Correction - AP 5

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (ECRICOME 2018)

1. • A chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* (et $1/3$ pour l'alternative contraire), on reconnait en X une loi binomiale

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

• On voit que

$$P(A) = P((X=0)\cup(X=2)) = P(X=0)+P(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1+3\times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

2. Voici le programme demandé :

```python
def simulX()
    res = 0
    for k in range(3):
        if rd.random() < 2/3 :
            res = res+1
    return(res)
```

3. Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

Alors :

- $P(G = -30) = P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.
- $P(G = -10) = P(X = 1) = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.
- $P(G = 0) = P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.
- $P(G = 20) = P(X = 2) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

4. Comme G est à support fini, elle admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned} E(G) &= -30P(G=-30) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) \\ &= -30 \times \frac{8}{27} - 10 \times \frac{2}{9} + 20 \times \frac{4}{9} = -\frac{20}{9}. \end{aligned}$$

On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

5. Voici le programme demandé :

```python
def simulG():
    n = simulX()
    if n==0:
        return(0)
    elif n==1:
        return(-10)
    elif n==2:
        return(20)
    else:
        return(-30)
```

6. (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$

et on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

7. (a) Comme précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(b) D'après le théorème de transfert

$$E(Y) = E((-1)^X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On utilise alors la formule du binôme

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n.$$

8. D'après les questions 6.(b) et 7.(b), on a

$$(1 - 2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1 - 2p)^n + 1}{2}.$$

9. On résout

$$\begin{aligned} P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1 - 2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\iff (1 - 2p)^n \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } 1 - 2p \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

10. On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient

$$E(G) = \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X = k) = 10 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

11. On a :

$$\begin{aligned} k.\binom{n}{k} &= \frac{k \times n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{k \times n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = n.\binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

12. Avec les deux questions précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \\ &= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np(1-2p)^{n-1} \end{aligned}$$

13. On connait déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ &\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n \text{ impair} \end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

14. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $[0;1/2]$. Le calcul donne

$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

On obtient le tableau de variation suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(1/2n)$	$\searrow$	0

avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0;1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$

15. Voici le programme demandé :

```
def simulationsG(n,p):
    G = np.zeros(200)
    for k in range(200):
        X = rd.binomial(n,p)
        G = 10*X*(-1)**X
    return(G)
```

16. Ici, on explicite facilement la loi de G_i en revenant à la définition du jeu. $G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}$. et

a	0	-10	20
$P(G_i = a)$	$9/16$	$6/16$	$1/16$

Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance

$$E(G_i) = -10 \times \frac{9}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$$

et

$$V(G_i) = E(G_i^2) - E(G_i)^2 = 100 \times \frac{9}{16} + 400 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

17. Il est clair que le gain du forain est égal à l'opposé du total des gains de tous les joueurs, ou encore

$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 500$$

et, par indépendance (que l'on peut supposer) des G_i,

$$V(J) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250.$$

18.

$$\begin{aligned} |J - 500| \geq 400 &\iff J - 500 \geq 400 \text{ ou } J - 500 \leq -400 \\ &\iff J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100 \end{aligned}$$

En particulier, l'événement

$$[J \leq 100] \subset [|J - 500| \geq 400]$$

et on a bien la comparaison des probabilités correspondantes voulue.

19. En utilisant la question précédente et l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on voit que

$$P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

20. Le forain installera son stand si $P(J \leq 100) \leq 10\%$. Or, cette probabilité est majorée par $9/128$ qui est inférieur à 10% (en effet $9/128 \leq 9/100 < 10\%$). Donc il peut installer son stand.

