt$$

On pose ensuite $w_n = P_{n-1}(n)$ et on cherche le signe de $w_n - w_{n-1}$ (pour $n \geq 2$) :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= P_{n-1}(n) - P_{n-2}(n-1) \\ &= P_{n-1}(n-1) + P'_{n-1}(n-1) - P_{n-2}(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t)P''_{n-1}(t)\ dt \end{aligned}$$

Or sur le modèle de la question 20, on calcule :

$$\begin{aligned} P_{n-1}(n-1) + P'_{n-1}(n-1) &= e^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)^k}{k!} - e^{-(n-1)} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)^k}{k!} = P_{n-2}(n-1). \end{aligned}$$

Il reste donc :

$$w_n - w_{n-1} = \int_{n-1}^{n} (n-t)e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}[t-(n-1)]\ dt \geq 0$$

car pour tout $t \in [n-1; n]$,

$$t \geq n-1 \Longrightarrow t-(n-1) \geq 0 \quad \text{et} \quad t \leq n \Longrightarrow n-t \geq 0$$

donc tous les facteurs dans l'intégrale sont positifs, la fonction intégrée est donc positive par produit, et l'intégrale est positive par positivité de l'intégrale avec des bornes dans l'ordre croissant.
On en déduit que la suite $(w_n) = (P_{n-1}(n))$ est croissante.

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(n) - P_{n-1}(n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} - e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = e^{-n} \frac{n^n}{n!} = u_n.$$

On a vu que (u_n) tend vers 0 au préliminaire, donc la suite (v_n) est décroissante, la suite (w_n) est croissante, et leur différence tend vers 0 : elles sont donc adjacentes.

23. On calcule :

$$P\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P(Z-n \leq 0) = P(Z \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P(Z=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!} = P_n(n).$$

Or, sur le même principe qu'à la partie I, $\frac{Z-n}{\sqrt{n}}$ peut être considérée comme somme centrée réduite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{P}(1)$, donc converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

On en déduit alors que

$$P_n(n) = P\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

24. Comme $(P_n(n))_{n \geq 1}$ et $(P_{n-1}(n))_{n \geq 1}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite. Donc

$$P_{n-1}(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

25. La suite $(P_n(n))$ est décroissante donc minorée par sa limite, et la suite $(P_{n-1}(n))$ est croissante donc majorée par sa limite. Donc pour tout $n \geq 1$,

$$P_{n-1}(n) \leq \frac{1}{2} \leq P_n(n).$$

26. On a déjà vu que

$$P_n(n) = P(Z \leq n) \geq \frac{1}{2}.$$

Comme Z ne prend que des valeurs entières,

$$P(Z < n) = P(Z \leq n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = P_{n-1}(n).$$

L'encadrement précédent se réécrit donc :

$$P(Z < n) \leq \frac{1}{2} \leq P(Z \leq n) \Longleftrightarrow n \in \mathcal{M}(Z).$$

27. La stratégie qui consisterait à choisir $\lambda = 0$ ne ferait rien gagner en moyenne à la société, ce qui est d'emblée problématique.

Avec la médiane on peut affiner cette impression : si $\lambda = 0$, les cotisations annuelles valent ks et les primes payées valent sY, donc le gain algébrique de l'entreprise vaut $s(Y - 5k)$.

On sait d'après ce qui précède sur la médiane que :

$$P(Y < 5k) \leq \frac{1}{2} \leq P(Y \leq 5k) \quad \Leftrightarrow \quad P(sY < 5ks) \leq \frac{1}{2} \leq P(sY \leq 5ks)$$

donc la probabilité que l'entreprise ait un gain négatif, donc doive recourir à ses réserves pour subsister, est supérieure à $\frac{1}{2}$ (ce qui est bien entendu inacceptable).

28. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$,

$$(S_J - S_i < 0) = \left(\sum_{j=i+1}^{J} (X_j - k) < 0 \right) = \left(\sum_{j=i+1}^{J} X_j < (J-i) \times k \right).$$

et de même pour l'inégalité large.

Et comme les (X_j) sont indépendantes,

$$Z = \sum_{j=i+1}^{J} X_j \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{j=i+1}^{J} k \right) = \mathcal{P}\left((J-i) \times k \right).$$

Le résultat de la partie 3 nous dit alors que $(J-i) \times k$ en est une médiane donc :

$$P(Z < (J-i) \times k) \leq \frac{1}{2} \leq P(Z \leq (J-i) \times k) \Longleftrightarrow P(S_J - S_i < 0) \leq \frac{1}{2} \leq P(S_J - S_i \leq 0).$$

Enfin 0 est bien une médiane de $S_J - S_i$.

