Correction - AP 3

Trace d'une matrice carrée - Indice de Gini

Exercice 1 (Trace d'une matrice carrée)

1. A l'aide de la définition de t, on a : $t(I_n) = \sum_{i=1}^{n} [I_n]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

2. (a) Soient A et B deux matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$t(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda A + B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda [A]_{i,i} + [B]_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} [B]_{i,i} = \lambda t(A) + t(B).$$

   (b) Comme $t : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $Im(t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Donc $dim(Im(t)) = 0$ (et $Im(t) = \{0\}$) ou $dim(Im(t)) = 1$ (et $Im(t) = \mathbb{R}$). Or $t(I_n) = n \neq 0$ donc $Im(t) \neq \{0\}$. Donc $Im(t) = \mathbb{R}$ et une base de $Im(t)$ est le nombre 1.

   (c) Par théorème du rang : $dim(Ker(t)) = dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) - dim(Im(t)) = n^2 - 1$.
   On résout l'équation $t(A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} = 0 \Leftrightarrow [A]_{n,n} = -\sum_{i=1}^{n-1} [A]_{i,i}$. Donc :

$$Ker(t) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid [A]_{n,n} = -\sum_{i=1}^{n-1} [A]_{i,i}\} = Vect((M_1, M_2, ..., M_{n-1}) \cup (E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j})$$

   où $\forall i \in [\![1; n-1]\!]$, M_i est la matrice diagonale ayant un 1 sur le i-ième coefficient de la diagonale et un -1 sur son dernier coefficient, et nulle ailleurs, et pour tout $i \neq j$, $E_{i,j}$ est la matrice nulle sauf le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1.
   La famille obtenue est une famille de $n - 1 + n^2 - n = n^2 - 1$ vecteurs, génératrice d'un espace de dimension $n^2 - 1$ donc c'est une base de cet espace.

3. (a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, on sait que ${}^tA$ est, par définition, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq n, [{}^tA]_{i,j} = [A]_{j,i}$.
   Ainsi, un matrice et sa transposée ont mêmes coefficients diagonaux donc :

$$t({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} [{}^tA]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} = t(A).$$

   (b) Soient A et B deux matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} t(AB) &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [B]_{k,i}[A]_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [B]_{k,i}[A]_{i,k} \text{ (en échangeant les sommes : valide car indices non dépendants)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [BA]_{k,k} = t(BA). \end{aligned}$$

   (c) Soient A et B deux matrices. Supposons qu'il existe P inversible telle que $B = PAP^{-1}$ (on dit alors que A et B sont deux matrices semblables).

$$\begin{aligned} t(B) &= t(PAP^{-1}) = t((PA)P^{-1}) = t(P^{-1}(PA)) \text{ (d'après la propriété ci-dessus)} \\ &= t(P^{-1}PA) = t(IA) = t(A) \end{aligned}$$

   Deux matrices semblables ont donc même trace.

(d) A est diagonalisable donc elle est semblable à une matrice diagonale. Il existe donc une matrice P inversible dont les colonnes sont constituées d'une base de vecteurs propres (en rassemblant une base de E_{λ_1}, une base de E_{λ_2}, ..., et une base de E_{λ_p}) et une matrice D diagonale dont la diagonale contient les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de A où λ_i apparait $dim(E_{\lambda_i})$ fois.

Comme deux matrices semblables ont même trace, on a :

$$t(A) = t(D) = \underbrace{\lambda_1 + \ldots + \lambda_1}_{\dim(E_{\lambda_1}) \text{ fois}} + \underbrace{\lambda_2 + \ldots + \lambda_2}_{\dim(E_{\lambda_2}) \text{ fois}} + \ldots + \underbrace{\lambda_p + \ldots + \lambda_p}_{\dim(E_{\lambda_p}) \text{ fois}} = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) \times \lambda_i.$$

Exercice 2 (Indice de Gini - Sujet ESSEC II 2017)

Avant de donner la correction de l'exercice, faisons quelques rappels sur les fonctions convexes.

Définition.

