Correction - AP 19

Convergence, approximation et estimation

Exercice 1 (ECRICOME)

1. Montrons que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

   - La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en a.
   - Elle est positive sur $\mathbb{R}$.
   - Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 1.

     Tout d'abord, comme $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[a,+\infty[$:
     $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$$
     Soit $A > a$.
     $$\int_a^A f_{a,b}(x)dx = \int_a^A \frac{1}{b}e^{-\frac{x-a}{b}}dx = \left[-e^{-\frac{x-a}{b}}\right]_a^A = 1 - e^{-\frac{A-a}{b}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
     Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 1.

   Finalement, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Comme $X(\Omega) = [a,+\infty[$, $F_X(x) = 0$ si $x < a$.
   Si $x \geq a$, alors :
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{a,b}(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b}e^{-\frac{t-a}{b}}dt = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}.$$
   Finalement, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$.

3. Comme $X(\Omega) = [a,+\infty[$, on obtient $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc, pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.
   Si $x \geq 0$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(Y + a \leq x + a) = F_X(x+a) = 1 - e^{-\frac{x}{b}}$.
   Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{b}$ et on a :
   $$E(X) = E(Y+a) = E(Y) + a = a + b \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y+a) = b^2.$$

4. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}(a+b) = n(a+b)$.

   Les variables (X_i) sont indépendantes, donc $V(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} b^2 = nb^2$.

5. (a) Pour tout i, $X_i(\Omega) = [a,+\infty[$. Donc $Y_n(\Omega) = [a,+\infty[$ et pour tout $x < a$, $F_{Y_n}(x) = 0$.
   Si $x > a$, on a par indépendance des X_i :
   $$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_X(x)) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (e^{-\frac{(x-a)}{b}})^n = 1 - e^{-\frac{n(x-a)}{b}}. \end{aligned}$$

(b) Comme $F_{Y_n}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{-\frac{(x-a)}{b/n}} & \text{si } x \geq a. \end{array} \right.$, Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ avec $a_n = a$ et $b_n = \dfrac{b}{n}$.

(c) Avec la question 3, on obtient $E(Y_n) = a + \dfrac{b}{n}$ et $V(Y_n) = \dfrac{b^2}{n^2}$.

6. (a) On a, par linéarité de l'espérance,

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}E(S_n) - E(Y_n) = (a+b) - (a + \frac{b}{n}) = b - \frac{b}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

On dit que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de b.

(b) On a : puis avec la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} r_b(Z_n) & = & E((Z_n - b)^2) = E(Z_n^2 - 2bZ_n + b^2) \\ & = & E(Z_n^2) - 2bE(Z_n) + b^2 \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & E(Z_n^2) - (E(Z_n))^2 + (E(Z_n))^2 - 2bE(Z_n) + b^2 \\ & = & V(Z_n) + (E(Z_n) - b)^2 \quad \text{(avec Koenig-Huygens)} \\ & = & V(Z_n) + \left(b - \dfrac{b}{n} - b\right)^2 \quad \text{(avec la question précédente)} \\ & = & V(Z_n) + \dfrac{b^2}{n^2}. \end{array}$$

(c) On sait que $r_b(Z_n) = \dfrac{b^2}{n^2} + V(Z_n)$. Calculons $V(Z_n)$:

$$V(Z_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) + V(Y_n) + 2Cov\left(\frac{S_n}{n}, -Y_n\right).$$

Comme $V(S_n) = nb^2$ et $V(Y_n) = \dfrac{b^2}{n^2}$, on obtient :

$$r_b(Z_n) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n).$$

(d) On sait (cours) que $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ et que $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
Donc $-\sqrt{V(S_n)V(Y_n)} \leq Cov(S_n, Y_n) \leq \sqrt{V(S_n)V(Y_n)}$.
Donc $0 \leq (Cov(S_n, Y_n))^2 \leq V(S_n)V(Y_n)$.
On obtient ainsi $0 \leq (Cov(S_n, Y_n))^2 \leq \dfrac{b^4}{n}$.
Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (Cov(S_n, Y_n))^2 = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} Cov(S_n, Y_n) = 0$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2b^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b^2}{n} = 0$, on a, avec la question 6.(c), que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_b(Z_n) = 0$.

Exercice 2 (EML 2020)

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en b.
- Elle est positive sur $\mathbb{R}$.
- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

  Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

Soit $B > b$. Comme $a > 0$,

$$\int_b^B f(x)dx = ab^a \int_b^B x^{-a-1}dx = ab^a \left[\frac{x^{-a}}{-a}\right]_b^B = -b^a\left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Finalement, f est une densité de probabilité.

