Correction - AP 6

Paradoxe de Walter Penney

HEC 2004

Partie I : Un résultat utile

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est une probabilité, donc $a_n \geq 0$.
De plus $(X = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, donc la série de terme général $a_n = P(X = n)$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

   (b) On veut une convergence sans la valeur de la somme, on utilise un théorème de comparaison.
Or $a_n \geq 0$ et $x \geq 0$ donc $a_n x^n \geq 0$, et comme $x \leq 1$, on a $x^n \leq 1$ et enfin $a_n x^n \leq a_n$.
Or d'après la question précédente la série de terme général a_n converge, donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $a_n x^n$ converge également.

2. (a) On part du côté droit, plus compliqué : en reconnaissant une somme géométrique,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \times \frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n}{1-x} = \frac{1-f(x)}{1-x}.$$

Or on remarque que $f(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$, donc

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \frac{1-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right).$$

   (b) La fonction proposée, qu'on va noter g, est définie par une série, il est donc impossible de la dériver. On revient à la définition.
Soit x et y deux réels de $[0; 1[$ tels que $x \leq y$, on veut prouver que $g(x) \leq g(y)$.
En suivant la logique de l'énoncé, on va se servir de la nouvelle expression de 2.(a) : pour $k \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur $[0; 1]$ donc :

$$x \leq y \Longrightarrow x^k \leq y^k \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} y^k$$

en sommant les inégalité. On multiplie par $a_n \geq 0$ et on somme pour n allant de 1 à l'infini :

$$x \leq y \Longrightarrow a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k\right)$$

donc on obtient bien que $x \leq y \Longrightarrow g(x) \leq g(y)$, la fonction g est bien croissante.
Comme elle est croissante, elle est supérieure à sa valeur en 0, et si elle admet une limite en 1 par valeurs inférieures, elle est inférieure à cette limite. Or l'énoncé admet l'existence de cette limite, qui est la dérivée de f en 1 : on obtient bien

$$\underbrace{g(0)}_{=1} \leq g(x) \leq \lim_{x\to 1^-} g(x) \quad \text{donc} \quad 0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq f'(1).$$

(c) L'inégalité de gauche est évidente : puisque $a_n \geq 0$ donc $na_n \geq 0$, la somme partielle est bien positive.

Pour celle de droite, comme $f'(1)$ apparaît dans la question 2.(b), on va tenter de s'en servir, en revenant à l'expression de g avec des sommes : on sait que

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leq f'(1).$$

Pour obtenir l'inégalité cherchée, il faut pouvoir "remplacer" $+\infty$ par N, et x^k par 1 (alors que l'inégalité n'est vrai que sur $[0;1[$, donc il faudra passer à la limite). Faisons-le rigoureusement :

La série de terme général $a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ est à termes positifs, sa somme partielle est donc toujours inférieure à sa somme : on en déduit que pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(a_n \sum_{k=1} x^k\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{k=1} x^k\right) \leq f'(1).$$

De plus par somme de limites la somme de gauche admet une limite en 1, égale à

$$\sum_{n=1}^{N}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = \sum_{n=1}^{N} na_n.$$

Par passage à la limite des inégalités, on en déduit bien que :

$$\sum_{n=1}^{N} na_n \leq f'(1).$$

Enfin la somme partielle de la série de terme général na_n est donc majorée, et croissante car la série est à termes positifs. Elle est donc convergente, ce qui prouve bien que la série de terme général na_n est convergente.

(d) Il y a trois inégalités à prouver. Celle de gauche a déjà été obtenue à la question 2.(b) :

$$0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x}.$$

Pour la seconde, on utilise la question 2.(a) qui permet de donner une expression du taux d'accroissement sous la même forme que la somme : on peut alors prendre la différence.

