

Correction - AP 19

Convergence, approximation et estimation

Exercice 1 (ECRICOME)

1. Montrons que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

- La fonction $f_{a,b}$ est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en a .
- Elle est positive sur \mathbb{R} .
- Démontrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 1.

Tout d'abord, comme $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[a, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx = \int_a^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$$

Soit $A > a$.

$$\int_a^A f_{a,b}(x)dx = \int_a^A \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} dx = \left[-e^{-\frac{x-a}{b}} \right]_a^A = 1 - e^{-\frac{A-a}{b}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 1.

Finalement, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Comme $X(\Omega) = [a, +\infty[$, $F_X(x) = 0$ si $x < a$.

Si $x \geq a$, alors :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_{a,b}(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b} e^{-\frac{t-a}{b}} dt = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}.$$

$$\text{Finalement, } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

3. Comme $X(\Omega) = [a, +\infty[$, on obtient $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc, pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

Si $x \geq 0$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(Y + a \leq x + a) = F_X(x + a) = 1 - e^{-\frac{x}{b}}$.

Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$ et on a :

$$E(X) = E(Y + a) = E(Y) + a = a + b \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y + a) = b^2.$$

4. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n (a + b) = n(a + b)$.

Les variables (X_i) sont indépendantes, donc $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n b^2 = nb^2$.

5. (a) Pour tout i , $X_i(\Omega) = [a, +\infty[$. Donc $Y_n(\Omega) = [a, +\infty[$ et pour tout $x < a$, $F_{Y_n}(x) = 0$.

Si $x > a$, on a par indépendance des X_i :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > x)\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_X(x)) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(e^{-\frac{(x-a)}{b}}\right)^n = 1 - e^{-\frac{n(x-a)}{b}}. \end{aligned}$$

(b) Comme $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{-\frac{(x-a)}{b/n}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$, Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ avec $a_n = a$ et $b_n = \frac{b}{n}$.

(c) Avec la question 3, on obtient $E(Y_n) = a + \frac{b}{n}$ et $V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$.

6. (a) On a, par linéarité de l'espérance,

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}E(S_n) - E(Y_n) = (a + b) - \left(a + \frac{b}{n}\right) = b - \frac{b}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b.$$

On dit que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de b .

(b) On a : puis avec la question précédente :

$$\begin{aligned} r_b(Z_n) &= E((Z_n - b)^2) = E(Z_n^2 - 2bZ_n + b^2) \\ &= E(Z_n^2) - 2bE(Z_n) + b^2 \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\ &= E(Z_n^2) - (E(Z_n))^2 + (E(Z_n))^2 - 2bE(Z_n) + b^2 \\ &= V(Z_n) + (E(Z_n) - b)^2 \quad (\text{avec Koenig-Huygens}) \\ &= V(Z_n) + \left(b - \frac{b}{n} - b\right)^2 \quad (\text{avec la question précédente}) \\ &= V(Z_n) + \frac{b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

(c) On sait que $r_b(Z_n) = \frac{b^2}{n^2} + V(Z_n)$. Calculons $V(Z_n)$:

$$V(Z_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) + V(Y_n) + 2Cov\left(\frac{S_n}{n}, -Y_n\right).$$

Comme $V(S_n) = nb^2$ et $V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$, on obtient :

$$r_b(Z_n) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n).$$

(d) On sait (cours) que $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ et que $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Donc $-\sqrt{V(S_n)V(Y_n)} \leq Cov(S_n, Y_n) \leq \sqrt{V(S_n)V(Y_n)}$.

Donc $0 \leq (Cov(S_n, Y_n))^2 \leq V(S_n)V(Y_n)$.

On obtient ainsi $0 \leq (Cov(S_n, Y_n))^2 \leq \frac{b^4}{n}$.

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (Cov(S_n, Y_n))^2 = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} Cov(S_n, Y_n) = 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2b^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^2}{n} = 0$, on a, avec la question 6.(c), que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_b(Z_n) = 0$.

Exercice 2 (EML 2020)

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

- La fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en b .
- Elle est positive sur \mathbb{R} .
- Démontrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

Soit $B > b$. Comme $a > 0$,

$$\int_b^B f(x)dx = ab^a \int_b^B x^{-a-1} dx = ab^a \left[\frac{x^{-a}}{-a} \right]_b^B = -b^a \left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a} \right) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Finalement, f est une densité de probabilité.