2. Comme $X(\Omega) = [b, +\infty[$, $F_X(x) = 0$ si $x < b$.
   Si $x \geq b$, alors :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_b^x a\frac{b^a}{t^{a+1}}dt = ab^a\left[\frac{t^{-a}}{-a}\right]_b^x = -b^a\left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{b^a}\right) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a.$$

   Finalement, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \end{cases}$

3. (a) Notons $h(x) = bx^{-1/a}$, de sorte que $Y = bU^{-1/a} = h(U)$. Comme $U(\Omega) =]0, 1]$ et que h est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$ (à démontrer en faisant l'étude de la fonction), on a :

$$Y(\Omega) = (h(U))(\Omega) = h(U(\Omega)) = h(]0, 1]) = [h(1), \lim_{x\to 0} h(x)[= [b, +\infty[.$$

   Ainsi, si $x < b$, $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq b$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(bU^{-1/a} \leq x) \\ &= P\left(U^{-1/a} \leq \frac{x}{b}\right) \quad \text{(car } b > 0\text{)} \\ &= P\left(U \geq \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right) \quad \text{(car } x \mapsto x^{-a} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\text{)} \\ &= 1 - P\left(U \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right) \quad \text{(car } U \text{ est à densité)} \\ &= 1 - F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \end{aligned}$$

   On $x \geq b \Rightarrow 0 < \dfrac{b}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 < \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \leq 1$ car $x \mapsto x^a$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ car $a > 0$. Comme U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, $F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right) = \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$.

   Finalement, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b. \end{cases}$

   D'après la question 2, on reconnait la fonction de répartition F_X de X qui suit la loi de Pareto de paramètre a et b. Donc Y suit la loi de Pareto de paramètre a et b.

   (b) On propose la fonction Scilab suivante :

```
def pareto(a, b)
    U = rd.random()
    X = b*(U**(-1/a))
    return(X)
```

(c) La variable `L` est un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$ où X suit une loi de Pareto de paramètres a et b.

(d) L'instruction `mystere(2,1)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$, où X suit une loi de Pareta de paramètres 2 et 1. Elles semblent de plus en plus proche de 2. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1, alors $E(X) = 2$.

L'instruction `mystere(3,2)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$, où X suit une loi de Pareta de paramètres 3 et 2. Elles semblent de plus en plus proche de 3. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2, alors $E(X) = 3$.

L'instruction `mystere(1,4)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$, où X suit une loi de Pareta de paramètres 1 et 4. Elles semblent ne pas converger vers une valeur en particulier. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4, alors elle n'admet pas d'espérance.

4. (a) X admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{b} 0dx + \int_{b}^{+\infty} \frac{ab^a}{x^a}dx = ab^a \int_{b}^{+\infty} \frac{1}{x^a}dx.$$

C'est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, qui converge si et seulement si $a > 1$.
Si $a > 1$, en posant $B > b$, on a :

$$ab^a \int_{b}^{B} \frac{1}{x^a}dx = ab^a \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right]_b^B = -\frac{ab^a}{a-1}\left(\frac{1}{B^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{ab}{a-1}.$$

Donc, si $a > 1$, $E(X) = \dfrac{ab}{a-1}$.

(b) X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} 0dx + \int_{b}^{+\infty} \frac{ab^a}{x^{a-1}}dx = ab^a \int_{b}^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}}dx.$$

C'est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, qui converge si et seulement si $a > 2$.
Si $a > 2$, en posant $B > b$, on a :

$$ab^a \int_{b}^{B} \frac{1}{x^{a-1}}dx = ab^a \left[\frac{x^{-a+2}}{-a+2}\right]_b^B = -\frac{ab^a}{a-2}\left(\frac{1}{B^{a-2}} - \frac{1}{b^{a-2}}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{ab^2}{a-2}.$$

Donc, si $a > 2$, $E(X^2) = \dfrac{ab^2}{a-2}$.
Par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{ab^2}{a-2} - \left(\frac{ab}{a-1}\right)^2 = ab^2\left(\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2}\right) = \frac{ab^2}{(a-2)(a-1)^2}.$$

5. (a) Pour tout $x \geq b$, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y_n > x) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k > x)\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) \quad \text{(car les } X_k \text{ sont indépendantes)} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(1 - F_{X_k}(x)) \\
&= (1 - F_X(x))^n \quad \text{(car les } X_k \text{ ont la même loi que } X\text{)} \\
&= \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}.
\end{aligned}$$

(b) Comme $X_k(\Omega) = [b, +\infty[$, $Y_n(\Omega) = [b, +\infty[$. Donc pour tout $x < b$, $F_{Y_n}(x) = 0$.
Si $x \geq b$, on a d'après la question précédente,

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}.$$

Finalement, $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$
D'après la question 2, on reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètre $3n$ et b. Donc Y_n suit une loi de Pareto de paramètre $3n$ et b.