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k - n\right).$$

Or on sait que pour tout $x \in [0;1[$, $x^k \leq 1$ donc en sommant, puis en retirant n et enfin en multipliant par $a_n \geq 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k - n\right) \leq 0 \quad \text{donc} \quad a_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k - n\right) \leq 0.$$

On en déduit que la différence considérée est négative comme somme de termes négatifs, et enfin :

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n.$$

Enfin pour l'inégalité de droite, on reconnaît l'inégalité du 2.(c) où on est passé à la limite en $+\infty$, ce qui est bien possible puisque la série est convergente. On obtient finalement :

$$0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1).$$

(e) Les quatre termes de l'inégalité ont une limite en 1^-, on peut donc passer à la limite dans le résultat de la question 2.(d) :

$$0 \leq f'(1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1).$$

On en déduit que la série de terme général $na_n = nP(X = n)$ converge (question 2.(c)) et sa somme vaut $f'(1)$. Comme elle est à termes positifs, elle converge absolument. X admet donc une espérance et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = f'(1).$$

Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration "pile, pile, face"

3. On veut comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1}. Comme ce sont des probabilités, on commence par comparer (par une inclusion) les évènements associés. Or on remarque que pour tout $n \geq 3$,

$$U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1} \quad \text{donc} \quad U_n \subset U_{n+1}.$$

On en déduit que leurs probabilités vérifient :

$$P(U_n) \leq P(U_{n+1}) \quad \text{cad} \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

Cette inégalité reste vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ car $0 \leq 0$ et $u_2 = 0 \leq u_3$, u_3 étant une probabilité.

Finalement la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante, et comme tous ses termes sont des probabilités, elle est majorée par 1 donc convergente.

4. (a) Par indépendance des lancers, on obtient immédiatement :

$$P(B_n) = P(R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) = P(R_{n-2}) \times P(R_{n-1}) \times P(S_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

(b) Il y a trois intersections à considérer :

- $B_n \cap B_{n+1}$ signifie qu'on a obtenu pile aux lancers $n-2$ et $n-1$ et face au lancer n (B_n), et également qu'on a obtenu pile aux lancers $n-1$ et n, et face au lancer $n+1$ (B_{n+1}). Comme il est impossible d'avoir en même temps pile et face au lancer n, on a bien :

$$B_n \cap B_{n+1} = \emptyset.$$

- Ce résultat étant vrai pour tout n, il est vrai pour $n' = n + 1$, donc

$$B_{n+1} \cap B_{n+2} = \emptyset$$

On pouvait aussi mener le même raisonnement et obtenir une impossibilité avec pile et face en même temps au lancer $n + 1$.

- $B_n \cap B_{n+2}$ signifie qu'on a obtenu pile aux lancers $n-2$ et $n-1$ et face au lancer n (B_n), et également qu'on a obtenu pile aux lancers n et $n+1$, et face au lancer $n+2$ (B_{n+2}). Comme il est impossible d'avoir en même temps pile et face au lancer n, on a bien :

$$B_n \cap B_{n+2} = \emptyset.$$

On en déduit bien que ces trois évènements sont deux à deux incompatibles.

(c) On obtient :

$$u_3 = P(U_3) = P(B_3) = \frac{1}{8}$$

puis par incompatibilité 2 à 2 de B_3 , B_4 et B_5 :

$$u_4 = P(U_4) = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

et

$$u_5 = P(U_5) = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

5. (a) L'évènement $U_n \cap B_{n+1}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= \Big(B_3 \cup B_4 \cup \ldots B_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n\Big) \cap B_{n+1} = \Big(U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n\Big) \cap B_{n+1} \\ &= (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) \end{aligned}$$

Or d'après la question 4.(b) les deux dernières intersections sont vides donc :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup \emptyset \cup \emptyset = U_{n-2} \cap B_{n+1}.$$

(b) Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ et que cette réunion n'est pas incompatible, on utilise le crible de Poincaré :

$$u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

Or on a vu à la question précédente que :

$$U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$$

et ces deux évènements sont indépendants par lemme des coalitions car les tirages sont mutuellement indépendants et U_{n-2} ne dépend que des $n-2$ premiers tirages, alors que B_{n+1} des tirages $n-1$, n et $n+1$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{8} - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - P(U_{n-2}) \times P(B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - u_{n-2} \times \frac{1}{8} \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}). \end{aligned}$$