2. Comme $X(\Omega) = [b, +\infty[$, $F_X(x) = 0$ si $x < b$.

Si $x \geq b$, alors :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_b^x a \frac{b^a}{t^{a+1}} dt = ab^a \left[\frac{t^{-a}}{-a} \right]_b^x = -b^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{b^a} \right) = 1 - \left(\frac{b}{x} \right)^a.$$

Finalement, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ 1 - \left(\frac{b}{x} \right)^a & \text{si } x \geq b \end{cases}$

3. (a) Notons $h(x) = bx^{-1/a}$, de sorte que $Y = bU^{-1/a} = h(U)$. Comme $U(\Omega) =]0, 1]$ et que h est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$ (à démontrer en faisant l'étude de la fonction), on a :

$$Y(\Omega) = (h(U))(\Omega) = h(U(\Omega)) = h(]0, 1]) = [h(1), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)[= [b, +\infty[.$$

Ainsi, si $x < b$, $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq b$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(bU^{-1/a} \leq x) \\ &= P\left(U^{-1/a} \leq \frac{x}{b}\right) \quad (\text{car } b > 0) \\ &= P\left(U \geq \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right) \quad (\text{car } x \mapsto x^{-a} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[) \\ &= 1 - P\left(U \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right) \quad (\text{car } U \text{ est à densité}) \\ &= 1 - F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \end{aligned}$$

On $x \geq b \Rightarrow 0 < \frac{b}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 < \left(\frac{b}{x}\right)^a \leq 1$ car $x \mapsto x^a$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

car $a > 0$. Comme U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, $F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) = \left(\frac{b}{x}\right)^a$.

Finalement, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b. \end{cases}$

D'après la question 2, on reconnaît la fonction de répartition F_X de X qui suit la loi de Pareto de paramètre a et b . Donc Y suit la loi de Pareto de paramètre a et b .

(b) On propose la fonction Scilab suivante :

```

1 | def pareto(a, b)
2 |     U = rd.random()
3 |     X = b*(U**(-1/a))
4 |     return(X)

```

(c) La variable L est un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$ où X suit une loi de Pareto de paramètres a et b .

(d) L'instruction `mystere(2,1)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1. Elles semblent de plus en plus proche de 2. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1, alors $E(X) = 2$.

L'instruction `mystere(3,2)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2. Elles semblent de plus en plus proche de 3. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2, alors $E(X) = 3$.

L'instruction `mystere(1,4)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $E(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4. Elles semblent ne pas converger vers une valeur en particulier. On peut donc conjecturer que, si X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4, alors elle n'admet pas d'espérance.

4. (a) X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^b 0dx + \int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{x^a} dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx.$$

C'est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, qui converge si et seulement si $a > 1$.

Si $a > 1$, en posant $B > b$, on a :

$$ab^a \int_b^B \frac{1}{x^a} dx = ab^a \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right]_b^B = -\frac{ab^a}{a-1} \left(\frac{1}{B^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}} \right) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{ab}{a-1}.$$

Donc, si $a > 1$, $E(X) = \frac{ab}{a-1}$.

(b) X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^b 0dx + \int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{x^{a-1}} dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}} dx.$$

C'est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, qui converge si et seulement si $a > 2$.

Si $a > 2$, en posant $B > b$, on a :

$$ab^a \int_b^B \frac{1}{x^{a-1}} dx = ab^a \left[\frac{x^{-a+2}}{-a+2} \right]_b^B = -\frac{ab^a}{a-2} \left(\frac{1}{B^{a-2}} - \frac{1}{b^{a-2}} \right) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{ab^2}{a-2}.$$

Donc, si $a > 2$, $E(X^2) = \frac{ab^2}{a-2}$.

Par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{ab^2}{a-2} - \left(\frac{ab}{a-1} \right)^2 = ab^2 \left(\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2} \right) = \frac{ab^2}{(a-2)(a-1)^2}.$$

5. (a) Pour tout $x \geq b$, on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y_n > x) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k > x)\right) \\
 &= \prod_{k=1}^n P(X_k > x) \quad (\text{car les } X_k \text{ sont indépendantes}) \\
 &= \prod_{k=1}^n (1 - F_{X_k}(x)) \\
 &= (1 - F_X(x))^n \quad (\text{car les } X_k \text{ ont la même loi que } X) \\
 &= \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}.
 \end{aligned}$$

(b) Comme $X_k(\Omega) = [b, +\infty[$, $Y_n(\Omega) = [b, +\infty[$. Donc pour tout $x < b$, $F_{Y_n}(x) = 0$.
Si $x \geq b$, on a d'après la question précédente,

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}.$$

$$\text{Finalement, } F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

D'après la question 2, on reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètre $3n$ et b . Donc Y_n suit une loi de Pareto de paramètre $3n$ et b .