21. Voici le programme demandé :

```
n = 2
p = 1/4
res = 0
for k in range(10000):
    g = simulationsG(n,p)
    J = -np.sum(g)
    if J <= 100:
            res = res+1
f = res/10000
print(f)
```

Exercice 2 (EDHEC 2005)

1. (a) $(T = k)$ signifie qu'on ne revient pas à 0 lors des $(k-1)$ premiers déplacements, donc qu'on avance à chaque fois de un d'après l'énoncé. Enfin au k-ème on revient à 0 :

$$(T = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i \neq 0) \cap (X_k = 0) = \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = i) \cap (X_k = 0)$$

(b) On a $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$, puis d'après l'énoncé :

$$P(X_1 = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) = p$$

(c) D'après les probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = i) \cap (X_k = 0)\right) \\ &= P(X_1 = 1) \times P_{(X_1=1)}(X_2 = 2) \times \cdots \times P_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{k-1}=k-1)}(X_k = 0) \\ &= p \times p \cdots \times p \times (1-p) = p^{k-1}(1-p) = (1-(1-p))^{k-1}(1-p). \end{aligned}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $1 - p$.

2. (a) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$:

Ini. On a montré que $X_0(\Omega) = \{0\}$ et $X_1(\Omega) = [\![0; 1]\!]$, ce qui initialise la récurrence.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
Si l'événement $(X_n = k)$ est réalisé, on sait que X_{n+1} vaut $k + 1$ avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1 - p$ donc :

$$X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup \{k + 1,\ k \in [\![0; n]\!]\} = \{0\} \cup [\![1; n + 1]\!] = [\![1; n + 1]\!].$$

La propriété est vraie au rang $(n + 1)$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

(b) Avec le système complet d'évènement donné, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)(1-p) \\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = (1-p) \times 1 \\ &= 1 - p. \end{aligned}$$

3. (a) Avec le système complet d'évènement $(X_n = i)_{0 \leq i \leq n}$, la formule des probabilités totales donne :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k).$$

Or $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = p$ si $i = k-1$ et 0 sinon. Donc :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \sum_{i \neq k-1} P(X_n = i) \underbrace{P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)}_{=0} + P(X_n = k-1) \underbrace{P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k)}_{=p} \\ &= p \times P(X_n = k-1). \end{aligned}$$

(b) En utilisant plusieurs fois la question précédente, on a pour tout $k \leq n-1$:

$$P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k-1) = p^2 P(X_{n-2} = k-2) = \ldots = p^k P(X_{n-k} = 0) = p^k(1-p),$$

avec la question 2.(b).
De la même façon, avec la question précédente,

$$P(X_n = n) = pP(X_{n-1} = n-1) = p^2 P(X_{n-2} = n-2) = \ldots = p^n P(X_0 = 0) = p^n$$

Pour avoir $(X_n = n)$, il faut avoir avancé d'un cran à chaque fois, donc à chaque épreuve il faut obtenir le résultat de probabilité p : "avancer de 1".

(c) On calcule la somme (car $p \neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = p^n + (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} p^k = p^n + (1-p) \times \frac{1-p^n}{1-p} = p^n + (1-p^n) = 1.$$

4. (a) On peut démontrer ce résultat par récurrence. Proposons une autre méthode ici. On a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{1-p^n}{1-p}.$$

En dérivant par rapport à p de chaque coté, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{-np^{n-1}(1-p) - (1-p^n)(-1)}{(1-p)^2} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}.$$

(b) On en déduit que pour $n \geq 2$ (pour que la somme aie du sens),

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)p^k + np^n = p\ (1-p)\ \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n \\ &= p\left(\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{1-p} + np^{n-1}\right) \\ &= p\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1 + np^{n-1} - np^n}{1-p} \\ &= \frac{p(1-p^n)}{1-p}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que la formule est aussi valable pour $n=0$ (car $E(X_0)=\dfrac{p\times 0}{1-p}=0$) et $n=1$ (car $E(X_1)=\dfrac{p\times(1-p)}{1-p}=p$).