(c) Toutes les probabilités sont connues, on calcule en partant du plus compliqué :

$$u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{2}{8} = u_4$$

et

$$u_4 + \frac{1}{8}(1 - u_2) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = u_5.$$

(d) On a vu que (u_n) converge, on note ℓ sa limite. Par composée immédiate, (u_{n+1}) et (u_{n-2}) convergent aussi ver ℓ, on en déduit en passant à la limite dans la relation de récurrence que :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \Longrightarrow \ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell) \Longrightarrow \frac{1}{8}(1 - \ell) = 0 \Longrightarrow \ell = 1.$$

L'évènement $(Y = 0)$ signifie que la séquence n'apparaît jamais, on peut donc l'écrire :

$$(Y = 0) = \bigcap_{n=3}^{+\infty} \overline{B_n} = \overline{\bigcup_{n=3}^{+\infty} B_n}.$$

On en déduit alors que

$$P(Y = 0) = 1 - \lim_{N \to +\infty} P\left(\bigcup_{n=3}^{N} B_n\right) = 1 - \lim_{N \to +\infty} P(U_N) = 1 - \lim_{N \to +\infty} u_N = 1 - 1 = 0.$$

6. (a) On a
$$v_1 = 1 - u_1 = 1 \quad , \quad v_2 = 1 \quad , \quad v_3 = \frac{7}{8} \quad , \quad v_4 = \frac{3}{4}.$$

(b) On a $v_n = 1 - u_n$, donc $u_n = 1 - v_n$. On va alors utiliser la relation de récurrence de la suite (u_n) :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} = 1 - \left(u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})\right) = 1 - u_n - \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \\ &= v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}. \end{aligned}$$

(c) On somme la relation obtenue à la question précédente :
$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{8}v_{n-2} \qquad \text{donc} \qquad \sum_{k=3}^{N}(v_{k+1} - v_k) = -\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{N} v_{k-2}.$$

A gauche on calcule la somme par télescopage, à droite on change d'indice avec $k' = k - 2$:
$$v_{N+1} - v_3 = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N-2} v_k.$$

Cette relation étant vraie pour tout $N \geq 3$, on peut remplacer N par $N' + 2$, avec $N' \geq 1$. En remplaçant par la valeur de v_3, on obtient :
$$v_{N+3} - \frac{7}{8} = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k \quad \Longrightarrow \quad \frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k.$$

(d) On isole la somme partielle de la série :
$$\sum_{k=1}^{N} v_k = 7 - 8v_{N+3} = 7 - 8(1 - u_{N+3}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 7 - 8(1 - 1) = 7.$$

La série de terme général $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc convergente et sa somme vaut 7.

7. (a) L'évènement $(Y = n)$ signifie que la séquence PPF est atteinte pour la première fois avec le face en position n : elle n'est donc jamais atteinte avant, ce qui signifie que l'évènement U_{n-1} (qui signifie que la séquence a été obtenue à l'une au moins des positions entre 3 et $n - 1$) n'est pas vérifié, mais que l'évènement U_n l'est :
$$(Y = n) = \overline{U_{n-1}} \cap U_n.$$

Cette intersection n'est absolument pas indépendante. Par contre, avec le SCE $(U_{n-1}, \overline{U_{n-1}})$ et comme $U_{n-1} \subset U_n$, on a :
$$U_n = (U_{n-1} \cap U_n) \cup (\overline{U_{n-1}} \cap U_n) = U_{n-1} \cup (\overline{U_{n-1}} \cap U_n).$$

Donc par incompatibilité,
$$P(U_n) = P(U_{n-1} \cup (\overline{U_{n-1}} \cap U_n)) = P(U_{n-1}) + P(\overline{U_{n-1}} \cap U_n).$$

On a alors :
$$\begin{aligned} c_n &= P(Y = n) = P(\overline{U_{n-1}} \cap U_n) = P(U_n) - P(U_{n-1}) = u_n - u_{n-1} \\ &= 1 - v_n - (1 - v_{n-1}) = v_{n-1} - v_n. \end{aligned}$$

(b) L'évènement $(Y=2)$ est impossible, donc

$$c_2 = P(Y=2) = 0 \quad \text{et} \quad v_1 - v_2 = 1 - 1 = 0.$$

D'autre part $(Y=3)$ signifie qu'on a obtenu la séquence PPF dès le départ, donc

$$c_3 = P(Y=3) = P(B_3) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad v_2 - v_3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

donc l'égalité $c_n = v_{n-1} - v_n$ est vérifiée pour $n=2$ et $n=3$.