(c) Par linéarité de l'espérance et avec les questions 4.(a) et 5.(b), on a :

$$E(Y'_n) = \frac{3n-1}{3n} E(Y_n) = \frac{3n-1}{3n} \frac{3nb}{3n-1} = b.$$

On dit que Y'_n est un estimateur sans biais de b .

Avec les questions 4.(a) et 5.(b), on a :

$$V(Y'_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 V(Y_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3nb^2}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{b^2}{3n(3n-2)}.$$

6. (a) Par linéarité de l'espérance et la question 4.(a) :

$$E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \times n \times \frac{3b}{2} = \frac{3}{2}b.$$

Par indépendance des X_k et la question 4.(b) :

$$V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{3b^2}{(3-1)^2(3-2)} = \frac{3b^2}{4n}.$$

(b) On pose $Z'_n = \frac{2}{3}Z_n$. Par linéarité de l'espérance, $E(Z'_n) = \frac{2}{3}E(Z_n) = b$.

On a alors

$$V(Z'_n) = \frac{4}{9}V(Z_n) = \frac{4}{9} \frac{3b^2}{4n} = \frac{b^2}{3n}.$$

7. Les estimateurs Y'_n et Z'_n sont tous les d'espérance égale à b (on dit qu'ils sont sans biais). Ils prennent donc en moyenne la valeur b ce qui est une bonne chose (l'erreur moyenne est donc nulle).

On compare les variances de Y'_n et Z'_n (qui mesure la dispersion des valeurs prises par Y'_n et Z'_n autour de b) :

$$V(Y'_n) - V(Z_n) = \frac{b^2}{3n(3n-2)} - \frac{b^2}{3n} = \frac{b^2(1-n)}{n(3n-2)}.$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $V(Y'_n) - V(Z_n) \leq 0$ donc $V(Y'_n) \leq V(Z_n)$ et Y'_n est un meilleur estimateur de b que Z'_n .

8. Notons $h : x \mapsto \ln(x)$ de sorte que $W_n = h(X_n)$. Comme $X_n(\Omega) = [1, +\infty[$ et que h est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$:

$$W_n(\Omega) = (h(X_n))(\Omega) = h(X_n(\Omega)) = h([1, +\infty[) = [h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[= [0, +\infty[.$$

Donc $F_{W_n}(x) = 0$ si $x < 0$.

Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= P(W_n \leq x) = P(\ln(W_n) \leq x) \\ &= P(X_n \leq e^x) \quad (\text{par stricte croissante de exp sur } \mathbb{R}) \\ &= F_{X_n}(e^x) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{e^x}\right)^a \quad (\text{car } b = 1 \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1) \\ &= 1 - e^{-ax}. \end{aligned}$$

Donc W_n suit une loi exponentielle de paramètre a et $E(W_n) = \frac{1}{a}$, $V(W_n) = \frac{1}{a^2}$.

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à appliquer le TLC. On commence par déterminer $\overline{W_n}^*$ et la relier au T_n de l'énoncé.

On a par linéarité de l'espérance et la question précédente :

$$E(\overline{W_n}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(W_k) = \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

Par indépendance des W_i et la question précédente :

$$V(\overline{W_n}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(W_k) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{1}{a^2} = \frac{1}{na^2}.$$

Comme $\overline{W_n}$ admet une variance non nulle, $\overline{W_n}^*$ est bien définie et on a :

$$\overline{W_n}^* = \frac{\overline{W_n} - E(\overline{W_n})}{\sqrt{V(\overline{W_n})}} = \frac{M_n - \frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{na^2}}} = a\sqrt{n}\left(M_n - \frac{1}{a}\right) = \sqrt{n}(aM_n - 1) = T_n.$$

La suite (W_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes (par le lemme des coalitions car les X_i sont indépendantes), de même loi $\mathcal{E}(a)$ et admettant une variance non nulle $\frac{1}{a^2}$.

Par le TLC, T_n converge en loi vers une variable $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

(b) On cherche à démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n} \right] \right) = 0.95$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} & P \left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n} \right] \right) \\ &= P \left(\left[\sqrt{n}-2 \leq a\sqrt{n}M_n \leq \sqrt{n}+2 \right] \right) \quad (\text{car } \sqrt{n} > 0 \text{ et } M_n(\Omega) \subset]0, +\infty[) \\ &= P(-2 \leq a\sqrt{n}M_n - \sqrt{n} \leq 2) \\ &= P(-2 \leq T_n \leq 2). \end{aligned}$$

Comme T_n converge en loi vers une variable $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-2 \leq T_n \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1.$$

D'après l'énoncé, $\Phi(2) \geq 0.975$ donc $2\Phi(2) - 1 \geq 0.95$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n} \right] \right) \geq 0.95$.