On dit qu'une fonction f est **convexe** sur un intervalle I si :

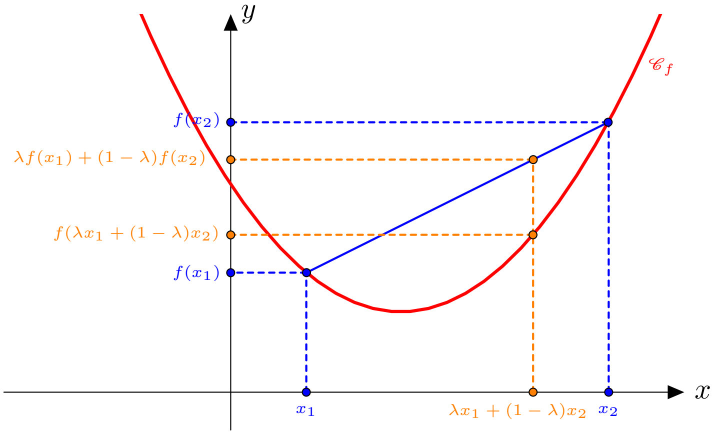
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

On dit que f est **concave** sur I si $-f$ est convexe sur I, c'est à dire si :

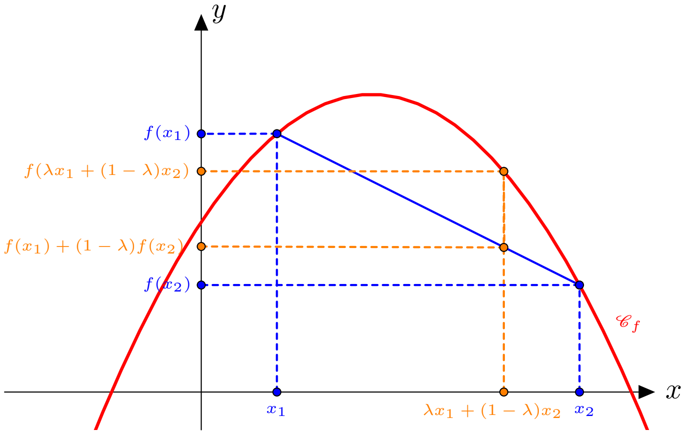
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Interprétation graphique.

- Si f est **convexe**, pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, l'image de tout point du segment $[x_1, x_2]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$:



- Si f est **concave**, pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, l'image de tout point du segment $[x_1, x_2]$ est **au dessus de la corde** passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$:



Propriété 1 (Inégalité de Jensen)

On suppose que f est **convexe** sur I. Alors, pour tous $x_1, \dots, x_n$ choisis dans I et tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ de somme égale à 1, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Preuve. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété "pour tous $x_1, \dots, x_n$ choisis dans I et tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ de somme égale à 1, $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$".

Ini. Si $x_1, x_2 \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Comme f est convexe,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Héré. Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Soit $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ positifs de somme égale à 1. Si un des $\lambda_i = 0$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et c'est terminé.

Sinon, les λ_i sont tous non nuls et comme la somme vaut 1, $\lambda_{n+1} \neq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
& f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\
= \ & f\left((1-\lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) \\
\leq \ & (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \quad \text{car } f \text{ convexe} \\
\leq \ & (1-\lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n) \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \quad \text{par hyp. de réc.} \\
= \ & \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

On a pu appliqué l'hyp. de réc. car les $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, on a démontré le résultat pour tout $n \geq 2$.

□

Remarque. Si f est **concave** sur I, alors on a :

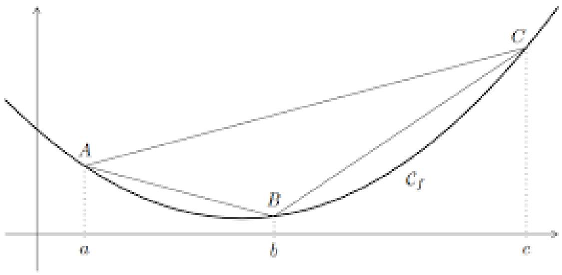
$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Propriété 2 (Inégalité des pentes)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si et seulement si

$$\forall a, b, c \in I, \quad a < b < c \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Preuve. Proposons une preuve géométrique de cette propriété :



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{pente de } (AB),$$
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \text{pente de } (AC),$$
$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} = \text{pente de } (BC).$$

On remarque alors graphiquement qu'on a bien : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$. □

Remarque. Si f est **concave** sur I, alors on a :

$$\forall a, b, c \in I, \quad a < b < c \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Propriété 3 (Première caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^1$)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Alors :

(1) f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I.