5. (a) Avec le théorème de transfert, on écrit $E(X_{n+1})$ puis on remplace les probabilités de la somme avec le 3.(a). Enfin on effectue un changement d'indice pour se ramener à la forme des probabilités pour l'espérance de X_n :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1}=k) = 0^2 P(X_{n+1}=0) + \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \times p \times P(X_n = k-1) \\
&= p\sum_{j=0}^{n}(j+1)^2 P(X_n=j) \\
&= p\left(\sum_{j=0}^{n} j^2 P(X_n=j) + 2\sum_{j=0}^{n} jP(X_n=j) + \sum_{j=0}^{n} P(X_n=j)\right) \\
&= p\left(E(X_n^2)+2E(X_n)+1\right).
\end{aligned}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E(X_{n+1}^2) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} = pE(X_n^2) + 2pE(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p\left(u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}\right) + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{2np^{n+2} + p^{n+2} - 2np^{n+2} + p^{n+2} + 2p^2 - 2p^{n+2} + p(1-p)}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{p(2p+1-p)}{1-p} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}.
\end{aligned}$$

(c) La suite (u_n) est arithmético-géométrique. On résout l'équation :

$$x = px + \frac{p(1+p)}{1-p} \Leftrightarrow x(1-p) = \frac{p(1+p)}{1-p} \Leftrightarrow x = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}.$$

Ensuite on prouve que la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - x$ pour tout n est géométrique de raison p (à faire), donc on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = v_0 p^n.$$

D'où on tire finalement :

$$u_n = (u_0 - x)p^n + x.$$

On calcule alors :

$$u_0 = E(X_0^2) + (2\times 0 - 1)\frac{p^1}{1-p} = -\frac{p}{1-p}$$

et on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(-\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}\right)p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-p(1-p)-p(1+p)}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}.
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
E(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - \frac{(2n-1)p^{n+1} - (2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(2n-1)p^{n+2} - (2n+1)p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2}.
\end{aligned}$$

(d) On en déduit que par la formule de Koenig-Huyghens :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 = \frac{(2n-1)p^{n+2} - (2n+1)p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(2n-1)p^{n+2} - (2n+1)p^{n+1} + p(1+p) - p^2(1+p^{2n} - 2p^n)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} \times \left[(2n-1)p^{n+1} - (2n+1)p^n + 1 + p - p - p^{2n+1} + 2p^{n+1}\right] \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} \times \left[1 + (2n+1)p^{n+1} - (2n+1)p^n - p^{2n+1}\right] \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} \times \left[1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right]
\end{aligned}$$

6. (a) `u = np.floor(rd.random()*3)` choisit un nombre au hasard parmi 0, 1 et 2. Ainsi, Il faut comprendre que $(u == 2)$ est de probabilité $p = \frac{1}{3}$ donc code le fait qu'on avance de 1, et $(u \neq 2)$ est de probabilité $1-p$ donc code le retour à 0 :

```python
def X(n):
    x = 0
    for k in range(n):
        u = np.floor(rd.random()*3)
        if u==2 :
            x = x+1
        else:
            x = 0
    return(x)
```

(b) `>>> X(10)`

(c) Ce programme mémorise dans un vecteur ligne x 10000 simulations de la variable X_{10} puis affiche dans l'ordre : l'espérance empirique de X_{10} (moyenne des 10000 simulations), l'espérance théorique (mathématique) de X_{10}, la variance empirique de X_{10} puis la variance théorique (mathématique) de X_{10}. Le nombre de simulations étant proche de $+\infty$, on obtient bien une espérance empirique proche de l'espérance mathématique et une variable empirique proche de la variance mathématique.

Exercice 3 (ESSEC 2003)

1. (a) Il faut noter d'abord que la somme totale des lancers augmente au moins de 1 et au plus de 6 à chaque lancer.

Donc pour tout i, la différence entre Y_i et Y_{i+1} est au moins de 1 et au plus de 6.

Donc Y_{12} vaut au minimum 12 (réalisé quand on n'a eu que des 1) et comme Y_1 vaut au maximum 6, la première à pouvoir atteindre 12 est Y_2 (réalisé si l'on a un double 6).

Donc $2 \leq T_{12} \leq 12$, toutes les valeurs intermédiaires étant possibles.

Finalement $T_{12}(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

$(T_{12} = 12)$ ne peut arriver que si chacun des tirages donne 1.

Donc $(T_{12} = 12) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \cdots \cap (X_{12} = 1)$. Comme les lancers sont indépendants, $P(T_{12} = 12) = (1/6)^{12}$ (les 6 faces sont équiprobables).