Donc l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} ; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

Exercice 3 (ESSEC II 2009)

1. f est positive sur $[0; \theta]$ car $x \geq 0$ et $\theta \geq 0$ et en dehors car $0 \geq 0$ donc f est positive sur \mathbb{R} .

f est continue sur $[0; \theta]$ (fonction polynôme), sur $] -\infty; 0[$ et sur $] \theta; +\infty[$ car elle est constante, donc f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en θ .

De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\theta}(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^{\theta} t^k dt + \int_{\theta}^{+\infty} 0 dt$$

converge bien car il y a deux intégrales de la fonction nulle et une intégrale non généralisée.

Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\theta}(t) dt = 0 + \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^{\theta} + 0 = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \times \frac{\theta^{k+1}}{k+1} = 1.$$

On en déduit que f est une densité de probabilité.

2. On considère l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\theta}(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^{\theta} t^{k+1} dt + \int_{\theta}^{+\infty} 0 dt$$

qui converge absolument car il y a deux intégrales de la fonction nulle et une intégrale non généralisée. Donc X admet une espérance et :

$$E(X) = \int_0^{\theta} \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^{k+1} dx = \frac{(k+1)\theta^{k+2}}{(k+2)\theta^{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}\theta.$$

3. On résout l'équation (en utilisant la linéarité de l'espérance) :

$$b = 0 \iff E(\lambda_0 X) = \theta \iff \lambda_0 \frac{k+1}{k+2}\theta = \theta \iff \lambda_0 = \frac{k+2}{k+1}.$$

4. On considère l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{\theta}(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^{\theta} t^{k+2} dt + \int_{\theta}^{+\infty} 0 dt$$

qui converge absolument car il y a deux intégrales de la fonction nulle et une intégrale non généralisée. Donc X admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(X^2) = \int_0^{\theta} \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^{k+2} dx = \frac{(k+1)\theta^{k+3}}{(k+3)\theta^{k+1}} = \frac{k+1}{k+3}\theta^2.$$

D'où X admet une variance et avec la formule de Koenig-Huyghens :

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(\frac{k+1}{k+3} - \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} \right) \theta^2 = (k+1)\theta^2 \times \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+2)^2(k+3)} \\ &= (k+1)\theta^2 \times \frac{1}{(k+2)^2(k+3)} = \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2. \end{aligned}$$

5. On fait apparaître la définition de la variance :

$$\begin{aligned} R(T, \theta) &= E((T - \theta)^2) = E((T - E(T)) + [E(T) - \theta])^2) \\ &= E([T - E(T)]^2 + [E(T) - \theta]^2 + 2[T - E(T)][E(T) - \theta]) \end{aligned}$$

puis par linéarité de l'espérance (remarquons que $E(T)$ et θ sont des constantes) :

$$R(T, \theta) = E([T - E(T)]^2) + b^2 + 2[E(T) - \theta][E(T) - E(T)] = V(T) + b^2.$$

6. Avec les propriétés de la variance et en se rappelant que $b(\lambda_0 X) = 0$:

$$R(\lambda_0 X, \theta) = V(\lambda_0 X) + b^2 = \lambda_0^2 V(X) + 0^2 = \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} \times \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2} \theta^2 = \frac{\theta^2}{(k+1)(k+3)}.$$

7. On calcule le risque quadratique :

$$R(\lambda X, \theta) = \lambda^2 V(X) + b^2 = \lambda^2 \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2} \theta^2 + \left(\lambda \frac{k+1}{k+2} - 1 \right)^2 \theta^2 = \theta^2 Q(\lambda)$$

avec :

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2} \lambda^2 + \left(\lambda \frac{k+1}{k+2} - 1 \right)^2 \\ &= \lambda^2 \left(\frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} \right) - 2 \frac{k+1}{k+2} \lambda + 1 \\ &= \lambda^2 \times \frac{k+1 + (k+3)(k+1)^2}{(k+3)(k+2)^2} - 2 \frac{k+1}{k+2} \lambda + 1 \\ &= \lambda^2 \times \frac{(k+1)(1 + k^2 + 4k + 3)}{(k+3)(k+2)^2} - 2 \frac{k+1}{k+2} \lambda + 1 \\ &= \frac{k+1}{k+3} \lambda^2 - 2 \frac{k+1}{k+2} \lambda + 1. \end{aligned}$$

8. On étudie les variations de Q qui est dérivable, et :

$$Q'(\lambda) = \frac{2(k+1)}{k+3} \lambda - 2 \frac{k+1}{k+2}$$

qui s'annule pour :

$$\frac{2(k+1)}{k+3} \lambda - \frac{k+1}{k+2} \iff \lambda = \frac{2(k+1)}{k+2} \times \frac{k+3}{2(k+1)} = \frac{k+3}{k+2} = \lambda^*.$$

ce qui donne le tableau :

λ	$-\infty$	λ^*	$+\infty$
$Q'(\lambda)$		0	
$Q(\lambda)$	$+\infty$		$+\infty$

et Q admet bien un minimum global en $\lambda^* = \frac{k+3}{k+2}$.

