Correction - AP 2

Calcul matriciel

Exercice 1 (EML 2000)

1. (a) λ est valeur propre de J si et seulement si $J-\lambda I_3$ est non inversible. Avec le pivot :

$$J-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 2 \end{pmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 + (1+\lambda)L_2)$$

On obtient une réduite triangulaire qui n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = 0, 1$ ou -2.
Donc $Sp(J) = \{0, 1, -2\}$.
On détermine les sous-espaces propres :

- Pour $E_0(J)$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(J) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2y+z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = z = 0.$$
Donc $E_0(J) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
- Pour $E_1(J)$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(J) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+2y+z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ y = z \end{array} \right.$$
Donc $E_1(J) = \left\{ \begin{pmatrix} 3z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- Pour $E_{-2}(J)$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(J) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y+z & = & 0 \\ y+2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2}z \\ y = -2z \end{array} \right.$$
Donc $E_{-2}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

(b) On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
La famille (V_1, V_2, V_3) contient $3 = dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs. Elle est libre par concaténation des bases des sous-espaces propres $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et J est diagonalisable.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inversible (car V_1, V_2, V_3 sont linéairement indépendants) et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ diagonale, de sorte que $J = PDP^{-1}$.

(c) Comme $M_a = J + aI$, on a alors :

$$M_a = PDP^{-1} + aI = P\left(D + aI\right)P^{-1},$$

avec $D_a = D + aI$ qui est bien diagonale.

(d) M_a est inversible si et seulement si $(D + aI)$ l'est. Or $(D + aI)$ est diagonale, donc elle est inversible si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Donc M_a inversible pour a différent de 0, -1 et 2.

2. (a) On a $XM_a = X^3 = M_aX$ donc X commute avec M_a.
Comme $J = M_a - aI$, $XJ = X(M_a - aI) = XM_a - aX = M_aX - aX = (M_a - aI)X = JX$.

(b) Soit U un vecteur propre de J associé à une valeur propre λ. On a alors $U \neq 0$ et $JU = \lambda U$. Considérons le vecteur $V = XU$. On a :

$$JV = J(XU) = (JX)U = (XJ)U = X(JU) = X(\lambda U) = \lambda XU = \lambda V.$$

Donc :

- Si $V = XU \neq 0$, alors XU est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ. Donc $XU \in Vect(U)$ car chaque sous-espace propre de J est de dimension 1 (question 1.(a)). Donc il existe une réel μ tel que $XU = \mu U$. Donc U est un vecteur propre de X.
- Si $V = XU = 0$, alors U est également un vecteur propre de X associé à la valeur propre 0.

Dans tous les cas, si U est vecteur propre de J, il est également vecteur propre de X.

(c) On a vu aux questions 1.(a) et 1.(b) que (V_1, V_2, V_3) était une base de vecteurs propres de J. D'après la question précédente, (V_1, V_2, V_3) est donc aussi une base de vecteurs propres de X. Donc X est diagonalisable dans la base (V_1, V_2, V_3). En prenant toujours

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on sait qu'il existe une matrice diagonale Δ telle que $X = P\Delta P^{-1}$.
Enfin, comme $X^2 = M_a$, $X^2 = P\Delta^2P^{-1}$ et $M_a = PD_aP^{-1}$, on obtient $P\Delta^2P^{-1} = PD_aP^{-1}$ d'où $\Delta^2 = D_a$.

(d) Comme $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ est diagonale, alors $\Delta^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$ et tous ses termes diagonaux sont positifs ou nuls.
Comme $\Delta^2 = D_a$, ceux de D_a sont également positifs ou nuls.
Donc $-2 + a \geq 0$ d'où : $a \geq 2$.

(e) Réciproquement, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, a, $1 + a$ et $-2 + a$ sont positifs.
Soit $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-2+a} \end{pmatrix}$. Alors $\Delta^2 = D_a$ et en posant $X = P\Delta P^{-1}$ on a :

$$X^2 = P\Delta^2P^{-1} = M_a$$

(f) Ainsi, l'équation $X^2 = M_a$ admet une solution si et seulement si $a \geq 2$

Exercice 2

1. (a) λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ est non inversible. Avec le pivot :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 6 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 7-\lambda & 2 \\ -4-\lambda & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda^2+3\lambda-8 & 2(4+\lambda) \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow 6L_2 + (4+\lambda)L_1) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda^2+3\lambda-8 & 2(4+\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)(\lambda-2) \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow \underbrace{(-\lambda^2+3\lambda-8)}_{\neq 0} L_3 - 2L_2)
\end{aligned}$$

On obtient une réduite triangulaire qui n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = 0, -1$ ou 2.
Donc $Sp(A) = \{0, -1, 2\}$.