(c) On part de la droite, plus compliquée :

$$(x-1)h(x) + x \quad = \quad (x-1)\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x.$$

On effectue le changement d'indice $n' = n+1$ dans la première somme pour faire apparaître x^n et rassembler les deux sommes, et on remarque que $v_1 = 1$:

$$\begin{aligned}(x-1)h(x) + x \quad &= \quad \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1}x^n - \left(v_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n\right) + x = \sum_{n=2}^{+\infty}(v_{n-1} - v_n)x^n + x - x \\ &= \quad \sum_{n=2}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = g(x)\end{aligned}$$

car $c_1 = 0$.

(d) On remarque que

$$g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = 0 + 0 + \sum_{n=3}^{+\infty} P(Y=n) = 0 + 1 = 1$$

car $(Y=n)_{n\in[\![3;+\infty[\![\cup\{0\}}$ est un système complet d'évènement, et on a vu que $P(Y=0) = 0$. On en déduit que :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \frac{(x-1)h(x) + x - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(h(x)+1)}{x-1} = h(x) + 1.$$

(e) Sur le modèle de la partie I, h étant définie par une série, on revient à la définition de la croissance : soient x et y deux réels de $[0;1]$ tels que $x \leq y$, alors par croissance de la fonction $x \mapsto x^k$ sur $[0;1]$, pour tout $k \geq 1$ puis avec $v_k \geq 0$:

$$x \leq y \Longrightarrow x^k \leq y^k \Longrightarrow v_k x^k \leq v_k y^k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} v_k x^k = h(x) \leq h(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k y^k$$

donc la fonction h est croissante, ce qui assure que sur $[0;1]$, $h(x) \leq h(1)$.
Enfin comme la série de terme général $v_k x^k$ est à termes positifs, sa somme partielle est toujours inférieure à sa somme ce qui donne :

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} v_k x^k = h(x) \leq h(1).$$

On fait tendre x vers 1^-, et par somme de limites (finie) à gauche et par passage des inégalités à la limite, on obtient :

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{N} v_k \leq \lim_{x\to 1^-} h(x) \leq h(1).$$

Enfin, on fait tendre N vers $+\infty$ dans cet encadrement (la série est bien convergente, et les deux autres termes sont constants) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = h(1) \leq \lim_{x \to 1^-} h(x) \leq h(1)$$

donc on obtient bien :

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = h(1).$$

(f) On en déduit que

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = h(x) + 1 \xrightarrow[x \to 1^-]{} h(1) + 1$$

donc g est dérivable en 1, et $g'(1) = h(1) + 1$.
D'après la partie I, on en déduit que Y admet une espérance et qu'elle est égale à $g'(1)$, donc :

$$E(Y) = h(1) + 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + 1 = 7 + 1 = 8$$

d'après la question 6.(d).

Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

8. (a) Il y a trois intersections à considérer :
   - $B'_n \cap B'_{n+1}$ signifie qu'on a obtenu pile aux lancers $n-1$ et n et face au lancer $n-2$ (B'_n), et également qu'on a obtenu pile aux lancers n et $n+1$, et face au lancer $n-1$ (B'_{n+1}). Comme il est impossible d'avoir en même temps pile et face au lancer $n-1$, on a bien :
   $$B'_n \cap B'_{n+1} = \emptyset.$$
   - Ce résultat étant vrai pour tout n, il est vrai pour $n' = n + 1$, donc
   $$B'_{n+1} \cap B'_{n+2} = \emptyset$$
   On pouvait aussi mener le même raisonnement et obtenir une impossibilité avec pile et face en même temps au lancer n.
   - $B'_n \cap B'_{n+2}$ signifie qu'on a obtenu pile aux lancers $n-1$ et n et face au lancer $n-2$ (B'_n), et également qu'on a obtenu pile aux lancers $n+1$ et $n+2$, et face au lancer n (B'_{n+2}). Comme il est impossible d'avoir en même temps pile et face au lancer n, on a bien :
   $$B_n \cap B_{n+2} = \emptyset.$$