(c) Par linéarité de l'espérance et avec les questions 4.(a) et 5.(b), on a :

$$E(Y'_n) = \frac{3n-1}{3n}E(Y_n) = \frac{3n-1}{3n}\frac{3nb}{3n-1} = b.$$

On dit que Y'_n est un estimateur sans biais de b.
Avec les questions 4.(a) et 5.(b), on a :

$$V(Y'_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 V(Y_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3nb^2}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{b^2}{3n(3n-2)}.$$

6. (a) Par linéarité de l'espérance et la question 4.(a) :

$$E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} \times n \times \frac{3b}{2} = \frac{3}{2}b.$$

Par indépendance des X_k et la question 4.(b) :

$$V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{3b^2}{(3-1)^2(3-2)} = \frac{3b^2}{4n}.$$

(b) On pose $Z'_n = \dfrac{2}{3}Z_n$. Par linéarité de l'espérance, $E(Z'_n) = \dfrac{2}{3}E(Z_n) = b$.
On a alors

$$V(Z'_n) = \frac{4}{9}V(Z_n) = \frac{4}{9}\frac{3b^2}{4n} = \frac{b^2}{3n}.$$

7. Les estimateurs Y'_n et Z'_n sont tous les d'espérance égale à b (on dit qu'ils sont sans biais). Ils prennent donc en moyenne la valeur b ce qui est une bonne chose (l'erreur moyenne est donc nulle).

   On compare les variances de Y'_n et Z'_n (qui mesure la dispersion des valeurs prises par Y'_n et Z'_n autour de b) :
$$V(Y'_n) - V(Z_n) = \frac{b^2}{3n(3n-2)} - \frac{b^2}{3n} = \frac{b^2(1-n)}{n(3n-2)}.$$
   Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $V(Y'_n) - V(Z_n) \leq 0$ donc $V(Y'_n) \leq V(Z_n)$ et Y'_n est un meilleur estimateur de b que Z'_n.

8. Notons $h : x \mapsto \ln(x)$ de sorte que $W_n = h(X_n)$. Comme $X_n(\Omega) = [1, +\infty[$ et que h est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$:
$$W_n(\Omega) = (h(X_n))(\Omega) = h(X_n(\Omega)) = h([1, +\infty[) = [h(1), \lim_{x\to+\infty} h(x)[= [0, +\infty[.$$
   Donc $F_{W_n}(x) = 0$ si $x < 0$.

   Si $x \geq 0$,
$$\begin{array}{rcl} F_{W_n}(x) & = & P(W_n \leq x) = P(\ln(W_n) \leq x) \\ & = & P(X_n \leq e^x) \quad \text{(par stricte croissante de exp sur } \mathbb{R}) \\ & = & F_{X_n}(e^x) \\ & = & 1 - \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^a \quad (\text{car } b = 1 \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1) \\ & = & 1 - e^{-ax}. \end{array}$$
   Donc W_n suit une loi exponentielle de paramètre a et $E(W_n) = \dfrac{1}{a}$, $V(W_n) = \dfrac{1}{a^2}$.

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à appliquer le TLC. On commence par déterminer $\overline{W_n}^*$ et la relier au T_n de l'énoncé.

   On a par linéarité de l'espérance et la question précédente :
$$E(\overline{W_n}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(W_k) = \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$
   Par indépendance des W_i et la question précédente :
$$V(\overline{W_n}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(W_k) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{1}{a^2} = \frac{1}{na^2}.$$
   Comme $\overline{W_n}$ admet une variance non nulle, $\overline{W_n}^*$ est bien définie et on a :
$$\overline{W_n}^* = \frac{\overline{W_n} - E(\overline{W_n})}{\sqrt{V(\overline{W_n})}} = \frac{M_n - \frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{na^2}}} = a\sqrt{n}(M_n - \frac{1}{a}) = \sqrt{n}(aM_n - 1) = T_n.$$
   La suite (W_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes (par le lemme des coalitions car les X_i sont indépendantes), de même loi $\mathcal{E}(a)$ et admettant une variance non nulle $\dfrac{1}{a^2}$.

   Par le TLC, T_n converge en loi vers une variable $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

(b) On cherche à démontre que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\right]\right) = 0.95$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} & P\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\right]\right) \\ = \;& P\left(\left[\sqrt{n}-2 \leq a\sqrt{n}M_n \leq \sqrt{n}+2\right]\right) \quad (\text{car } \sqrt{n}>0 \text{ et } M_n(\Omega) \subset]0,+\infty[) \\ = \;& P(-2 \leq a\sqrt{n}M_n - \sqrt{n} \leq 2) \\ = \;& P(-2 \leq T_n \leq 2). \end{aligned}$$

Comme T_n converge en loi vers une variable $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(-2 \leq T_n \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1.$$

D'après l'énoncé, $\Phi(2) \geq 0.975$ donc $2\Phi(2) - 1 \geq 0.95$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\right]\right) \geq 0.95$.