(2) f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I.

Preuve. Prouvons que si f est convexe sur I, alors f' est croissante sur I.
Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Soit $x \in]a, b[$. Avec la propriété précédente, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Comme f est dérivable en a, on a par passage à la limite quand $x \to a$ dans la première inégalité :

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De même, comme f est dérivable en b, on a par passage à la limite quand $x \to b$ dans la deuxième inégalité :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Donc :

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

On a ainsi démontré que pour tout $a, b \in I$, si $a < b$ alors $f'(a) \leq f'(b)$. Donc f' est croissante sur I.
□

Propriété 4 (Deuxième caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^1$)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Alors :

(1) f est **convexe** sur I si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est **au dessus** de chacune de ses tangentes.

(2) f est **concave** sur I si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de chacune de ses tangentes.

Preuve. Prouvons que si f est convexe sur I, alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de chacune de ses tangentes.
Soit $a \in I$ et considérons la fonction φ définie sur I par :

$$\varphi(x) = f(x) - (f(a) + (x-a)f'(a)).$$

φ est définie, continue et dérivable sur I et

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Comme f' est croissante sur I car f est convexe (d'après la propriété 3), on obtient le tableau de variation suivant :

x		a	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Donc pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$.
Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est bien au dessus de sa tangente en a, avec a un point quelconque de I. $\square$

Propriété 5 (Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^2$)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I. Alors :

(1) f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

(2) f est **concave** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

Preuve. Avec la propriété 3, on a :

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I \Leftrightarrow f'' \geq 0 \text{ sur } I.$$

$\square$

Exemples d'applications : les inégalités de convexité.

1. Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $x + 1 \leq e^x \leq (e-1)x + 1$.

Correction.

On remarque que $f(x) = e^x$ est convexe sur $[0,1]$ (et même sur $\mathbb{R}$) donc elle est au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = x+1$ et que sa corde sur $[0,1]$ d'équation $y = (e-1)x+1$.

2. Montrer que la moyenne géométrique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ positifs est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique de ceux-ci :
$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

✎ **Correction.**

Si l'un des x_i est nul, alors l'inégalité est évidente. Sinon ils sont tous strictement positifs et, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \\ \Leftrightarrow\quad & \ln\left(\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right) \leq \ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\ln(x_1)+\ln(x_2)+\ldots+\ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie car c'est l'inégalité de Jensen en prenant $f(x) = \ln(x)$ qui est concave et $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ de sorte que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Voici maintenant la correction de l'exercice :

1. (a) La définition d'une fonction convexe sur J signifie que sur tout segment $[t_1, t_2]$ de J, l'image de tout point du segment $[t_1, t_2]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(t_1, f(t_1))$ et $(t_2, f(t_2))$.

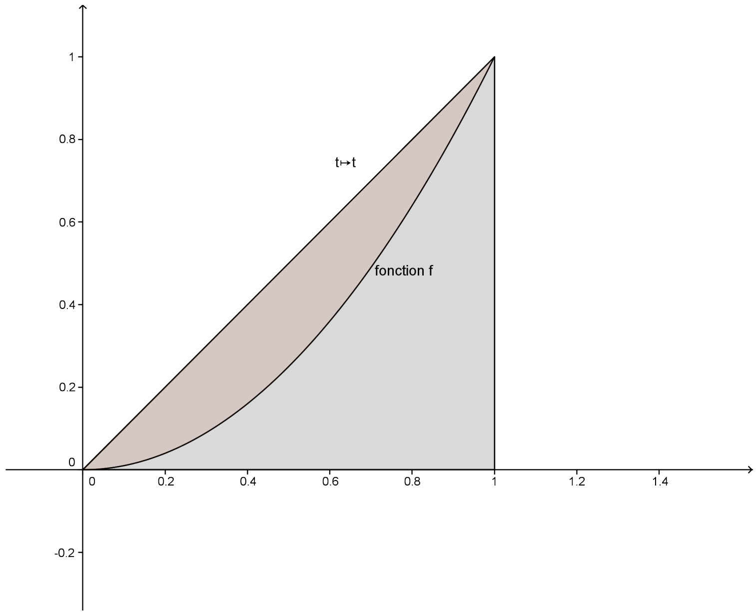
   (b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, f est convexe sur $[0, 1]$ si et seulement si sa dérivée est croissante sur $[0, 1]$.