- 9. On remarque le risque quadratique est minimisé en une valeur λ où le biais est non nul, et que le meilleur estimateur n'est pas celui sans biais.
- 10. Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i avec :

$$p_i = P(X_i = 0) = \frac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} = e^{-\theta}.$$

- 11. $\sum_{i=1}^n Y_i$ est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre et indépendantes, donc elle suit la loi binomiale de paramètres n et $e^{-\theta}$, qui admet une espérance.

On en déduit par linéarité de l'espérance que \bar{Y}_n admet une espérance et :

$$E(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n} \times ne^{-\theta} = e^{-\theta}.$$

- 12. La loi binomiale admet une variance, par propriétés de la variance on en déduit que \bar{Y}_n admet également une variance et :

$$V(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \times ne^{-\theta}(1 - e^{-\theta}) = \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})}{n}.$$

- 13. La somme de variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson suit une loi de Poisson, donc S_k suit la loi de Poisson de paramètre $k\theta$.

- 14. Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned} \varphi(j) &= \frac{P((S_n = j) \cap (X_1 = 0))}{P(S_n = j)} = \frac{P\left((X_1 = 0) \cap \left(\sum_{k=2}^n X_i = j\right)\right)}{P(S_n = j)} \\ &= \frac{P(X_1 = 0)P\left(\sum_{k=2}^n X_i = j\right)}{P(S_n = j)} = \frac{(j!)e^{-\theta}}{e^{-n\theta}(n\theta)^j} \times \frac{e^{-(n-1)\theta}((n-1)\theta)^j}{j!} \end{aligned}$$

car $\sum_{k=2}^n X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\theta$ et est indépendante de X_1 par mutuelle indépendance des X_i et lemme des coalitions.

On obtient donc

$$\varphi(j) = \frac{e^{-\theta}e^{-(n-1)\theta}}{e^{-n\theta}} \times \frac{j!}{j!} \times \frac{(n-1)^j\theta^j}{n^j\theta^j} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j.$$

15. Sous réserve de convergence absolue, le théorème de transfert donne

$$E(\varphi(S_n)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(j) e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^j}{j!} = e^{-n\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\binom{n-1}{j} \times (n\theta)^j}{j!}.$$

On reconnaît une série exponentielle absolument convergente donc $\phi(S_n)$ admet une espérance et :

$$E(\varphi(S_n)) = e^{-n\theta} \times e^{(n-1)\theta} = e^{-\theta}.$$

16. Sous réserve de convergence absolue, le théorème de transfert donne

$$E(\varphi(S_n)^2) = e^{-n\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left[\binom{n-1}{j} \times (n\theta)^j\right]^2}{j!}.$$

On reconnaît une série exponentielle absolument convergente donc $\phi(S_n)$ admet un moment d'ordre deux et une variance et :

$$E(\varphi(S_n)^2) = e^{-n\theta} e^{\frac{(n-1)^2}{n}\theta} = e^{\theta \frac{-n^2 + (n-1)^2}{n}} = e^{\frac{1-2n}{n}\theta}.$$

Par suite

$$V(\varphi(S_n)) = e^{\frac{1-2n}{n}\theta} - e^{-2\theta} = e^{-2\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right).$$

17. (a) On pose $f(t) = e^t$ sur $[0; \theta]$, de classe C^1 sur $]0; \theta[$ et continue sur $[0; \theta]$.
De plus $f'(t) = e^t$ est croissante donc vérifie : pour tout $t \in [0; \theta]$,

$$e^0 \leq e^t \leq e^\theta \iff 1 \leq f'(t) \leq e^\theta.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors : pour tous x et t de $[0; \theta]$,

$$1(x-t) \leq f(x) - f(t) \leq e^\theta(x-t)$$

donc en posant $x = \theta$ et $t = 0$ on a :

$$\theta \leq e^\theta - 1 \leq \theta e^\theta \iff 1 \leq \frac{e^\theta - 1}{\theta} \leq e^\theta.$$

(b) h est de classe C^∞ et

$$h'(t) = e^\theta - 1 - \theta e^{t\theta} \quad \text{puis} \quad h''(t) = -\theta^2 e^{t\theta} < 0 \quad \text{sur } [0; 1]$$

donc h' est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

Or d'après la question précédente,

$$h'(0) = e^\theta - 1 - \theta \geq 0 \quad \text{et} \quad h'(1) = e^\theta - 1 - \theta e^\theta \leq 0$$

Le théorème de la bijection assure que h' s'annule en une unique valeur $\alpha \in [0; 1]$, et que

$$h'(t) > 0 \quad \text{sur } [0; \alpha[\quad , \quad h'(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad h'(t) < 0 \quad \text{sur }]\alpha; 1]$$

donc h est strictement croissante sur $[0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; 1]$.