Donc l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \,;\, \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

Exercice 3 (ESSEC II 2009)

1. f est positive sur $[0;\theta]$ car $x \geq 0$ et $\theta \geq 0$ et en dehors car $0 \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

   f est continue sur $[0;\theta]$ (fonction polynôme), sur $]-\infty;0[$ et sur $]\theta;+\infty[$ car elle est constante, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en θ.

   De plus
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\int_0^\theta t^k\,dt + \int_\theta^{+\infty} 0\,dt$$
   converge bien car il y a deux intégrales de la fonction nulle et une intégrale non généralisée. Enfin :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(t)\,dt = 0 + \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^\theta + 0 = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \times \frac{\theta^{k+1}}{k+1} = 1.$$
   On en déduit que f est une densité de probabilité.

2. On considère l'intégrale :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\theta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\int_0^\theta t^{k+1}\,dt + \int_\theta^{+\infty} 0\,dt$$
   qui converge absolument car il y a deux intégrales de la fonction nulle et une intégrale non généralisée. Donc X admet une espérance et :
   $$E(X) = \int_0^\theta \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^{k+1}\,dx = \frac{(k+1)\theta^{k+2}}{(k+2)\theta^{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}\theta.$$

3. On résout l'équation (en utilisant la linéarité de l'espérance) :
   $$b = 0 \iff E(\lambda_0 X) = \theta \iff \lambda_0 \frac{k+1}{k+2}\theta = \theta \iff \lambda_0 = \frac{k+2}{k+1}.$$

4. On considère l'intégrale :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\theta(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\int_0^\theta t^{k+2}\ dt + \int_\theta^{+\infty} 0\ dt$$
qui converge absolument car il y a deux intégrales de la fonction nulle et une intégrale non généralisée. Donc X admet un moment d'ordre 2 et :
$$E(X^2) = \int_0^\theta \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^{k+2}\ dx = \frac{(k+1)\theta^{k+3}}{(k+3)\theta^{k+1}} = \frac{k+1}{k+3}\theta^2.$$
D'où X admet une variance et avec la formule de Koenig-Huyghens :
$$\begin{aligned} V(X) &= \left(\frac{k+1}{k+3} - \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}\right)\theta^2 = (k+1)\theta^2 \times \frac{(k+2)^2-(k+1)(k+3)}{(k+2)^2(k+3)} \\ &= (k+1)\theta^2 \times \frac{1}{(k+2)^2(k+3)} = \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2. \end{aligned}$$

5. On fait apparaître la définition de la variance :
$$\begin{aligned} R(T,\theta) &= E((T-\theta)^2) = E(([T-E(T)]+[E(T)-\theta])^2) \\ &= E([T-E(T)]^2 + [E(T)-\theta]^2 + 2[T-E(T)][E(T)-\theta]) \end{aligned}$$
puis par linéarité de l'espérance (remarquons que $E(T)$ et θ sont des constantes) :
$$R(T,\theta) = E([T-E(T)]^2) + b^2 + 2[E(T)-\theta][E(T)-E(T)] = V(T) + b^2.$$

6. Avec les propriétés de la variance et en se rappelant que $b(\lambda_0 X) = 0$:
$$R(\lambda_0 X,\theta) = V(\lambda_0 X) + b^2 = \lambda_0^2 V(X) + 0^2 = \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} \times \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2 = \frac{\theta^2}{(k+1)(k+3)}.$$

7. On calcule le risque quadratique :
$$R(\lambda X,\theta) = \lambda^2 V(X) + b^2 = \lambda^2 \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2 + \left(\lambda\frac{k+1}{k+2} - 1\right)^2\theta^2 = \theta^2 Q(\lambda)$$
avec :
$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2}\lambda^2 + \left(\lambda\frac{k+1}{k+2} - 1\right)^2 \\ &= \lambda^2\left(\frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}\right) - 2\frac{k+1}{k+2}\lambda + 1 \\ &= \lambda^2 \times \frac{k+1+(k+3)(k+1)^2}{(k+3)(k+2)^2} - 2\frac{k+1}{k+2}\lambda + 1 \\ &= \lambda^2 \times \frac{(k+1)\left(1+k^2+4k+3\right)}{(k+3)(k+2)^2} - 2\frac{k+1}{k+2}\lambda + 1 \\ &= \frac{k+1}{k+3}\lambda^2 - 2\frac{k+1}{k+2}\lambda + 1. \end{aligned}$$