   Finalement les évènements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

   (b) Par les mêmes calculs et pour les mêmes raisons que dans la question 5.(a), on obtient :
   $$P(U'_n \cap B'_{n+1}) = P(U'_{n-2} \cap B'_{n+1}) = \frac{1}{8} P(U'_{n-2}) = \frac{1}{8} u'_{n-2}.$$
   Puisqu'on a (comme dans la partie II) $U'_{n+1} = U'_n \cup B'_{n+1}$, on obtient à nouveau par crible de Poincaré :
   $$u'_{n+1} = P(U'_{n+1}) = P(U'_n) + P(B'_{n+1}) - P(U'_n \cap B'_{n+1}) = u'_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u'_{n-2} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2}).$$

   (c) On procède par récurrente triple : on pose la propriété de récurrence $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = u'_n$".

   Ini. On a : $u_1 = 0 = u'_1$, $u_2 = 0 = u'_2$ et $u_3 = \frac{1}{8} = u'_3$ car $U'_3 = (S_1 \cap R_2 \cap R_3)$ et les évènements sont indépendants.
   On en déduit que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \geq 3$. Supposons que $\mathcal{P}(n-2)$, $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies.
Alors on en déduit par 8.(b) et 5.(b) que

$$u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2}) = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = u_{n+1}$$

avec l'égalité centrale obtenue grâce aux hypothèses de récurrence. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ccl. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = u'_n$ est vraie.

(d) Y et Y' ont de manière évidente le même support : $[\![3; +\infty[\![\cup \{0\}$, et avec l'égalité de u_n et u'_n pour tout $n \geq 3$,

$$P(Y = n) = c_n = u_n - u_{n-1} = u'_n - u'_{n-1} = c'_n = P(Y' = n).$$

Enfin on en déduit que

$$P(Y' = 0) = 1 - \sum_{n=3}^{+\infty} P(Y' = n) = 1 - \sum_{n=3}^{+\infty} P(Y = n) = 1 - 1 = 0 = P(Y = 0)$$

donc Y et Y' suivent la même loi. Or Y admet une espérance égale à 8, c'est donc aussi le cas de Y'.

9. (a) G_3 signifie que J a gagné après 3 lancers, donc que sa séquence gagnante est apparue immédiatement. Celle de Y' n'ayant pas pu apparaître avant, on a donc

$$G_3 = R_1 \cap R_2 \cap S_3 \quad \text{et} \quad g_3 = P(G_3) = \frac{1}{8}$$

par indépendance des lancers.

G_4 signifie que J a gagné après 4 lancers. Sa séquence gagnante est apparue aux lancers 2,3,4 donc on a obligatoirement $R_2 \cap R_3 \cap S_4$.

Au premier lancer, si on a eu R_1, la séquence gagnante de J' n'apparaît pas donc G_4 est bien réalisé. Par contre si on a eu S_1, elle apparaît au bout de trois lancers et J' gagne. On obtient donc obligatoirement :

$$G_4 = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap S_4 \quad \text{et} \quad g_4 = \frac{1}{16}$$

par indépendance des lancers.

Enfin G_n impose de la même manière la séquence $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$. En remontant tous les lancers précédents, on remarque que s'il y a eu un face au lancer $n-3$, J' gagne au lancer $n-1$, ce n'est donc pas possible, donc on a forcément eu R_{n-3}.