(c) On remarque que :

$$e^{\frac{\theta}{n}} - \frac{e^\theta}{n} - \frac{n-1}{n} = -h\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or $h(0) = 0$ et $h(1) = 0$ donc $h(t) \geq h(0) = 0$ sur $[0; \alpha]$ et $h(t) \geq h(1) = 0$ sur $[\alpha; 1]$ donc finalement $h(t) \geq 0$ sur $[0; 1]$.

On applique ce résultat à $t = \frac{1}{n}$ et on obtient :

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^\theta + 1 - \frac{1}{n} - e^{\frac{\theta}{n}} \geq 0 \iff e^{\frac{\theta}{n}} \leq \frac{e^\theta}{n} + \frac{n-1}{n}.$$

(d) On calcule les deux risques quadratiques :

$$R(\overline{Y}_n, e^{-\theta}) = V(\overline{Y}_n) + b^2 = V(\overline{Y}_n) = \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})}{n}$$

d'une part, et d'autre part

$$R(\varphi(S_n), e^{-\theta}) = V(\varphi(S_n)) + b^2 = V(\varphi(S_n)) = e^{-2\theta} \left(e^{\frac{1}{n}\theta} - 1 \right).$$

On étudie enfin

$$R(\varphi(S_n), e^{-\theta}) - R(\overline{Y}_n, e^{-\theta}) = e^{-2\theta} \left(e^{\frac{1}{n}\theta} - 1 + \frac{1 - e^{\theta}}{n} \right) = e^{-2\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - \frac{e^{\theta}}{n} - \frac{n-1}{n} \right) \leq 0$$

avec le résultat de la question c.

On en déduit que le meilleur estimateur de $e^{-\theta}$ au sens du risque quadratique est $\varphi(S_n)$.

18. On calcule $\ln p(\theta, k)$ et sa dérivée pour $k = 0$ et 1 :

$$\ln p(\theta, 1) = \ln \theta \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, 1) = \frac{1}{\theta}, \quad \ln p(\theta, 0) = \ln(1 - \theta) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, 0) = -\frac{1}{1 - \theta}$$

et on obtient ensuite :

$$I_X(\theta) = \frac{\theta}{\theta^2} + \frac{1 - \theta}{(1 - \theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1 - \theta} = \frac{1 - \theta + \theta}{\theta(1 - \theta)} = \frac{1}{\theta(1 - \theta)}.$$

19. (a) Ici on a pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$,

$$p(\theta, k) = \binom{N}{k} \theta^k (1 - \theta)^{N-k} \quad \text{donc} \quad \ln p(\theta, k) = \ln \left(\binom{N}{k} \right) + k \ln \theta + (N - k) \ln(1 - \theta).$$

On dérive par rapport à θ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, k) = \frac{k}{\theta} - \frac{N - k}{1 - \theta} = \frac{k - k\theta - N\theta + k\theta}{\theta(1 - \theta)} = \frac{k - N\theta}{\theta(1 - \theta)}.$$

Enfin

$$I_X(\theta) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{k - N\theta}{\theta(1 - \theta)} \right)^2 \times \binom{N}{k} \theta^k (1 - \theta)^{N-k} = \frac{1}{\theta^2(1 - \theta)^2} \sum_{k=0}^N (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1 - \theta)^{N-k}.$$

(b) En reconnaissant $N\theta = E(X)$ on a

$$I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2(1 - \theta)^2} \sum_{k=0}^N (k - E(X))^2 P(X = k) = \frac{1}{\theta^2(1 - \theta)^2} E([X - E(X)]^2)$$

par théorème de transfert.