8. On étudie les variations de Q qui est dérivable, et :
$$Q'(\lambda) = \frac{2(k+1)}{k+3}\lambda - 2\frac{k+1}{k+2}$$
qui s'annule pour :
$$\frac{2(k+1)}{k+3}\lambda - 2\frac{k+1}{k+2} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^* = \frac{2(k+1)}{k+2} \times \frac{k+3}{2(k+1)} = \frac{k+3}{k+2}.$$
ce qui donne le tableau :

λ	$-\infty$		λ^*		$+\infty$
$Q'(\lambda)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$Q(\lambda)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$

et Q admet bien un minimum global en $\lambda^* = \dfrac{k+3}{k+2}$.

9. On remarque le risque quadratique est minimisé en une valeur λ où le biais est non nul, et que le meilleur estimateur n'est pas celui sans biais.

10. Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i avec :
$$p_i = P(X_i = 0) = \frac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} = e^{-\theta}.$$

11. $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre et indépendantes, donc elle suit la loi binomiale de paramètres n et $e^{-\theta}$, qui admet une espérance.
On en déduit par linéarité de l'espérance que $\overline{Y_n}$ admet une espérance et :
$$E(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n} \times ne^{-\theta} = e^{-\theta}.$$

12. La loi binomiale admet une variance, par propriétés de la variance on en déduit que $\overline{Y_n}$ admet également une variance et :
$$V(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \times ne^{-\theta}(1-e^{-\theta}) = \frac{e^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n}.$$

13. La somme de variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson suit une loi de Poisson, donc S_k suit la loi de Poisson de paramètre $k\theta$.

14. Par définition de la probabilité conditionnelle,
$$\begin{aligned}\varphi(j) &= \frac{P((S_n = j)\cap(X_1 = 0))}{P(S_n = j)} = \frac{P\left((X_1 = 0)\cap(\sum\limits_{k=2}^{n} X_i = j)\right)}{P(S_n = j)} \\ &= \frac{P(X_1 = 0)P\left(\sum\limits_{k=2}^{n} X_i = j\right)}{P(S_n = j)} = \frac{(j!)e^{-\theta}}{e^{-n\theta}(n\theta)^j} \times \frac{e^{-(n-1)\theta}((n-1)\theta)^j}{j!}\end{aligned}$$
car $\sum\limits_{k=2}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\theta$ et est indépendante de X_1 par mutuelle indépendance des X_i et lemme des coalitions.
On obtient donc
$$\varphi(j) = \frac{e^{-\theta}e^{-(n-1)\theta}}{e^{-n\theta}} \times \frac{j!}{j!} \times \frac{(n-1)^j\theta^j}{n^j\theta^j} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j = \left(1-\frac{1}{n}\right)^j.$$

15. Sous réserve de convergence absolue, le théorème de transfert donne
$$E(\varphi(S_n)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(j) e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^j}{j!} = e^{-n\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{n-1}{n} \times (n\theta)\right)^j}{j!}.$$
On reconnaît une série exponentielle absolument convergente donc $\phi(S_n)$ admet une espérance et :
$$E(\varphi(S_n)) = e^{-n\theta} \times e^{(n-1)\theta} = e^{-\theta}.$$

16. Sous réserve de convergence absolue, le théorème de transfert donne
$$E(\varphi(S_n)^2) = e^{-n\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times (n\theta)\right]^j}{j!}.$$
On reconnait une série exponentielle absolument convergente donc $\phi(S_n)$ admet un moment d'ordre deux et une variance et :
$$E(\varphi(S_n)^2) = e^{-n\theta} e^{\frac{(n-1)^2}{n}\theta} = e^{\theta \frac{-n^2+(n-1)^2}{n}} = e^{\frac{1-2n}{n}\theta}.$$
Par suite
$$V(\varphi(S_n)) = e^{\frac{1-2n}{n}\theta} - e^{-2\theta} = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right).$$