En remontant ainsi de proche en proche, on remarque que toute apparition d'un face avant la séquence finale impose l'arrivée de la séquence gagnante de J' avant le lancer n donc est prohibée. On obtient :

$$G_n = R_1 \cap \cdots \cap R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \quad \text{donc} \quad g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

par indépendance des lancers.

(b) Le joueur J est déclaré gagnant signifie qu'il existe un numéro n de lancer où il gagne, donc :

$$G = \bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n.$$

Or les évènements sont deux à deux incompatibles (il ne peut pas gagner à deux moments différents) donc

$$P(G) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}.$$

10. (a) On ne peut pas obtenir deux piles en un seul lancer donc : $d_1 = 1$.
En deux lancers, ne pas obtenir deux piles consécutifs est l'évènement :

$$\overline{R_1 \cap R_2} \quad \text{donc} \quad d_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

par indépendance des lancers.

(b) On note D_n l'évènement " deux piles consécutifs n'apparaissent jamais durant les n premiers lancers ". Avec le système complet d'évènements $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ on obtient :

$$D_{n+2} = (F_1 \cap D_{n+2}) \cup (P_1 \cap F_2 \cap D_{n+2}) \cup (P_1 \cap P_2 \cap D_{n+2}).$$

Donc par incompatibilité :

$$P(D_{n+2}) = P(F_1 \cap D_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2 \cap D_{n+2}) + P(P_1 \cap P_2 \cap D_{n+2})$$

puis les probabilités composées :

$$P(D_{n+2}) = P(F_1)P_{F_1}(D_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2)P_{P_1 \cap F_2}(D_{n+2}) + P(P_1 \cap P_2)P_{P_1 \cap P_2}(D_{n+2}).$$

On remarque que la probabilité de D_{n+2} sachant F_1 est celle de D_{n+1}, car l'arrivée d'une face signifie qu'on repart du départ, avec un lancer de moins pour obtenir ou non la succession PP.
De même, la probabilité de D_{n+2} sachant $P_1 \cap F_2$ est celle de D_n, car l'arrivée de F_2 fait repartir du début avec seulement n lancers restants.
Enfin, sachant $P_1 \cap P_2$, D_{n+2} est impossible : on a obtenu une séquence PP aux lancers 1 et 2, donc on en a au moins une dans les $n + 2$ premiers lancers.
Donc, par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} P(D_{n+2}) &= P(F_1)P(D_{n+1}) + P(P_1 \cap F_2)P(D_n) + P(P_1 \cap P_2) \times 0 \\ &= \frac{1}{2}P(D_{n+1}) + \frac{1}{4}P(D_n) \end{aligned}$$

Enfin on obtient bien :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

(c) On reconnaît une suite récurrente double, dont l'équation caractéristique est :

$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \iff 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

qui a pour discriminant et racines :

$$\Delta = 4 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 \quad , \quad x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{8} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes α et β réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$d_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

(d) On reconnaît deux séries géométriques, encadrons leurs raisons :

$$4 < 5 < 9 \quad \Rightarrow \quad 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 < 1 + \sqrt{5} < 4 \\ \\ -2 < 1 - \sqrt{5} < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 \\ \\ -\frac{1}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 \\ \\ -1 < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 1 \end{cases}$$

donc ces deux séries géométriques convergent, et la série de terme général d_n converge. L'énoncé précise d'utiliser la question (b) pour obtenir sa somme, on va donc repartir de :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

Pour faire apparaître la somme, sommons cette égalité pour n allant de 1 à $+\infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n.$$

On effectue les changements d'indice $n' = n+2$ dans la première somme et $n' = n+1$ dans la seconde, et on ne touche pas à la troisième (c'est celle qu'on cherche) :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} d_n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} d_n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n.$$

On fait apparaître les termes manquants par rapport à la somme cherchée dans les deux premières sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - d_1 - d_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - d_1\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n.$$

Or on sait que $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{3}{4}$ donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - \frac{7}{4} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n.$$

On rassemble enfin à gauche toutes les sommes, et on obtient :

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5.$$

11. (a) $(T > n) \cup (T = 0)$ signifie que, soit un joueur gagne lors d'un lancer de rang supérieur à n, soit aucun ne gagne. C'est donc le contraire de l'évènement : "un joueur gagne entre les lancers 3 et n" (car on ne peut gagner après le premier ou le second lancer).