2. (a) D'après l'énoncé, $\tilde{f}$ est concave si $-\tilde{f} : t \mapsto f(t) - t$ est convexe.
   Montrons que $-\tilde{f}$ est convexe : $\forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],$,
$$\begin{aligned} -\tilde{f}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) - (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \\ &\leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2) - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2 \quad \text{(car } f \text{ est convexe)} \\ &= \lambda(f(t_1) - t_1) + (1-\lambda)(f(t_2) - t_2) \\ &= \lambda.\left(-\tilde{f}(t_1)\right) + (1-\lambda).\left(-\tilde{f}(t_2)\right) \end{aligned}$$
   Ainsi, $-\tilde{f}$ est bien convexe, c'est-à-dire que $\tilde{f}$ est concave.

   (b) Toutes les fonctions intervenant dans le calcul sont continues sur le segment $[0, 1]$ donc y admettent une intégrale. Et par linéarité de l'intégration sur $[0, 1]$:
$$I(f) = 2\left(\int_0^1 tdt - \int_0^1 f(t)dt\right) = 2\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)dt\right) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt.$$

   (c) On remarque dans le calcul précédent que $\displaystyle\int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 tdt}$.

   Ainsi, $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 (t - f(t))dt = \frac{\displaystyle\int_0^1 (t-f(t))dt}{\displaystyle\int_0^1 tdt}$ est la proportion de l'aire entre la courbe de f et la droite $y = x$ dans l'aire entre l'axe des abscisses et la droite $y = x$ sur le segment $[0, 1]$.



3. (a) $\forall t \in [0,1]$, $t^2 \in [0,1]$ donc f est bien définie sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$ et en particulier $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
   f est de classe C^2 sur $[0,1]$ comme fonction polynômiale. En particulier, elle est bien continue et $f''(t) = 2 \geq 0$ donc f est bien convexe.
   Finalement, f est bien un élément de E.

   (b) $I(f) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 t^2 dt = 1 - 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4. (a) Montrons que $\tilde{f} \geq 0$ sur $[0,1]$:
   Comme l'énoncé donne les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$, $\forall t \in [0,1]$, appliquons l'inégalité de convexité avec $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ et $\lambda = t$:

$$f(t.1 + (1-t).0) \leq t.f(1) + (1-t).f(0) \Leftrightarrow f(t) \leq t \Leftrightarrow t - f(t) \geq 0$$

   Ainsi, $\forall t \in [0,1]$ $\tilde{f}(t) \geq 0$ et par croissance des bornes, $\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)dt \geq 0$ donc $I(f) \geq 0$.

   (b) $I(f) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0$ car $\tilde{f}$ est continue et positive sur $[0,1]$.
   Ainsi, $I(f) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], f(t) = t$.

   (c) Pour tout f élément de E, f est continue et positive et $f \neq 0$ (car $f(1) = 1$) donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt > 0$. Ainsi, $I(f) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt < 1$.

   (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$. On peut vérifier que $f_n \in E$ (même raisonnement qu'à la question 3.(a).

      i. $I(f_n) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 t^n dt = 1 - 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{n+1}$.

      ii. • *Méthode 1 :* La question précédente donne $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I(f_n) = 1$. Donc, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = 1 - A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq N$, $1 - \varepsilon < I(f_n) < 1 + \varepsilon$. Ainsi, en particulier, pour tout $n \geq N$, $I(f_n) > 1 - \varepsilon = A$. Donc $f = f_N$ convient.

      • *Méthode 2 :* Cherchons les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $I(f_n) > A$:
      $I(f_n) > A \Leftrightarrow 1 - \dfrac{2}{n+1} > A \Leftrightarrow \dfrac{2}{n+1} < 1 - A \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{2} > \dfrac{1}{1-A}$, car $1 - A > 0$,

$\Leftrightarrow n > \dfrac{2}{1-A} - 1 \Leftrightarrow n \geq \left\lfloor \dfrac{2}{1-A} \right\rfloor$.