17. (a) On pose $f(t) = e^t$ sur $[0;\theta]$, de classe C^1 sur $]0;\theta[$ et continue sur $[0;\theta]$.
De plus $f'(t) = e^t$ est croissante donc vérifie : pour tout $t \in [0;\theta]$,
$$e^0 \le e^t \le e^\theta \iff 1 \le f'(t) \le e^\theta.$$
L'inégalité des accroissements finis donne alors : pour tous x et t de $[0;\theta]$,
$$1(x-t) \le f(x) - f(t) \le e^\theta(x-t)$$
donc en posant $x = \theta$ et $t = 0$ on a :
$$\theta \le e^\theta - 1 \le \theta e^\theta \iff 1 \le \frac{e^\theta - 1}{\theta} \le e^\theta.$$
(b) h est de classe C^∞ et
$$h'(t) = e^\theta - 1 - \theta e^{t\theta} \quad \text{puis} \quad h''(t) = -\theta^2 e^{t\theta} < 0 \quad \text{sur } [0;1]$$
donc h' est strictement décroissante sur $[0;1]$.
Or d'après la question précédente,
$$h'(0) = e^\theta - 1 - \theta \ge 0 \quad \text{et} \quad h'(1) = e^\theta - 1 - \theta e^\theta \le 0$$
Le théorème de la bijection assure que h' s'annule en une unique valeur $\alpha \in [0;1]$, et que
$$h'(t) > 0 \quad \text{sur } [0;\alpha[\quad , \quad h'(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad h'(t) < 0 \quad \text{sur }]\alpha;1]$$
donc h est strictement croissante sur $[0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;1]$.
(c) On remarque que :
$$e^{\frac{\theta}{n}} - \frac{e^\theta}{n} - \frac{n-1}{n} = -h\left(\frac{1}{n}\right)$$
Or $h(0) = 0$ et $h(1) = 0$ donc $h(t) \ge h(0) = 0$ sur $[0;\alpha]$ et $h(t) \ge h(1) = 0$ sur $[\alpha;1]$ donc finalement $h(t) \ge 0$ sur $[0;1]$.
On applique ce résultat à $t = \frac{1}{n}$ et on obtient :
$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^\theta + 1 - \frac{1}{n} - e^{\frac{\theta}{n}} \ge 0 \iff e^{\frac{\theta}{n}} \le \frac{e^\theta}{n} + \frac{n-1}{n}.$$

(d) On calcule les deux risques quadratiques :

$$R(\overline{Y_n}, e^{-\theta}) = V(\overline{Y_n}) + b^2 = V(\overline{Y_n}) = \frac{e^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n}$$

d'une part, et d'autre part

$$R(\varphi(S_n), e^{-\theta}) = V(\varphi(S_n)) + b^2 = V(\varphi(S_n)) = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{1}{n}\theta} - 1\right).$$

On étudie enfin

$$R(\varphi(S_n), e^{-\theta}) - R(\overline{Y_n}, e^{-\theta}) = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{1}{n}\theta} - 1 + \frac{1-e^{\theta}}{n}\right) = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - \frac{e^{\theta}}{n} - \frac{n-1}{n}\right) \leq 0$$

avec le résultat de la question c.
On en déduit que le meilleur estimateur de $e^{-\theta}$ au sens du risque quadratique est $\varphi(S_n)$.

18. On calcule $\ln p(\theta,k)$ et sa dérivée pour $k=0$ et 1 :

$$\ln p(\theta,1) = \ln\theta \ \text{ donc } \ \frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,1) = \frac{1}{\theta},\ \ln p(\theta,0) = \ln(1-\theta) \ \text{ donc } \ \frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,0) = -\frac{1}{1-\theta}$$

et on obtient ensuite :

$$I_X(\theta) = \frac{\theta}{\theta^2} + \frac{1-\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1-\theta+\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}.$$

19. (a) Ici on a pour tout $k \in [\![0;N]\!]$,

$$p(\theta,k) = \binom{N}{k}\theta^k(1-\theta)^{N-k} \quad \text{donc} \quad \ln p(\theta,k) = \ln\left(\binom{N}{k}\right) + k\ln\theta + (N-k)\ln(1-\theta).$$

On dérive par rapport à θ :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k) = \frac{k}{\theta} - \frac{N-k}{1-\theta} = \frac{k-k\theta-N\theta+k\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{k-N\theta}{\theta(1-\theta)}.$$

Enfin

$$I_X(\theta) = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k-N\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2 \times \binom{N}{k}\theta^k(1-\theta)^{N-k} = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}\sum_{k=0}^{N}(k-N\theta)^2\binom{N}{k}\theta^k(1-\theta)^{N-k}.$$

(b) En reconnaissant $N\theta = E(X)$ on a

$$I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}\sum_{k=0}^{N}(k-E(X))^2P(X=k) = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}E([X-E(X)]^2)$$

par théorème de transfert.
Enfin on reconnaît la définition de la variance, et cela donne

$$I_X(\theta) = \frac{V(X)}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{N\theta(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{N}{\theta(1-\theta)}.$$

20. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$p(\theta,k) = P(X=k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} \quad \text{donc} \quad \ln p(\theta,k) = -\theta + k\ln\theta - \ln(k!)$$

et on dérive :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k) = -1+\frac{k}{\theta}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\right)^2 p(\theta,k) &= \left(-1+\frac{k}{\theta}\right)^2 e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} = \left(1+\frac{k^2}{\theta^2}-2\frac{k}{\theta}\right)e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}\\ &= e^{-\theta}\times\frac{\theta^k}{k!} - 2e^{-\theta}\times\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-\theta}\times\frac{k\theta^{k-2}}{(k-1)!}.\end{aligned}$$

On reconnaît la somme de trois séries exponentielles, toutes trois convergentes donc la série converge.