Or pour gagner entre les lancers 3 et n, les deux joueurs ont besoin d'une séquence PP. Donc si cette séquence n'apparaît jamais dans les n premiers lancers, aucun joueur n'a pas gagné.

Considérons les autres cas. Si une séquence PP a eu lieu lors des n premiers lancers, elle fait partie d'une chaîne du type

$$PPPPPPPPPPP$$

précédée d'un face ou bien commençant au premier lancer, et suivie d'une face.

Si elle est précédée d'un face, il est immédiatement suivi d'un double pile, donc le joueur J' a gagné. On en déduit que c'est impossible, et la chaîne doit commencer au premier lancer.

Si le face qui suit arrive au lancer n ou avant, comme il est précédé d'un double pile, le joueur J gagne. C'est impossible, et la chaîne doit donc s'arrêter après le premier lancer.

Finalement la seule séquence qui permet d'avoir eu un double pile au moins lors des n premiers lancers, sans qu'un des joueurs gagne, est :

$$R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap R_n = \bigcap_{i=1}^{n} R_i.$$

On obtient donc la décomposition suivante :

$$(T > n) \cup (T = 0) = D_n \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \right)$$

La réunion est incompatible et les lancers indépendants, et finalement :

$$P((T > n) \cup (T = 0)) = d_n + \left(\frac{1}{2} \right)^n .$$

(b) On remarque que, avec une réunion incompatible, on a :

$$(T > n) \cup (T = 0) \cup (T = n) = (T > n - 1) \cup (T = 0).$$

On en déduit que :

$$P((T > n) \cup (T = 0)) + P(T = n) = P((T > n - 1) \cup (T = 0))$$

donc avec la question précédente :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P((T > n - 1) \cup (T = 0)) - P((T > n) \cup (T = 0)) = \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \frac{1}{2^n} - d_n \\ &= \frac{2 - 1}{2^n} + d_{n-1} - d_n = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n. \end{aligned}$$

(c) On cherche la probabilité de

$$\overline{(T = 0)} = \bigcup_{n=3}^{+\infty} (T = n).$$

Par incompatibilité de la réunion, les 3 sommes étant convergentes, on obtient :

$$P\left[\overline{(T = 0)}\right] = \sum_{n=3}^{+\infty} P(T = n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n.$$

Avec le changement d'indice $n' = n - 1$ dans la deuxième somme on obtient :

$$P\left[\overline{(T = 0)}\right] = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \sum_{n=2}^{+\infty} d_n - (5 - d_1 - d_2) = \frac{1}{8} \times 2 + (5 - d_1) - 5 + d_1 + d_2 = \frac{1}{4} + d_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

12. On remarque que, avec une réunion incompatible,

$$\text{" un joueur gagne "} = \text{" J gagne "} \cup \text{" J' gagne "}$$

donc on obtient que :

$$1 = \frac{1}{4} + P\,(\text{" J' gagne "})$$

et enfin J' est gagnant avec une probabilité $\frac{3}{4}$, donc J' a bien un net avantage sur J.

Le paradoxe vient du fait que séparément, les séquences gagnantes des deux joueurs ont exactement les mêmes probabilités d'apparaître pour la première fois à n'importe quel rang. Cependant comme l'évènement "J gagne" impose l'arrivée d'un double-pile qui augmente considérablement les chances d'arrivée de la séquence gagnante de J' précédemment, J' possède un large avantage.

En allant un peut plus loin, on peut remarquer que le jeu est décidé après les deux premiers lancers : s'il y a eu un double pile, à la première arrivée d'un face, J gagnera. S'il y a eu un face, le premier double-pile sera obligatoirement précédé d'une face, et J' gagnera.