En posant $N = \left\lfloor \dfrac{2}{1-A} \right\rfloor$, alors $f = f_N$ convient.

5. (a) $f \in E$ donc f est continue sur $[0,1]$ et $t \mapsto t$ est continue sur $[0,1]$ donc $\tilde{f}$ est continue sur le *segment* $[0,1]$. Or toute fonction continue sur un *segment* est bornée et atteint ses bornes. De plus, $\tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0$, $\tilde{f}(1) = 1 - f(1) = 0$ et $\tilde{f(t)} \geq 0$ sur $]0,1[$ donc il existe t_0 dans $]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t)$.

(b) On remarque que $t = \dfrac{t}{t_0}.t_0 = \dfrac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \dfrac{t}{t_0}).0$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 0$ et $\lambda = \dfrac{t}{t_0} \in [0,1]$ car $t \in [0, t_0]$, on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}).0\right) \geq \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t}{t_0}).\underbrace{\tilde{f}(0)}_{=0-f(0)=0} = \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0)$$

(c) On remarque que $t = \dfrac{t-1}{t_0-1}.(t_0-1)+1 = \dfrac{t-1}{t_0-1}.t_0 - \dfrac{t-1}{t_0-1} + 1 = \dfrac{t-1}{t_0-1}.t_0 + \left(1 - \dfrac{t-1}{t_0-1}\right).1$.

Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 1$ et $\lambda = \dfrac{t-1}{t_0-1} \in [0,1]$ (car $t \in [t_0, 1]$ donc $t_0 - 1 \leq t - 1 \leq 0$ donc en multipliant par $\dfrac{1}{t_0-1} < 0$, on a : $1 \geq \dfrac{t-1}{t_0-1} \geq 0$), on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t-1}{t_0-1}.t_0 + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}).1\right) \geq \frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}).\underbrace{\tilde{f}(1)}_{=1-f(1)=0} = \frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0)$$

(d) Ainsi,

$$\begin{aligned}
I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)dt &= 2\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)dt + 2\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)dt \quad \text{(Chasles)} \\
&\geq 2\int_0^{t_0} \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0)dt + 2\int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0)dt \quad \text{(questions précédentes)} \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\int_0^{t_0} \frac{t}{t_0}dt + 2.\tilde{f}(t_0)\int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1}dt \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\left[\frac{t^2}{2t_0}\right]_0^{t_0} + 2.\tilde{f}(t_0)\left[\frac{(t-1)^2}{2(t_0-1)}\right]_{t_0}^1 \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\frac{t_0}{2} - 2.\tilde{f}(t_0)\frac{t_0-1}{2} \\
&= \tilde{f}(t_0)
\end{aligned}$$

6. (a) • Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p_i = \dfrac{n_i}{N} \geq 0$ car d'après l'énoncé, on a $n_i \geq x_i \in \mathbb{N}^*$ donc $n_i > 0$, et donc $N = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} n_i > 0$.

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{1}{N}N = 1$.

Ainsi, la famille $P = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ définit bien une loi de probabilité.

On prouve par un raisonnement similaire que les familles $Q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ définissent des lois de probabilité.

(b) Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, d'après l'énoncé, on sait que

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1} \Leftrightarrow \frac{x_i}{n_i} \leq \frac{x_{i+1}}{n_{i+1}} \Leftrightarrow \frac{q_i}{p_i} = \frac{N}{X}\frac{x_i}{n_i} \leq \frac{N}{X}\frac{x_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$$

(c) On remarque que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{r_i}{p_i} = \frac{N}{Y}\frac{y_i}{n_i} = \frac{N}{Y}\frac{n_i - x_i}{n_i} = \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_i).$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, d'après l'énoncé,

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1} \Leftrightarrow 1-\varepsilon_i \geq 1-\varepsilon_{i+1} \Leftrightarrow \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_i) \geq \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_{i+1}) \Leftrightarrow \frac{r_i}{pi} \geq \frac{r_{i+1}}{p_{i+1}}.$$