Calculons les sommes de ces séries :

$$\begin{aligned} e^{-\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\theta^k}{k!} &= e^{-\theta}e^{\theta} = 1\\ -2e^{-\theta}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} &= -2e^{-\theta}e^{\theta} = -2\\ e^{-\theta}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\theta^{k-2}}{(k-1)!} &= e^{-\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k-1+1)\theta^{k-2}}{(k-1)!}\\ &= e^{-\theta}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\theta}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-1)!}\\ &= e^{-\theta}e^{\theta} + \frac{e^{-\theta}}{\theta}e^{\theta} = 1+\frac{1}{\theta}.\end{aligned}$$

On en déduit finalement que

$$I_X(\theta) = 1-2+1+\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

(b) C'est le théorème de transfert : l'absolue convergence de la série a été prouvée, on obtient

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right)^2\right] &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\right)^2 P(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\right)^2 p(\theta,k) = I_X(\theta).\end{aligned}$$

21. On a

$$f(\theta,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} \quad \text{donc} \quad \ln f(\theta,x) = -\frac{1}{2}(\ln 2+\ln\pi) - \frac{(x-\theta)^2}{2}$$

et en dérivant

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln[f(\theta,x)] = x-\theta \quad \text{et enfin} \quad \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln[f(\theta,x)]\right)^2 = (x-\theta)^2.$$

D'où sous réserve de convergence,

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\theta)^2 f(\theta,x)\,dx.$$

22. On reconnaît avec le théorème de transfert, avec $E(X) = \theta$ et toujours sous réserve de convergence,
$$I_X(\theta) = E((X-\theta)^2) = V(X).$$
Or on sait que X admet une variance (et même des moments de tous ordres) donc cette intégrale converge absolument.
On en déduit que $I_X(\theta)$ existe et que $I_X(\theta) = V(X) = 1$.

23. A nouveau le théorème de transfert : question identique à 20.(b) mais avec une variable à densité.

24. $(X = k)_{k\in[\![0;N]\!]}$ est un système complet d'évènements donc
$$\sum_{k=0}^{N} p(\theta,k) = \sum_{k=0}^{N} P(X=k) = 1.$$
On dérive cette égalité par rapport à θ :
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{k=0}^{N} p(\theta,k)\right) = 0$$
et la somme est finie donc par linéarité de la dérivée :
$$\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta,k)\right) = 0.$$

25. Par dérivée de la composée, on remarque que :
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,k)) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta,k)\right)\times\frac{1}{p(\theta,k)}$$
Par théorème de transfert (la convergence absolue est vérifiée puisque la somme est finie), on obtient alors :
$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,X))\right] &= \sum_{k=0}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,k))\times p(\theta,k) \\ &= \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta,k)\right)\times\frac{1}{p(\theta,k)}\times p(\theta,k) \\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta,k) = 0. \end{aligned}$$

26. Comme on ne sait pas si on peut échanger dérivation et espérance, on revient à la somme :
$$\sum_{k=0}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,k))\times p(\theta,k) = 0,$$
que l'on dérive par rapport à θ :
$$\sum_{k=0}^{N}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(p(\theta,k))\times p(\theta,k) + \frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,k))\times\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta,k) = 0$$
donc
$$\sum_{k=0}^{N}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(p(\theta,k))\times p(\theta,k) = -\sum_{k=0}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,k))\times\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta,k).$$

A gauche on reconnaît par théorème de transfert $E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(p(\theta,X))\right)$.

A droite on part du résultat à obtenir et on transforme avec le théorème de transfert :

$$E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right]^2\right)=\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\right]^2\times p(\theta,k)=\sum_{k=0}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\times\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\times p(\theta,k).$$

Or $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)=\frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta,k))\times\frac{1}{p(\theta,k)}$ donc :

$$\begin{aligned}E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right]^2\right) &= \sum_{k=0}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\times\frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta,k))\times\frac{1}{p(\theta,k)}\times p(\theta,k)\\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\times\frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta,k))\end{aligned}$$

et on reconnaît bien l'expression de droite de l'égalité obtenue en dérivant.