(b) Il faut à chaque lancer du dé (simulé par `x = np.floor(rd.random()*6)+1`) augmenter la valeur `y` de `x` et celle de `t` de `1` qui compte le nombre des $Y_i \leq 12$ et donc le nombre de lancers pour atteindre un total de 12 (on le dépasse forcément au lancer suivant).

```python
def simulT12():
    y = 0
    t = 0
    while y<=12 :
        x = np.floor(rd.random()*6) + 1
        y = y+x
        t = t+1
    return(t-1)
```

2. (a) Comme au second lancer on totalise au moins 2, on a $T_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   - On a : $(T_2 = 0) = (Y_1 > 2) = (X_1 > 2) = (X_1 \geq 3)$
     Les faces étant équiprobables, $P(T_2 = 0) = 4/6 = 2/3$.
   - On a :
     $$\begin{aligned}(T_2 = 1) &= (Y_1 \leq 2) \cap (Y_2 > 2) = (X_1 \leq 2) \cap (X_1 + X_2 > 2) \\ &= ((X_1 = 1) \cap (X_2 \geq 2)) \cup (X_1 = 2).\end{aligned}$$
     Par incompatibilité puis indépendance, on a :
     $$\begin{aligned}P(T_2 = 1) &= P((X_1 = 1) \cap (X_2 \geq 2)) + P(X_1 = 2) \\ &= P(X_1 = 1) P(X_2 \geq 2) + P(X_1 = 2) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{36}\end{aligned}$$
   - On a : $(T_2 = 2) = (Y_1 \leq 2) \cap (Y_2 \leq 2)$ (on a toujours $Y_3 \geq 3$).
     Donc $(T_2 = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$. Par indépendance, $P(T_2 = 2) = 1/36$.

   Finalement,

i	0	1	2
$P(T_2 = i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$

   (b) Les 36 couples de valeurs du dé pour les premiers et second tirage étant équiprobables, le programme les énumère exhaustivement et compte combien de ces couples vérifient $T_2 = 0$, 1 ou 2 :
   - $T_2 = 0$ si $X_1 > 2$ (`d1 > 2`) et on augmente le cardinal $|T_2 = 0|$ de 1 (`L[0] = L[0] + 1`) ;
   - $T_2 = 1$ si $X_1 \leq 2$ (`d1 > 2 ... elif ...`) et si $X_1 + X_2 > 2$ (`d1+d2 > 2`) on augmente alors le cardinal $|T_2 = 1|$ de 1 (`L[1] = L[1] + 1`) ;
   - $T_2 = 0$ sinon (`else`) et on augmente alors le cardinal $|T_2 = 2|$ de 1 (`L[2] = L[2] + 1`).

   La probabilité est alors le nombre de ces cas favorables sur le nombre de cas possibles.
   Le programme affiche donc $P(T_2 = 0)$, $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.

3. Ici, on raisonne pour x fixé. On a $F_n(x) = P(Y_n \leq x)$
   Comme $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ et que $X_{n+1} \geq 0$ alors $Y_{n+1} \geq Y_n$.
   Donc si $Y_{n+1} \leq x$ alors $Y_n \leq x$ (autrement dit $(Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x)$).
   Par croissance de la probabilité, $P(Y_{n+1} \leq x) \leq P(Y_n \leq x)$.
   Finalement $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$ et la suite $(F_n(x))_{n \geq 1}$ est bien décroissante.

4. Démontrer chacune des deux relations demandées :

   - Comme $(T_x = 0)$ signifie que le nombre des $Y_i \leq x$ est nul. Donc que pour tout i, $Y_i > x$.
     Cela équivaut à $Y_1 > x$ (car les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont croissants) donc à $X_1 > x$.
     Donc $P(T_x = 0) = P(X_1 > x) = 1 - P(X_1 \leq x) = 1 - F_1(x)$.