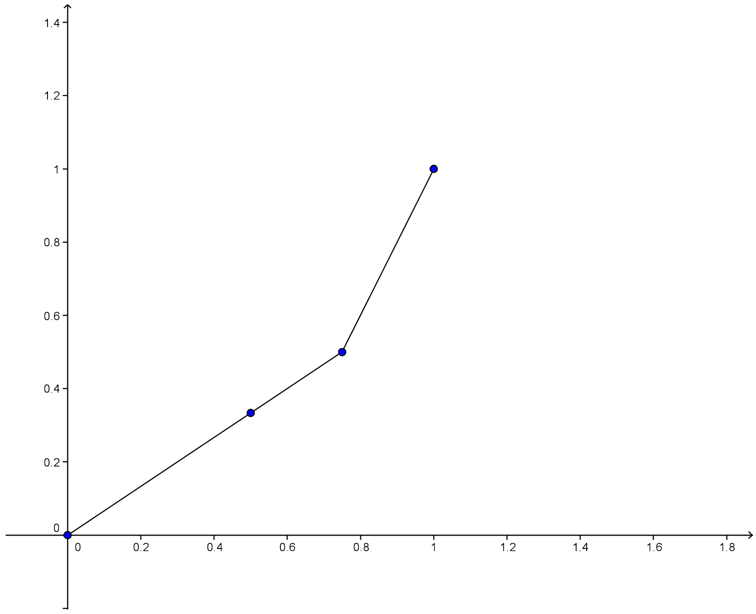
(d) Pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$,

$$\frac{p_i - \varepsilon q_i}{1-\varepsilon} = \frac{\frac{n_i}{N} - \frac{X}{N}.\frac{x_i}{X}}{1-\frac{X}{N}} = \frac{\frac{n_i - x_i}{N}}{\frac{N-X}{N}} = \frac{n_i - x_i}{N}.\frac{N}{N-X} = \frac{n_i - x_i}{N-X} = \frac{y_i}{Y} = r_i$$

7. (a) D'après l'énoncé, on a :

- $p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $q_1 = \dfrac{1}{3}$ donc $(P_1, Q_1) = (p_1, q_1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.
- $p_2 = \dfrac{1}{4}$ et $q_2 = \dfrac{1}{6}$ donc $(P_2, Q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.
- $p_3 = \dfrac{1}{4}$ et $q_3 = \dfrac{1}{2}$ donc $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, q_1 + q_2 + q_3) = (1, 1)$.

On place les points de coordonnées $(P_i, Q_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment, on obtient :



(b) Soit i appartenant à $[\![1, n]\!]$. La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est :

$$u_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{i} q_h - \sum_{h=1}^{i-1} q_h}{\displaystyle\sum_{h=1}^{i} p_h - \sum_{h=1}^{i-1} p_h} = \frac{q_i}{p_i}.$$

(c) D'après la question précédente, φ est de pente u_{i+1} donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = u_{i+1}t + b$, avec b à déterminer.
On sait que $\varphi(P_i) = Q_i \Leftrightarrow u_{i+1}P_i + b = Q_i \Leftrightarrow b = Q_i - u_{i+1}P_i$.
Ainsi, $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

(d) On admet que, la suite $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ des pentes de φ étant croissante (d'après 6.(b)), φ est une fonctions convexe.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ est continue sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$ en tant que fonction affine et φ est continue en P_{i+1} (car $\lim\limits_{x\to P_{i+1}^-} \varphi = \lim\limits_{x\to P_{i+1}^+} \varphi = Q_{i+1} = \varphi(P_{i+1})$). Donc φ est continue sur $[0, 1]$.
$\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$ et $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$.
Finalement, φ appartient bien à E.