29. On remarque que pour $i \in [\![1; J]\!]$, Ω_i est l'évènement :

$$\Omega_i : \text{" Le plus petit indice } j \in [\![1; J]\!] \text{ pour lequel } S_j \text{ dépasse } x \text{ est } i. \text{ "}$$

et de même, Ω_0 est l'évènement :

$$\Omega_0 : \text{" } S_j \text{ ne dépasse } x \text{ pour aucun des } j \in [\![1;J]\!]. \text{ "}$$

On en déduit que l'un de ces évènements est toujours vérifié et que deux d'entre eux ne peuvent survenir en même temps, c'est-à-dire :

$$\bigcup_{i=0}^{J} \Omega_i = \Omega \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \in [\![0;J]\!], \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$$

donc $(\Omega_i)_{i\in[\![0;J]\!]}$ est un système complet d'évènements.

30. On peut écrire :

$$\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i = \{S_J \geq S_i\} \cap \left\{ \max_{1\leq j<i} \leq x \right\} \cap \{S_i > x\}$$

Or lorsque cet évènement est vérifié, on a alors :

$$S_J \geq S_i > x$$

donc l'évènement $(S_J > x)$ est vérifié et Ω_i l'est aussi trivialement, donc leur intersection l'est également :

$$\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i \subset \{S_J > x\} \cap \Omega_i.$$

31. Avec le système complet d'évènements $(\Omega_i)_{0\leq i\leq J}$ les probabilité totales donnent :

$$P(S_J > x) = \sum_{i=0}^{n} P([S_J > x] \cap \Omega_i).$$

Or Ω_0 signifie qu'aucun des X_j, pour j entre 1 et J, n'a dépassé x, donc

$$(S_J > x) \cap \Omega_0 = \emptyset \quad \text{donc} \quad P([S_J > x] \cap \Omega_0) = 0$$

et la question précédente montre que pour tout $i \in [\![1;J]\!]$,

$$P([S_J > x] \cap \Omega_i) \geq P([S_J - S_i \geq 0] \cap \Omega_i)$$

En sommant ces inégalités on obtient :

$$P(S_J > x) \geq \sum_{i=1}^{J} P([S_J - S_i \geq 0] \cap \Omega_i).$$

32. On remarque que

$$S_J - S_i = \sum_{j=1}^{J} Y_j - \sum_{j=1}^{i} Y_j = \sum_{j=i+1}^{J} Y_j = \sum_{j=i+1}^{J} (X_j - k)$$

est fonction uniquement des variables aléatoires $X_{i+1}, \dots, X_J$ donc l'évènement $(S_J - S_i \geq 0)$ ne dépend que de ces variables.

D'autre part pour $i \geq 1$,

$$\Omega_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} (X_j \leq x) \cap (X_i > x)$$

ne dépend que des variables $(X_1, \dots, X_i)$.

Enfin les variables $(X_j)_{1\leq j\leq J}$ sont mutuellement indépendantes, donc par lemme des coalitions, ces deux évènements sont indépendants.

33. On en déduit alors avec la question 1 et par indépendance que :

$$\sum_{i=1}^{J} P([S_J - S_i \geq 0] \cap \Omega_i) = \sum_{i=1}^{J} P(S_J - S_i \geq 0) P(\Omega_i) \geq \sum_{i=1}^{J} \frac{1}{2} P(\Omega_i) = \frac{1}{2}[1 - P(\Omega_0)] = \frac{1}{2} P(\overline{\Omega_0}).$$

Or on remarque que

$$\overline{\Omega_0} = \left(\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x \right)$$

donc par 4) on obtient :

$$P(S_J > x) \geq \frac{1}{2} P\left(\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x \right) \Longleftrightarrow \Pr\left(\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x \right) \leq 2 \Pr(S_J > x).$$

34. Cette interprétation demande une grosse modélisation, elle est totalement hors de portée d'un élève d'ECE.

On suppose que $k = 10$ (la première année ?). Si on constate après la quatrième année d'exercice que $\max\limits_{1 \leq j \leq 4} S_j$ prend la valeur 15, alors l'un des S_j a pris cette valeur.

Quelle est la probabilité qu'un tel événement survienne ? Qu'un des S_j soit supérieur à 15 ?

On peut approcher la variable centrée réduite associée à $\sum\limits_{i=1}^{j} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(jk)$ par $\mathcal{N}(0, 1)$.

Donc

$$\begin{aligned} P(S_j > 14) &= P\left(\sum_{i=1}^{j} X_j - jk > 14 \right) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > \frac{14}{\sqrt{jk}} \right) \\ &\leq P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > 2 \right) \end{aligned}$$

car $j \leq 4$ donc :

$$\frac{14}{\sqrt{jk}} \geq \frac{14}{\sqrt{4k}} = \frac{14}{\sqrt{40}} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{49}{10}} = \sqrt{4,9} > \sqrt{4} = 2$$

donc

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > \frac{14}{\sqrt{jk}} \right) \subset \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > 2 \right)$$

Finalement,

$$P(S_j = 15) \leq \Pr(S_j \geq 15) = P(S_j > 14) \leq P(T > 2) \leq \frac{2,5}{100}.$$

Donc la probabilité pour chaque S_j d'atteindre 15 est de moins de $2,5\%$, et la probabilité que l'un des 4 atteigne une telle valeur est de moins de $4 \times 2,5 = 10\%$ (formule du crible).

Il est donc ici très probable qu'un glissement ait eu lieu dans les probabilité de décès.