- $P(T_x = n) = P(T_x \geq n) - P(T_x \geq n+1)$. En effet, comme T_x ne prend que des valeurs entières,
$$(T_x = n) \cup (T_x \geq n+1) = (T_x \geq n),$$
et par incompatibilité,
$$P(T = n) + P(T \geq n+1) = P(T \geq n).$$
Or $(T_x \geq n)$ signifie qu'au moins n variables parmi les Y_i sont $\leq x$.
Comme elles sont croissantes, il y a au moins $(Y_1 \leq x)$ et ... et $(Y_n \leq x)$.
Et comme $(Y_1 \leq x) \cap \cdots \cap (Y_n \leq x) = (Y_n \leq x)$, on a alors $(T_x \geq n) = (Y_n \leq x)$ pour tout n. Donc
$$\begin{aligned} P(T_x = n) &= P(T_x \geq n) - P(T_x \geq n+1) = P(Y_n \leq x) - P(Y_{n+1} \leq x) \\ &= F_n(x) - F_{n+1}(x). \end{aligned}$$

5. Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n)$, on calcule la somme partielle :
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} P(T_x = n) &= P(T_x = 0) + \sum_{n=1}^{N} [F_n(x) - F_{n+1}(x)] \\ &= 1 - F_1(x) + \sum_{n=1}^{N} F_n(x) - \sum_{n=1}^{N} F_{n+1}(x) \\ &= 1 - F_1(x) + \sum_{n=1}^{N} F_n(x) - \sum_{n=2}^{N+1} F_n(x) \quad \text{(avec un changement de variable)} \\ &= 1 - F_{N+1}(x) \end{aligned}$$
Donc
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} P(T_x = n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{N\to+\infty} F_{N+1}(x) = 0$$
c'est à dire
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0.$$
Autrement dit, T_x est une variable aléatoire si, et seulement si $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

6. (a) Comme pour tout i, $X_i(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ et que $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ alors $Y_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$.

   (b) Pour $k \geq 2$,
$$(Y_2 = k) = (X_1 + X_2 = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} ((X_1 = i) \cap (X_2 = k-i))$$
les bornes venant de $X_1 \geq 1$ donc $i \geq 1$ et $X_2 \geq 1$ donc $k - i \geq 1 \Leftrightarrow i \leq k-1$.

Donc (en faisant attention à l'ensemble de validité de la loi) :

$$\begin{aligned}
P(Y_2=k) &= P\left[\bigcup_{i=1}^{k-1}((X_1=i)\cap(X_2=k-i))\right]\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} P((X_1=i)\cap(X_2=k-i)) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} P(X_1=i)\times P(X_2=k-i) \quad \text{(par indépendance)}\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1}pq^{k-i-1}p \quad (\text{car } i\geq 1 \text{ et } k-i\geq 1)\\
&= p^2\sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} \quad (k \text{ constant par rapport à } i)\\
&= p^2q^{k-2}\sum_{i=1}^{k-1} 1 = (k-1)\,p^2q^{k-2} = \binom{k-1}{1}p^2q^{k-2}
\end{aligned}$$

Pour $k\geq 3$,

$$(Y_3=k)=(X_1+X_2+X_3=k)=(Y_2+X_3=k)=\bigcup_{i=2}^{k-1}((Y_2=i)\cap(X_3=k-i))$$

les bornes venant de $Y_2\geq 2$ donc $i\geq 2$ et $X_3\geq 1$ donc $k-i\geq 1\Leftrightarrow i\leq k-1$.

$$\begin{aligned}
P(Y_3=k) &= P\left[\bigcup_{i=2}^{k-1}(Y_2=i\cap X_2=k-i)\right]\\
&= \sum_{i=2}^{k-1} p(Y_2=i)\cdot p(X_2=k-i) \quad \text{(par incompatibilité et indépendance)}\\
&= \sum_{i=2}^{k-1}(i-1)\,p^2q^{i-2}q^{k-1-i}p = p^3q^{k-3}\sum_{i=2}^{k-1}(i-1)\\
&= p^3q^{k-3}\sum_{j=1}^{k-2} j \quad \text{(par changement de variable)}\\
&= p^3q^{k-3}\left[\frac{(k-1)\,k}{2}-0\right] = \binom{k-1}{2}p^3q^{k-3}.
\end{aligned}$$

(c) Par récurrence sur m :

Ini. Pour $m=n$, on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{n}\binom{k}{n}=\binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{n+1}$.