Enfin on reconnaît la définition de la variance, et cela donne

$$I_X(\theta) = \frac{V(X)}{\theta^2(1 - \theta)^2} = \frac{N\theta(1 - \theta)}{\theta^2(1 - \theta)^2} = \frac{N}{\theta(1 - \theta)}.$$

20. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$p(\theta, k) = P(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \quad \text{donc} \quad \ln p(\theta, k) = -\theta + k \ln \theta - \ln(k!)$$

et on dérive :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, k) = -1 + \frac{k}{\theta}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, k) \right)^2 p(\theta, k) &= \left(-1 + \frac{k}{\theta} \right)^2 e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = \left(1 + \frac{k^2}{\theta^2} - 2\frac{k}{\theta} \right) e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \\ &= e^{-\theta} \times \frac{\theta^k}{k!} - 2e^{-\theta} \times \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-\theta} \times \frac{k\theta^{k-2}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

On reconnaît la somme de trois séries exponentielles, toutes trois convergentes donc la série converge.

Calculons les sommes de ces séries :

$$\begin{aligned} e^{-\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} &= e^{-\theta} e^{\theta} = 1 \\ -2e^{-\theta} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} &= -2e^{-\theta} e^{\theta} = -2 \\ e^{-\theta} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\theta^{k-2}}{(k-1)!} &= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-1+1)\theta^{k-2}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\theta} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\theta} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta^{k-2}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\theta} e^{\theta} + \frac{e^{-\theta}}{\theta} e^{\theta} = 1 + \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

On en déduit finalement que

$$I_X(\theta) = 1 - 2 + 1 + \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

(b) C'est le théorème de transfert : l'absolue convergence de la série a été prouvée, on obtient

$$\begin{aligned} E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, X) \right)^2 \right] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, k) \right)^2 P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta, k) \right)^2 p(\theta, k) = I_X(\theta). \end{aligned}$$

21. On a

$$f(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} \quad \text{donc} \quad \ln f(\theta, x) = -\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi) - \frac{(x-\theta)^2}{2}$$

et en dérivant

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln[f(\theta, x)] = x - \theta \quad \text{et enfin} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln[f(\theta, x)] \right)^2 = (x - \theta)^2.$$

D'où sous réserve de convergence,

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \theta)^2 f(\theta, x) dx.$$

22. On reconnaît avec le théorème de transfert, avec $E(X) = \theta$ et toujours sous réserve de convergence,

$$I_X(\theta) = E((X - \theta)^2) = V(X).$$

Or on sait que X admet une variance (et même des moments de tous ordres) donc cette intégrale converge absolument.

On en déduit que $I_X(\theta)$ existe et que $I_X(\theta) = V(X) = 1$.

23. A nouveau le théorème de transfert : question identique à 20.(b) mais avec une variable à densité.

24. $(X = k)_{k \in \llbracket 0; N \rrbracket}$ est un système complet d'évènements donc

$$\sum_{k=0}^N p(\theta, k) = \sum_{k=0}^N P(X = k) = 1.$$

On dérive cette égalité par rapport à θ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{k=0}^N p(\theta, k) \right) = 0$$

et la somme est finie donc par linéarité de la dérivée :

$$\sum_{k=0}^N \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, k) \right) = 0.$$

25. Par dérivée de la composée, on remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, k)) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, k) \right) \times \frac{1}{p(\theta, k)}$$

Par théorème de transfert (la convergence absolue est vérifiée puisque la somme est finie), on obtient alors :

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, X)) \right] &= \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, k)) \times p(\theta, k) \\ &= \sum_{k=0}^N \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, k) \right) \times \frac{1}{p(\theta, k)} \times p(\theta, k) \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, k) = 0. \end{aligned}$$

26. Comme on ne sait pas si on peut échanger dérivation et espérance, on revient à la somme :

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, k)) \times p(\theta, k) = 0,$$

que l'on dérive par rapport à θ :

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(p(\theta, k)) \times p(\theta, k) + \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, k)) \times \frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, k) = 0$$

donc

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(p(\theta, k)) \times p(\theta, k) = - \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, k)) \times \frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, k).$$

A gauche on reconnaît par théorème de transfert $E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln(p(\theta, X))\right)$.

A droite on part du résultat à obtenir et on transforme avec le théorème de transfert :

$$E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, X)\right]^2\right) = \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k)\right]^2 \times p(\theta, k) = \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k) \times \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k) \times p(\theta, k).$$

Or $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k) = \frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta, k)) \times \frac{1}{p(\theta, k)}$ donc :

$$\begin{aligned} E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, X)\right]^2\right) &= \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k) \times \frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta, k)) \times \frac{1}{p(\theta, k)} \times p(\theta, k) \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k) \times \frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta, k)) \end{aligned}$$

et on reconnaît bien l'expression de droite de l'égalité obtenue en dérivant.