(b) On détermine les sous-espaces propres :

- Pour $E_0(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 7y + 2z &= 0 \\ -8y + 8z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}z \\ y = z \end{cases}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $E_{-1}(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 8y + 2z &= 0 \\ -12y + 6z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = \dfrac{1}{2}z \end{cases}$$

Donc $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $E_2(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y + 2z &= 0 \\ -6y + 12z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \end{cases}$$

Donc $E_2(J) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Par concaténation de bases de sous-espaces propres $E_0(A)$, $E_{-1}(A)$ et $E_2(A)$, la famille $\left(\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre. Comme elle est de cardinale $3=\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

On pose dans la suite $u=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $w=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

(c) On sait que $Au=0$, $Av=-v$ et $Aw=2w$. Alors (à démontrer par récurrence si nécessaire) $A^nu=0$, $A^nv=(-1)^nv$ et $A^nw=2^nw$. Donc (u,v,w) est une base de vecteurs propres de A^n, $Sp(A^n)=\{0,(-1)^n,2^n\}$ et $E_0(A^n)=Vect(u)$, $E_{(-1)^n}(A^n)=Vect(v)$, $E_{2^n}(A^n)=Vect(w)$.

2. (a) Supposons que X est une solution de (E). Alors $X^n=A^n$ et donc :

$$X\times A^n=X\times X^n=X^{n+1}=X^n\times X=A^n\times X.$$

(b) Avec la question précédente :

- $A^n\times Xu=X\times A^nu=X\times 0=0$ donc $Xu\in E_0(A^n)=Vect(u)$. Donc $Xu=\alpha u$. Comme $u\neq 0$, u est donc bien un vecteur propre de X.
- De même, $A^n\times Xv=X\times A^nv=X\times(-1)^nv=(-1)^nXv$ donc $Xv\in E_{(-1)^n}(A^n)=Vect(v)$. Donc $Xv=\beta v$. Comme $v\neq 0$, v est donc bien un vecteur propre de X.
- De même, $A^n\times Xw=X\times A^nw=X\times 2^nw=2^nXw$ donc $Xw\in E_{2^n}(A^n)=Vect(w)$. Donc $Xw=\gamma w$. Comme $w\neq 0$, w est donc bien un vecteur propre de X.

Finalement, (u,v,w) est bien une base de vecteurs propres de X.

(c) On considère P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs u,v,w, $D=diag(0,-1,2)$ et $Y=diag(\alpha,\beta,\gamma)$.
Alors $A=PDP^{-1}\Leftrightarrow P^{-1}AP=D$ et $X=PYP^{-1}\Leftrightarrow Y=P^{-1}XP$.

3. (a) On peut montrer par récurrence que $D^n=P^{-1}A^nP$ et $Y^n=P^{-1}X^nP$. Alors :

$$(E)\Leftrightarrow X^n=A^n\Leftrightarrow P^{-1}X^nP=P^{-1}A^nP\Leftrightarrow Y^n=D^n.$$

(b) Comme Y et D sont diagonales, on a donc :

$$Y^n=D^n\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha^n&0&0\\0&\beta^n&0\\0&0&\gamma^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}.$$

Donc $\alpha=0$, $\beta=-1$ si n impair et ±1 si n pair et $\gamma=2$ si n impair et ±2 si n pair.
On en déduit les solutions de (E) en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite :

- Si n impair, une seule solution :

$$P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}.$$

- Si n pair, 4 solutions :

$$P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\pm1&0\\0&0&\pm2\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Il faudrait vérifier réciproquement que les matrices obtenues ci-dessus sont bien solutions de l'équation (E) (calculs simples laissés au lecteur).

Exercice 3 (ESCP)

1. (a) f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}\left((n+1)x+n\right).$$

On a alors 2 cas :

- Si n est impair : $n-1$ est pair et supérieur ou égal à 2. Donc $x^{n-1} \geq 0$ et f_n' est du signe de $(n+1)x+n$.

x	$-\infty$		$-\frac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\frac{n}{n+1})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Si n est pair :

x	$-\infty$		$-\frac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On a, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f_n(-\frac{n}{n+1}) &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n}\left(-\frac{n}{n+1}+1\right) \\ &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Si n est pair, $f_n(-\frac{n}{n+1}) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < 1 < 2$.

Si n est impair, $f_n(-\frac{n}{n+1}) = -\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < 0 < 2$.

Ainsi, dans tous les cas, $f_n(-\frac{n}{n+1}) < 2$.