(e) Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} (u_{i+1}(t-P_i) + Q_i)dt = \left[u_{i+1}\frac{(t-P_i)^2}{2} + Q_i t\right]_{P_i}^{P_{i+1}} \\
&= u_{i+1}\frac{(P_{i+1}-P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\
&= \frac{Q_{i+1}-Q_i}{P_{i+1}-P_i}\frac{(P_{i+1}-P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\
&= (P_{i+1}-P_i)\left(\frac{Q_{i+1}-Q_i}{2} + Q_i\right) = (P_{i+1}-P_i)\left(\frac{Q_{i+1}+Q_i}{2}\right).
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
I(\varphi) &= 1 - 2\int_0^1 \varphi(t)dt \quad \text{(d'après 2.(b))} \\
&= 1 - 2\int_{P_0}^{P_n} \varphi(t)dt \\
&= 1 - 2\left(\int_{P_0}^{P_1} \varphi(t)dt + \int_{P_1}^{P_2} \varphi(t)dt + \ldots + \int_{P_{n-1}}^{P_n} \varphi(t)dt\right) \quad \text{(Chasles)} \\
&= 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt \\
&= 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1}(P_{i+1}-P_i)\left(\frac{Q_{i+1}+Q_i}{2}\right).
\end{aligned}$$

8. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est :

$$v_i = \frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{r_i}{p_i}.$$

(b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0, 1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1-t)$.

i. D'après l'énoncé, on a :

- $p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $r_1 = \dfrac{2}{3}$ donc $(P_1, R_1) = (p_1, r_1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$.
- $p_2 = \dfrac{1}{4}$ et $r_2 = \dfrac{1}{6}$ donc $(P_2, R_2) = (p_1 + p_2, r_1 + r_2) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}\right)$.
- $p_3 = \dfrac{1}{4}$ et $r_3 = \dfrac{1}{6}$ donc $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, r_1 + r_2 + r_3) = (1, 1)$.

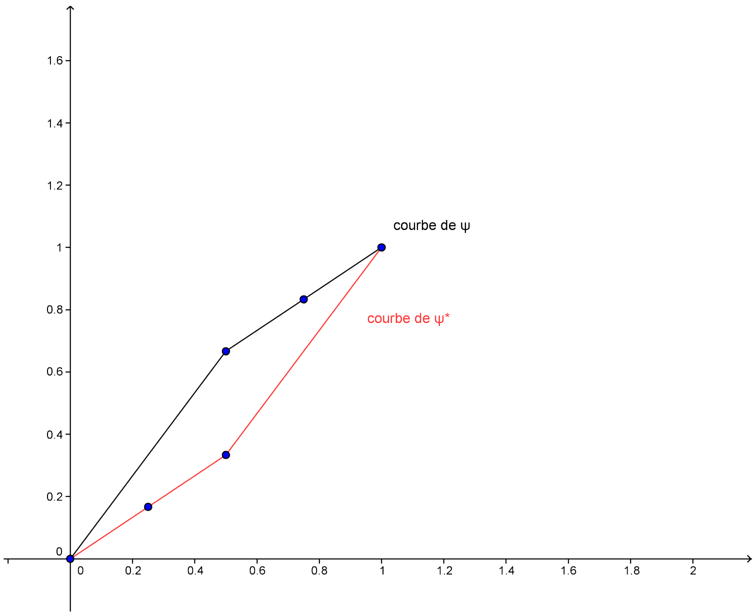
Pour tracer ψ, on place les points de coordonnées $(P_i, R_i)_{0\leq i\leq 3}$ et on les relie par des segments.
De plus, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est affine sur $[P_i, P_{i+1}]$ et vaut $\psi(t) = v_{i+1}(t-P_i)+R_i$, donc ψ^* est affine sur

$$\begin{aligned}\{t \in [0,1] \mid P_i \leq 1-t \leq P_{i+1}\} &= \{t \in [0,1] \mid 1-P_{i+1} \leq t \leq 1-P_i\} \\ &= [1-P_{i+1}; 1-P_i] = [\Pi_{n-i-1}, ; \Pi_{n-i}]\end{aligned}$$

car elle vaut $\psi^*(t) = 1 - v_{i+1}(1-t-P_i) + R_i$.
En posant le changement d'indice $j = n-i$, ψ^* est donc affine sur les segment $[\Pi_{j-1}; \Pi_j]$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. De plus,

- $\Pi_0 = 1 - P_3 = 0$ et $\psi^*(\Pi_0) = 1 - \psi(1-\Pi_0) = 1 - \psi(P_3) = 1 - R_3 = 0$.
- $\Pi_1 = 1 - P_2 = \dfrac{1}{4}$ et $\psi^*(\Pi_1) = 1 - \psi(1-\Pi_1) = 1 - \psi(P_2) = 1 - R_2 = \dfrac{1}{6}$.
- $\Pi_2 = 1 - P_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\psi^*(\Pi_2) = 1 - \psi(1-\Pi_2) = 1 - \psi(P_1) = 1 - R_1 = \dfrac{1}{3}$.
- $\Pi_3 = 1 - P_0 = 1$ et $\psi^*(\Pi_3) = 1 - \psi(1-\Pi_3) = 1 - \psi(P_0) = 1 - R_0 = 1$.