Héré. Soit $m\geq n$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}=\binom{m+1}{n+1}$. Alors

$$\sum_{k=n}^{m+1}\binom{k}{n}=\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}+\binom{m+1}{n}=\binom{m+1}{n+1}+\binom{m+1}{n}=\binom{m+2}{n+1}.$$

Ccl. Par récurrence, pour tout $m\geq n$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}=\binom{m+1}{n+1}$.

(d) Démontrons cette formule par récurrence sur n :

Ini. Pour $n=1$, on a $P(Y_1=k)=q^{k-1}p=\binom{k-1}{1-1}q^{k-1}p$.

Héré. Soit $n\geq 1$. On suppose que pour tout $k\geq n$:

$$P(Y_n=k)=\binom{k-1}{n-1}q^{k-n}p^n.$$

Alors, pour $k\geq n+1$:

$$(Y_{n+1}=k)=(Y_n+X_{n+1}=k)=\bigcup_{i=n}^{k-1}((Y_n=i)\cap(X_{n+1}=k-i))$$

avec $i\geq k$ et $k-i\geq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
P(Y_n=k) &= P\left[\bigcup_{i=n}^{k-1}(Y_n=i\cap X_{n+1}=k-i)\right]\\
&= \sum_{i=n}^{k-1}P(Y_n=i)\times P(X_{n+1}=k-i) \quad \text{(par incompatibilité et indépendance)}\\
&= \sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}q^{i-n}p^nq^{k-1-i}p \quad (\text{car } i\geq n \text{ et } k-i\geq 1)\\
&= p^{n+1}q^{k-(n-1)}\sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}\\
&= p^{n+1}q^{k-(n-1)}\sum_{j=n-1}^{k-2}\binom{j}{n-1} \quad \text{(par changement de variable)}\\
&= p^{n+1}q^{k-(n-1)}\binom{k-1}{n} \quad (\text{car } k-1\geq n).
\end{aligned}$$

Ccl. Pour tout entier $n\geq 1$ et $k\geq n$,

$$P(Y_n=k)=\binom{k-1}{n-1}q^{k-n}p^n.$$

7. (a) On utilise l'équivalence de la question 5 :

$$T_x \text{ est une variable aléatoire si, et seulement si } \lim_{n\to+\infty}F_n(x)=0.$$

Comme $Y_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$, si $n>x$ alors $P(Y_n\leq x)=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}P(Y_n\leq x)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=0$. Donc T_x est une variable aléatoire.

Comme $Y_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$, alors $(Y_n\leq x)$ n'est possible que si $n\leq x$ (car x entier naturel non-nul). Il y a donc au plus x variables Y_i qui sont inférieures ou égales à x. Et au minimum, il n'y a en a aucune (car $X_1(\Omega)=Y_1(\Omega)=[\![1,+\infty[\![$) donc $T_x(\Omega)=[\![x,+\infty[\![$.

$(T_x=0)$ signifie que tous les $Y_i>x$, donc que $Y_1>x$ (car les Y_i sont croissants par rapport à i). Et en passant par le contraire : $(Y_1>x)=(X_1>x)=\overline{(X_1\leq x)}$. Donc :

$$\begin{aligned}
P(T_x=0) &= 1-\sum_{i=1}^{x}P(X_1=k)=1-\sum_{i=1}^{x}q^{i-1}p \quad \text{(changement de variable)}\\
&= 1-p\sum_{i=0}^{x-1}q^j=1-p\frac{q^x-1}{q-1}=q^x.
\end{aligned}$$

(b) Pour $n \leq x$, on a :

$$F_n(x) = \sum_{k=n}^{x} P(Y_n = k) = \sum_{k=n}^{x} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} p^n$$

et comme (formule du triangle de Pascal) $\binom{k}{n} = \binom{k-1}{n-1} + \binom{k-1}{n}$ alors $\binom{k-1}{n-1} = \binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}$ et