On obtient finalement :

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(p(\theta,X))\right)=-E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right]^2\right).$$

27. Par théorème de transfert,

$$g(\theta)=E(f(X))=\sum_{k=0}^{N}f(k)p(\theta,k)$$

donc en dérivant :

$$g'(\theta)=\sum_{k=0}^{N}f(k)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p(\theta,k)\right).$$

Or on a déjà vu que $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)=\frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta,k))\times\frac{1}{p(\theta,k)}$ donc

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p(\theta,k)\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\times p(\theta,k)$$

et enfin :

$$g'(\theta)=\sum_{k=0}^{N}f(k)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,k)\right]\times p(\theta,k).$$

Pour la deuxième égalité on part de la droite : par linéarité de l'espérance,

$$E\left((f(X)-g(\theta))\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right]\right)=E\left(f(X)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right]\right)-g(\theta)E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right]\right).$$

La première espérance vaut $g'(\theta)$ par la question précédente (avec une nouvelle fois le théorème de transfert) et la 2e vaut 0 par la question IVA2.

On obtient finalement

$$g'(\theta)=E\left((f(X)-g(\theta))\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,X)\right]\right).$$

28. (a) On développe, avec la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
L(t) &= E\left(\left((f(X)-g(\theta))+t\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,X))\right)^2\right)\\
&= E\left(t^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,X))\right)^2+2t\left((f(X)-g(\theta))\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,X))\right)+(f(X)-g(\theta))^2\right)\\
&= t^2E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,X))\right)^2\right)+2tE\left(\left((f(X)-g(\theta))\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(p(\theta,X))\right)\right)\\
&\quad +E\left((f(X)-g(\theta))^2\right)\\
&= t^2I_X(\theta)+2tg'(\theta)+E([f(X)-E(f(X))]^2)=t^2I_X(\theta)+2tg'(\theta)+V(f(X)).
\end{aligned}$$

car par définition $E(f(X))=g(\theta)$.

(b) On calcule immédiatement :

$$\Delta = 4g'(\theta)^2-4I_X(\theta)V(f(X)).$$

Pour justifier que $\Delta\leq 0$, il faut prouver que le polynôme $L(t)$ ne change pas de signe (avec le signe du trinôme) :
En effet si $\Delta=0$, le trinôme change de signe entre ses deux racines, si $\Delta=0$ il s'annule une fois et reste de signe constant ailleurs, et si $\Delta<0$ il ne s'annule jamais donc ne change pas de signe.
Or on se rappelle que $L(t)$ est l'espérance d'un carré, elle est donc toujours positive ou nulle, et on a bien $\Delta\leq 0$.

(c) On en déduit que

$$4\left([g'(\theta)]^2-I_X(\theta)V(f(X))\right)\leq 0\Longleftrightarrow V(f(X))I_X(\theta)\geq[g'(\theta)]^2\Longleftrightarrow V\big(f(X)\big)\geq\frac{[g'(\theta)]^2}{I_X(\theta)}.$$

29. Par linéarité de l'espérance, propriétés de la variance et indépendance des (X_i) on obtient :

$$E\left(\overline{X_n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta=\theta\quad\text{ et }\quad V\left(\overline{X_n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\theta=\frac{\theta}{n}.$$

30. On estime dans cette question $g(\theta)=\theta$, donc $g'(\theta)=1$.
On a calculé précédemment :

$$I_{X_1}(\theta)=\frac{1}{\theta}\quad\text{ donc }\quad nI_{X_1}(\theta)=\frac{n}{\theta}=\frac{1}{V(\overline{X_n})}\quad\text{ et enfin }\quad\frac{(g'(\theta))^2}{nI_{X_1}(\theta)}=V(\overline{X_n}).$$

On en déduit par Cramer-Rao que pour tout estimateur T_n sans biais de θ,

$$V(T_n)\geq V(\overline{X_n})$$

et donc $\overline{X_n}$ a le plus petit risque quadratique possible parmi les estimateurs sans biais de θ.

31. On estime cette fois $g(\theta)=e^{-\theta}$ donc :

$$g'(\theta)=-e^{-\theta}\quad\text{ puis }\quad(g'(\theta))^2=e^{-2\theta}\quad\text{ et }\quad\frac{(g'(\theta))^2}{nI_{X_1}(\theta)}=e^{-2\theta}\times\frac{\theta}{n}.$$

D'autre part on a

$$V(\varphi(S_n))=e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}}-1\right)\underset{+\infty}{\sim}e^{-2\theta}\times\frac{\theta}{n}$$

car $\frac{\theta}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et on utilise l'équivalent $e^x-1\underset{0}{\sim}x$.

32. A la limite, $\varphi(S_n)$ est optimal parmi les estimateurs sans biais de $e^{-\theta}$.

33. Non, on a vu à la partie 1 que le meilleur estimateur en terme de risque quadratique n'est pas forcément sans biais; il faudrait donc faire une étude générale avec les estimateurs biaisés.