Correction - AP 4

# Séries réelles

## Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or, pour tout $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. Donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}(2n-(n+1)+1) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

Par l'absurde, suppose que la série harmonique converge et notons $H \in \mathbb{R}$ sa somme. Alors $\lim_{n\to+\infty} H_n = H$ et $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} = H$. En passant à la limite dans l'inégalité démontrée précédemment, on obtient alors $0 = H - H \geq \frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Donc la série harmonique diverge.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.
En intégrant pour $t$ allant de $k$ à $k+1$ (bornes croissantes), on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt.$$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dt = \frac{1}{k+1}[t]_k^{k+1} = \frac{1}{k+1}$ et de même $\int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt = \frac{1}{k}$.
Finalement, on a bien que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}$.

(b) Soit un entier $n \geq 2$. On somme les inégalités précédentes pour $k$ allant de 1 à $n-1$ :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or :

- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{1} = H_n - 1$.
- Par la relation de Chasles, $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt = \int_1^n \frac{1}{t}dt$.
- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1}$.

On a donc, pour tout entier $n \geq 2$, $H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq H_{n-1}$.

(c) Tout d'abord, $\int_1^n \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n)$.
Avec la question précédente, on a donc pour tout $n \geq 2$ :

- D'une part, $H_n - 1 \leq \ln(n)$ donc $H_n \leq \ln(n) + 1$.
- D'autre part, $\ln(n) \leq H_{n-1}$ donc $\ln(n+1) \leq H_n$.

Finalement, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

En divisant par $\ln(n) > 0$ (quitte à prendre $n \geq 3$),

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$ donc $H_n \sim \ln(n)$.

3. (a) Déjà, $\gamma_1 = 1 \in [0,1]$. Pour $n \geq 2$, on a vu dans les questions précédentes que :
   - $H_n - 1 \leq \ln(n)$ donc $H_n - \ln(n) \leq 1$ et $\gamma_n \leq 1$.
   - $\ln(n) \leq H_{n-1} \leq H_n$ donc $H_n - \ln(n) \geq 0$ et $\gamma_n \geq 0$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n \in [0,1]$.

   (b) Posons $f(x) = \ln(1+x) - x$. $f$ est définie, continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Pour tout $x > -1$,

   $$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

   Donc $f$ est croissante sur $]-1,0]$, décroissante sur $[0,+\infty[$ et admet donc un maximum en 0 égal à $f(0) = 0$. Donc, pour tout $x > -1$, $f(x) \leq 0$, c'est-à-dire $\ln(1+x) \leq x$.
   Pour tout $n \geq 2$,

   $$\begin{aligned}\gamma_n - \gamma_{n-1} &= (H_n - \ln(n)) - (H_{n-1} - \ln(n-1)\\ &= \underbrace{H_n - H_{n-1}}_{=1/n} - \ln(n) + \ln(n-1)\\ &= \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}).\end{aligned}$$

   Or, en posant $x = -\dfrac{1}{n} \in ]-1,+\infty[$ dans l'inégalité précédente, on a $\ln(1-\dfrac{1}{n}) \leq -\dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{n} + \ln(1-\dfrac{1}{n}) \leq 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $\gamma_n - \gamma_{n-1} \leq 0$.
   La suite $(\gamma_n)$ est donc décroissante et minorée par 0. Par le théorème des suites monotones, elle converge vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$. Ce réel $\gamma$ est appelé la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0,577$).

   (c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\gamma_n - \gamma) = 0$ donc $\gamma_n - \gamma = o(1)$.
   Comme $\gamma_n = H_n - \ln(n)$, on obtient que $H_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$.
   Finalement, on a bien que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

4. (a) Voici la fonction `kaplas` qui à $n$ le nombre de kaplas à disposition, renvoie le réel $p$ égal au maximum de l'inclinaison de la pile de $n$ kaplas (c'est-à-dire le nombre $p$ de mètres dont la tour peut avancer au maximum) :

```python
def kaplas(n) :
    S = 0
    for k in range(1,n+1) :
        S = S + 1/k
    return S*0.06
```

(b) Comme un kapla mesure 8 mm d'épaisseur, on a :

- Pour une tour haute comme la tour Eiffel, on superpose $\dfrac{324}{0.008} = 40500$ kaplas et on obtient une inclinaison de 0.6711771 m soit environ 67 cm (avec la fonction `kaplas` précédente).
- Pour une tour de la hauteur de votre professeur de mathématiques (1.90 m), on superpose $\dfrac{1.9}{0.008} = 237.5 \simeq 238$ kaplas et on obtient une inclinaison de 0.3630951 m soit environ 36 cm (avec la fonction `kaplas` précédente).

---

## Exercice 2

1. (a) $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1 donc divergente, on l'a prouvé dans l'exercice précédent!).

   Donc la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.

   (b) Montrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

   - $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0. \end{aligned}$$

   - $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \leq 0. \end{aligned}$$

   - Enfin,

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0. \end{aligned}$$

   Donc $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent donc vers une même limite notée $S$.

   (c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S$, la suite $(S_n)$ converge vers $S$. Autrement dit, la série harmonique alternée converge et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ vaut $S$.