On obtient finalement :

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln(p(\theta, X))\right) = -E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, X)\right]^2\right).$$

27. Par théorème de transfert,

$$g(\theta) = E(f(X)) = \sum_{k=0}^N f(k)p(\theta, k)$$

donc en dérivant :

$$g'(\theta) = \sum_{k=0}^N f(k) \frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta, k)).$$

Or on a déjà vu que $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k) = \frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta, k)) \times \frac{1}{p(\theta, k)}$ donc

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(p(\theta, k)) = \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k) \times p(\theta, k)$$

et enfin :

$$g'(\theta) = \sum_{k=0}^N f(k) \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, k)\right] \times p(\theta, k).$$

Pour la deuxième égalité on part de la droite : par linéarité de l'espérance,

$$E\left(\left((f(X) - g(\theta)) \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, X)\right]\right)\right) = E\left(f(X) \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, X)\right]\right) - g(\theta)E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, X)\right]\right).$$

La première espérance vaut $g'(\theta)$ par la question précédente (avec une nouvelle fois le théorème de transfert) et la 2e vaut 0 par la question IVA2.

On obtient finalement

$$g'(\theta) = E\left(\left((f(X) - g(\theta)) \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta, X)\right]\right)\right).$$

28. (a) On développe, avec la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} L(t) &= E \left(\left((f(X) - g(\theta)) + t \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, X)) \right)^2 \right) \\ &= E \left(t^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, X)) \right)^2 + 2t \left((f(X) - g(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, X)) \right) + (f(X) - g(\theta))^2 \right) \\ &= t^2 E \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, X)) \right)^2 \right) + 2t E \left(\left((f(X) - g(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(\theta, X)) \right) \right) \\ &\quad + E \left((f(X) - g(\theta))^2 \right) \\ &= t^2 I_X(\theta) + 2tg'(\theta) + E([f(X) - E(f(X))]^2) = t^2 I_X(\theta) + 2tg'(\theta) + V(f(X)). \end{aligned}$$

car par définition $E(f(X)) = g(\theta)$.

(b) On calcule immédiatement :

$$\Delta = 4g'(\theta)^2 - 4I_X(\theta)V(f(X)).$$

Pour justifier que $\Delta \leq 0$, il faut prouver que le trinôme $L(t)$ ne change pas de signe (avec le signe du trinôme) :

En effet si $\Delta = 0$, le trinôme change de signe entre ses deux racines, si $\Delta = 0$ il s'annule une fois et reste de signe constant ailleurs, et si $\Delta < 0$ il ne s'annule jamais donc ne change pas de signe.

Or on se rappelle que $L(t)$ est l'espérance d'un carré, elle est donc toujours positive ou nulle, et on a bien $\Delta \leq 0$.

(c) On en déduit que

$$4([g'(\theta)]^2 - I_X(\theta)V(f(X))) \leq 0 \iff V(f(X))I_X(\theta) \geq [g'(\theta)]^2 \iff V(f(X)) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{I_X(\theta)}.$$

29. Par linéarité de l'espérance, propriétés de la variance et indépendance des (X_i) on obtient :

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \theta \quad \text{et} \quad V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \theta = \frac{\theta}{n}.$$

30. On estime dans cette question $g(\theta) = \theta$, donc $g'(\theta) = 1$.

On a calculé précédemment :

$$I_{X_1}(\theta) = \frac{1}{\theta} \quad \text{donc} \quad nI_{X_1}(\theta) = \frac{n}{\theta} = \frac{1}{V(\overline{X}_n)} \quad \text{et enfin} \quad \frac{(g'(\theta))^2}{nI_{X_1}(\theta)} = V(\overline{X}_n).$$

On en déduit par Cramer-Rao que pour tout estimateur T_n sans biais de θ ,

$$V(T_n) \geq V(\overline{X}_n)$$

et donc \overline{X}_n a le plus petit risque quadratique possible parmi les estimateurs sans biais de θ .

31. On estime cette fois $g(\theta) = e^{-\theta}$ donc :

$$g'(\theta) = -e^{-\theta} \quad \text{puis} \quad (g'(\theta))^2 = e^{-2\theta} \quad \text{et} \quad \frac{(g'(\theta))^2}{nI_{X_1}(\theta)} = e^{-2\theta} \times \frac{\theta}{n}.$$

D'autre part on a

$$V(\varphi(S_n)) = e^{-2\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) \underset{+\infty}{\sim} e^{-2\theta} \times \frac{\theta}{n}$$

car $\frac{\theta}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on utilise l'équivalent $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

32. A la limite, $\varphi(S_n)$ est optimal parmi les estimateurs sans biais de $e^{-\theta}$.
33. Non, on a vu à la partie 1 que le meilleur estimateur en terme de risque quadratique n'est pas forcément sans biais; il faudrait donc faire une étude générale avec les estimateurs biaisés.
-