(c)
- Sur $[0,+\infty[$ (quelque soit la parité de n) : f_n est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[) = [0,+\infty[$. Donc l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution (l'antécédent de 2 par f_n). Remarquons que $f_n(1) = 1^{n+1} + 1^n = 2$ donc 1 est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 2$ sur $[0,+\infty[$.
- Sur $]-\infty,0]$: On distingue deux cas suivant la parité de n.
  - Si n est impair : Sur $[-\frac{n}{n+1},0]$, f_n est négative donc l'équation $f_n(x) = 2$ n'a pas de solution. Sur $]-\infty,-\frac{n}{n+1}]$, on applique une nouvelle fois le théorème de la bijection, ce qui démontre que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha_n \in]-\infty,-\frac{n}{n+1}]$.

- Si n est pair : f_n atteint son maximum au point d'abscisse $-\dfrac{n}{n+1}$. Or d'après la question précédente $f_n(-\dfrac{n}{n+1}) < 2$. Donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution.

Donc, l'équation $x^{n+1} + x^n = 2$ admet deux solutions $x = \alpha_n$ et $x = 1$ si n est impair, et une unique solution $x = 1$ si n est pair.

2. On cherche les valeurs de λ qui rendent $A - \lambda I_2$ non inversible en déterminant une réduite triangulaire par la méthode du pivot :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)\\ &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda\\ 0 & P(\lambda)\end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1)\end{aligned}$$

avec $P(\lambda) = 1 - (1-\lambda)^2 = 2\lambda - \lambda^2 = \lambda(2-\lambda)$.

Cette réduite est triangulaire, donc $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$.

On détermine $E_0(A)$:

$$X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow (A - 0I_2) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$$

Donc $E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix}-y\\ y\end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

On détermine $E_2(A)$:

$$X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I_2) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Donc $E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix}y\\ y\end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, car elle est libre (c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires) et de cardinale égal à la dimension de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Donc A est diagonalisable et, en posant $P = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, on a : $A = PDP^{-1}$.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E_n) &\Leftrightarrow X^{n+1} + X^n = A\\ &\Leftrightarrow X^{n+1} + X^n = PDP^{-1}\\ &\Leftrightarrow P^{-1}X^{n+1}P + P^{-1}X^nP = \underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I} = D.\end{aligned}$$

On pose $Y = P^{-1}XP$. On a $Y^n = (P^{-1}XP)^n = P^{-1}X^nP$ (on peut démontrer cette dernière égalité avec une récurrence). De même $Y^{n+1} = P^{-1}X^{n+1}P$. Donc :

$$X \text{ solution de } (E_n) \Leftrightarrow Y^{n+1} + Y^n = D \Leftrightarrow Y \text{ solution de } (E'_n)$$

(b) Soit Y une solution de (E'_n). Donc $Y^{n+1} + Y^n = D$. Alors :

$$DY = (Y^{n+1} + Y^n)Y = Y^{n+2} + Y^{n+1} = Y(Y^{n+1} + Y^n) = YD.$$

(c) On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$DY = YD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2b = 0 \text{ et } 2c = 0 \Leftrightarrow b = c = 0.$$

(d) D'après la question précédente, $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Donc $Y^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} Y \text{ solution de } (E'_n) &\Leftrightarrow Y^{n+1} + Y^n = D \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow a^{n+1} + a^n = 0 \text{ et } d^{n+1} + d^n = 2. \end{aligned}$$

Donc $a^{n+1} + a^n = a^n(a+1) = 0$. Donc $a^n = 0$ ou $a + 1 = 0$. Donc les seules valeurs possibles pour a sont 0 et -1.

(e) On a vu que :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E_n) &\Leftrightarrow Y \text{ solution de } (E'_n) \\ &\Leftrightarrow a^{n+1} + a^n = 0 \text{ et } d^{n+1} + d^n = 2. \end{aligned}$$

D'après la question 1.(c),

- Si n impair : L'équation $d^{n+1} + d^n = 2$ admet deux solutions ($d = \alpha$ et $d = 1$). Il y a donc 4 solutions de (E'_n):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si n pair : L'équation $d^{n+1} + d^n = 2$ admet une solution ($d = 1$). Il y a donc 2 solutions de (E'_n) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il faudrait vérifier réciproquement que les matrices obtenues ci-dessus sont bien solutions de l'équation (E_n) (calculs simples laissés au lecteur).

Enfin, on remarque que deux valeurs différentes de Y donnent deux valeurs différentes pour X. En effet :

$$X_1 = X_2 \Leftrightarrow P^{-1}X_1P = P^{-1}X_2P \Leftrightarrow Y_1 = Y_2.$$

Donc (E_n) admet 4 solutions si n est impair et 2 solutions si n est pair.

4. Ici, $n = 3$ donc n est impair. D'après la question précédente, (E'_3) admet 4 solutions :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Y_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ Y_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(E_3) admet donc 4 solutions $X_i = PY_iP^{-1}$. On obtient alors (calculs laissés au lecteur) :

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \ X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & -1+\alpha \end{pmatrix}, \ X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$