2. (a) Voici le programme pour obtenir une approximation de $S$ à $\varepsilon$ près (en utilisant les suites adjacentes $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$) :

```
def approx(eps) :
    Sp = 1/2 #on initialise à S_2
    Si = 5/6 #on initialise à S_3
    n = 1
    while 1/(2*n+1) > eps : #car S_2n+1 - S_2n = 1/ (2n+1)
        Sp = Si - 1/(2*n+2)
        Si = Sp + 1/(2*n+3)
        n = n+1
    return Sp, Si
```

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k+1-1}}{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2}H_n + H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n.
\end{aligned}$$

On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

(c) Avec la question 2.(a) puis en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique obtenu dans l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= H_{2n} - H_n = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) \\
&= \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln(2) + o(1).
\end{aligned}$$

Donc $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2)$. On retrouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

---

## Exercice 3

1. • $(S_{2n})$ est décroissante :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0,$$

car la suite $(v_n)$ est décroissante.

- $(S_{2n+1})$ est croissante :

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} u_k - \sum_{k=1}^{2n+1} u_k = u_{2n+3} + u_{2n+2} = v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0,$$

  car la suite $(v_n)$ est décroissante.

- $S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_{2n+1} = -v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la suite $(v_n)$ converge vers 0 par hypothèse.

Donc $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ convergent vers une même limite $S$. Ainsi, la sous-suite des termes de rangs pairs et la sous-suite des termes de rangs impairs de la suite $(S_n)$ convergent et ont la même limite. Il en résulte que la suite $(S_n)$ est aussi convergente (vers $S$).

   Ainsi, la série de terme général $u_n$ converge et sa somme est égale à $S$.

3. La suite $(S_{2n})$ est décroissante et convergente vers $S$, donc elle est minorée par sa limite $S$. La suite $(S_{2n+1})$ est croissante et convergente vers $S$, donc elle est majorée par sa limite $S$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   - Avec la question précédente,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \text{ donc } S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0.$$

     Comme $S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1}$, on a finalement $-v_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$.
     Donc $|S - S_{2n}| \leq v_{2n+1}$.

   - Toujours avec la question précédente,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \text{ donc } 0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1}.$$

     Comme $S_{2n+2} - S_{2n+1} = v_{2n+2}$, on a finalement $0 \leq S - S_{2n+1} \leq v_{2n+2}$.
     Donc $|S - S_{2n+1}| \leq v_{2n+2}$.

   Donc, quelle que soit la parité de $n$, $|S - S_n| \leq v_{n+1}$.

5. - Pour $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ :

     On pose $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$. La suite $(v_n)$ est bien positive et de limite nulle. Elle est de plus décroissante à partir du rang 3 (ceci peut s'établir facilement en étudiant la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$). Elle vérifie donc les conditions de l'énoncé donc la série de terme général $u_n$ est convergente.
     Par contre, elle n'est pas absolument convergente. En effet,

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \text{ et } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge (série de Riemann de paramètre 1).}$$

     Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

   - Pour $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ :

On pose $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. La suite $(v_n)$ est positive, décroissante et de limite nulle donc la série de terme général $u_n$ est convergente.
Par contre, elle n'est pas absolument convergente. En effet,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ diverge.

---

## Exercice 4

1. (a) Comme $\ell < 1$, on a :

- d'une part en ajoutant $\ell$, $2\ell < \ell + 1$, puis en divisant par 2, $\ell < \dfrac{\ell+1}{2}$.
- d'autre part en ajoutant 1, $\ell + 1 < 2$, puis en divisant par 2, $\dfrac{\ell+1}{2} < 1$.

On a donc : $\ell < q < 1$.

(b) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ et que $\ell < q$, on sait (par définition de la limite) qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

(c) Avec la question précédente, $\forall n \geq N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.
Comme $u_n > 0$, on en déduit que : $\forall n \geq N,\ u_{n+1} \leq q u_n$.
Montrons alors par récurrence que : $\forall n \geq N,\ u_n \leq u_N q^{n-N}$.

**Ini.** $u_N q^{N-N} = u_N q^0 = u_N \geq u_N$ donc la propriété est vraie au rang $N$.

**Héré.** Soit $n \geq N$. Supposons la propriété vraie au rang $n$.
Avec l'inégalité obtenue précédemment, $u_{n+1} \leq q u_n$. Et avec l'hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_N q^{n-N}$. Alors :

$$u_{n+1} \leq q u_n \leq q \times u_N q^{n-N} \leq u_N q^{(n+1)-N}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

**Ccl.** Par récurrence, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq u_N q^{n-N}$.

(d) Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{u_N}{q^N} \times q^n.$$

Comme $q \in ]0, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} q^n$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(e) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$ est à termes strictement positifs. De plus :

$$\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)}.$$

Or $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par composition avec la fonction exponentielle (qui est continue), on obtient :

$$\frac{1}{\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1.$$

On peut donc appliquer ce qu'on vient de démontrer (le critère de d'Alembert) et on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$ converge.

2. (a) On suppose ici que $\ell > 1$. Posons $q = \frac{\ell+1}{2}$. On peut alors démontrer que :
   - $1 < q < \ell$ (même démonstration que la question 1.(a)).
   - Il existe un rang $N$ tel que : $\forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ (même raisonnement que la question 1.(b)).
   - Pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N q^{n-N}$ (même récurrence qu'à la question 1.(c)).

   Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a :

   $$0 \leq \frac{u_N}{q^N} \times q^n \leq u_n.$$

   Comme $q > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} q^n$ diverge.

   Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

   (b) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2}$ est à termes strictement positifs. De plus :

   $$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 > 1.$$

   On peut donc appliquer ce qu'on vient de démontrer (le critère de d'Alembert) et on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2}$ diverge.

3. Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes strictement positifs. De plus :

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Or on sait que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (car c'est une série de Riemann de paramètre 1) et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car c'est une série de Riemann de paramètre 2).

Ainsi, si $\ell = 1$, on ne peut donc rien dire sur la convergence de la série (elle peut converger ou diverger).