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=n}^{x} \left(\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n} \right) q^{k-n} p^n = \sum_{k=n}^{x} \binom{k}{n} q^{k-n} p^n - \sum_{k=n}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n} p^n \\ &= \sum_{k=n}^{x} \binom{k}{n} q^{k-n} p^n - \sum_{k=n}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n} p^n = p^n \sum_{k=n}^{x} \binom{k}{n} q^{k-n} - q p^n \sum_{k=n+1}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n-1} \end{aligned}$$

et directement

$$F_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{x} P(Y_{n+1} = k) = \sum_{k=n+1}^{x} \binom{k-1}{n} p^{n+1} q^{k-n-1} = p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n-1}.$$

On a alors pour $x \geq n \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(T_x = n) &= F_n(x) - F_{n+1}(x) \\ &= p^n \sum_{k=n}^{x} \binom{k}{n} q^{k-n} - q p^n \sum_{k=n+1}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n-1} - p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n-1} \\ &= p^n \sum_{k=n}^{x} \binom{k}{n} q^{k-n} - p^n (q+p) \sum_{k=n+1}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n-1} \quad \text{(avec } p + q = 1\text{)} \\ &= p^n \left(\sum_{k=n}^{x} \binom{k}{n} q^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{x} \binom{k-1}{n} q^{k-n-1} \right) \\ &= p^n \left(\sum_{k=n}^{x} \binom{k}{n} q^{k-n} - \sum_{h=n}^{x-1} \binom{h}{n} q^{h-n} \right) \quad \text{(par changement d'indice)} \\ &= \binom{x}{n} q^{x-n} p^n \end{aligned}$$

Et $P(T_x = n) = 0$ si $n > x$.

(c) La formule est encore valable pour $n = 0$ ($P(T_x = 0) = q^x$).
On reconnait donc que $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(x, p)$ et donc $E(T_x) = xp$ et $V(T_x) = xpq$.

8. Sachant que les variables aléatoires X_1, $X_2 \ldots$ sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation des n premiers succès équivaut à la réalisation du n-ième succès, Y_n est le temps d'attente du n-ième succès (somme des temps d'attente pour chacun des n premiers succès)

   $T_x = n$ signifie que en x expériences, il n'y a eu que n succès. T_x est donc le nombre de succès en x expériences indépendantes, qui ont chacune la probabilité p de donner succès.

   Donc $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(x, p)$

9. On utilise les formules de la question 4. D'une part :

$$P(T_x = 0) = 1 - P(Y_1 \leq x) = P(Y_1 > x) = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{M \to +\infty} \left[-e^{-\lambda t} \right]_x^M = e^{-\lambda x}.$$

D'autre part, avec une IPP (les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^n}{n}$ et $t \mapsto e^{-\lambda t}$ étant C^1 sur $[0, x]$) :

$$\int_0^x e^{-\lambda t} t^{n-1} dt = \left[\frac{t^n e^{-\lambda t}}{n} \right]_0^x + \frac{\lambda}{n} \int_0^x e^{-\lambda t} t^n dt = \frac{x^n e^{-\lambda x}}{n} + \frac{\lambda}{n} \int_0^x e^{-\lambda t} t^n dt,$$

donc

$$\begin{aligned}
P\left(T_x=n\right) &= P\left(Y_n \leq x\right)-P\left(Y_{n+1} \leq x\right)=\int_0^x f_n(t)\, dt-\int_0^x f_{n+1}(t)\, dt \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x e^{-\lambda t} t^{n-1}-\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int_0^x e^{-\lambda t} t^n dt \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{x^n e^{-\lambda x}}{n}+\frac{\lambda}{n} \int_0^x e^{-\lambda t} t^n dt\right)-\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int_0^x e^{-\lambda t} t^n dt \\
&= \frac{\lambda^n x^n e^{-\lambda x}}{n!}+\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int_0^x e^{-\lambda t} t^n dt-\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int_0^x e^{-\lambda t} t^n dt=\frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} .
\end{aligned}$$

10. On reconnait une loi de Poisson de paramètre λx (y compris pour $n=0$) et elle a donc pour espérance λx et pour variance également.