Pour tracer ψ^*, on place les points de coordonnées $(\Pi_i, \psi^*(\Pi_i))_{0\leq i\leq 3}$ et on les relie par des segment.



ii. On admet que ψ étant continue et la suite (v_i) de ses pentes étant décroissante (d'après 6.(c)), la fonction ψ est concave.
Montrons alors que ψ^* est convexe : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\psi^*(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= 1 - \psi\left(1 - (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)\right) \\ &= 1 - \psi\left(\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2)\right) \\ &= 1 - \psi\left(\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2)\right) \\ &= 1 - \underbrace{\psi\left(\lambda(1-t_1) + (1-\lambda)(1-t_2)\right)}_{\geq \lambda\psi(1-t_1)+(1-\lambda)\psi(1-t_2) \quad \text{car } \psi \text{ est concave}} \\ &\leq 1 - (\lambda\psi(1-t_1) + (1-\lambda)\psi(1-t_2)) \\ &= \lambda + (1-\lambda) - \lambda\psi(1-t_1) - (1-\lambda)\psi(1-t_2) \\ &= \lambda(1-\psi(1-t_1)) + (1-\lambda)(1-\psi(1-t_2))\end{aligned}$$

iii. cf question 8.(b)i.

iv. On a pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\psi^*(\Pi_i) = 1 - \psi(1 - \Pi_i) = 1 - \psi(P_{n-1}) = 1 - R_{n-i}$.
La pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est donc

$$\begin{aligned}\frac{1 - R_{n-i} - (1 - R_{n-(i-1)})}{\Pi_i - \Pi_{i-1}} &= \frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{1 - P_{n-i} - (1 - P_{n-(i-1)})} \\ &= \frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{P_{n-i+1} - P_{n-i}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = v_{n-i+1}.\end{aligned}$$

9. (a) Si $\varphi = \psi^*$ alors elles ont même pente donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = v_{n-i+1}$.
Or,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{\frac{x_i}{n_i}}{\frac{X}{N}} = \frac{\frac{x_i}{X}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{q_i}{p_i} = u_i$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} &= \frac{1 - \frac{x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{1 - \frac{X}{N}} = \frac{\frac{n_{n-i+1} - x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{N - X}{N}} = \frac{\frac{y_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{Y}{N}} \\ &= \frac{\frac{y_{n-i+1}}{Y}}{\frac{n_{n-i+1}}{N}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = v_{n-i+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, par égalité des pentes,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} \qquad (1)$$

(b) On applique l'égalité (1) en posant le changement de variable $j = n - i + 1 \in [\![1, n]\!]$ (et en le renommant i), on obtient

$$\frac{\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon} \qquad (2)$$

Sommons les égalités (1) et (2) :

$$\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{2 - (\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1})}{1 - \varepsilon} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} = \frac{2}{1 - \varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} = \frac{2}{1 - \varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$$

(c) Nous avons montré aux 2 questions précédentes $\begin{cases} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} & + \frac{\varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} & = \frac{1}{1 - \varepsilon} \\ \varepsilon_i & + \varepsilon_{n-i+1} & = 2\varepsilon \end{cases}$
En effectuant le pivot $L_2 \leftarrow (1 - \varepsilon)L_1 - L_2$, on obtient :

$$\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon).$$

(d) On suppose que $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$, alors $1 - 2\varepsilon \neq 0$. On divise l'égalité précédente par $1 - 2\varepsilon$ et on obtient que pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \varepsilon$.
Si φ est égale à son adjointe, alors le pourcentage de femmes (ou plus généralement de personnes de classe I.) est le même dans toutes les catégories socio-professionnelles. Il n'y a donc aucune inégalité sociale entre les femmes (personnes de classe I.) et les hommes (personnes de classe II.) .