13. Cette fois les séquences gagnantes de J et J' ont non seulement les mêmes probabilité d'arriver pour la première fois à chaque lancer, mais elles sont aussi et surtout parfaitement symétriques (ce qui n'était pas le cas lors du jeu précédent). On peut donc affirmer que le jeu sera parfaitement équitable (à condition que la pièce soit équilibrée évidemment).

14. (a) La question 11 donne $P(T = n)$ en fonction de d_n, on part donc de :

$$\begin{aligned}
t(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n)x^n = 0+0+\sum_{n=3}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + d_{n-1} - d_n\right]x^n \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1}x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n \\
&= \frac{x^3}{8}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \sum_{n=2}^{+\infty} d_n x^{n+1} - (d(x) - d_1x - d_2x^2) \\
&= \frac{x^3}{8}\times\frac{2}{2-x} + x(d(x) - d_1x) - \left(d(x) - x - \frac{3}{4}x^2\right) \\
&= \frac{x^3}{2}\times\frac{1}{2(2-x)} + xd(x) - x^2 - d(x) + x + \frac{3}{4}x^2 \\
&= (x-1)d(x) + x + \frac{\frac{x^3}{2} - 2(2-x)x^2 + \frac{3}{2}(2-x)x^2}{2(2-x)} \\
&= (x-1)d(x) + x + \frac{\frac{x^3}{2} - 4x^2 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x^3}{2(2-x)} \\
&= (x-1)d(x) + x + \frac{x^3 - x^2}{2(2-x)} = (x-1)d(x) + x + \frac{x^2(x-1)}{2(2-x)} \\
&= (x-1)\left[d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)}\right] + x.
\end{aligned}$$

(b) De plus on obtient

$$t(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) = 0 + 0 + \sum_{n\in\{0\}\cup[\![3;+\infty[\![} P(T=n) - 0 = 1$$

donc :

$$\begin{aligned}
\frac{t(x)-t(1)}{x-1} &= \frac{(x-1)\left[d(x)+\frac{x^2}{2(2-x)}\right] + x - 1}{x-1} = \frac{(x-1)\left[d(x)+\frac{x^2}{2(2-x)}+1\right]}{x-1} \\
&= d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1.
\end{aligned}$$

(c) Sur le modèle de la partie I, d étant définie par une série, on revient à la définition de la croissance : soient x et y deux réels de $[0;1]$ tels que $x \leq y$, alors par croissance de la fonction $x \mapsto x^k$ sur $[0;1]$, pour tout $k \geq 1$ puis avec $d_k \geq 0$:

$$x \leq y \Longrightarrow x^k \leq y^k \Longrightarrow d_kx^k \leq d_ky^k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} d_kx^k = d(x) \leq d(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_ky^k$$

donc la fonction d est croissante, ce qui assure que sur $[0;1]$, $d(x) \leq d(1)$.

Enfin comme la série de terme général $d_k x^k$ est à termes positifs, sa somme partielle est toujours inférieure à sa somme ce qui donne :

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{N} d_k x^k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} d_k x^k = d(x) \leq d(1).$$

On fait tendre x vers 1^-, et par somme de limites (finie) à gauche et par passage des inégalités à la limite, on obtient :

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{N} d_k \leq \lim_{x \to 1^-} d(x) \leq d(1).$$

Enfin on fait tendre N vers $+\infty$ dans cet encadrement (la série est bien convergente, et les deux autres termes sont constants) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = d(1) \leq \lim_{x \to 1^-} d(x) \leq d(1)$$

donc on obtient bien :

$$\lim_{x \to 1^-} d(x) = d(1) = 5.$$

(d) On déduit de ce qui précède que

$$\frac{t(x) - t(1)}{x - 1} = d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1 \xrightarrow[x \to 1]{} d(1) + \frac{1}{2(2-1)} + 1 = 5 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{13}{2}.$$

t est donc dérivable et 1, et sa dérivée vaut $\frac{13}{2}$. La partie I appliquée à la variable aléatoire T assure alors que T admet une espérance, et que celle-ci est égale à $t'(1)$:

$$E(T) = t'(1) = \frac{13}{2}.$$

Partie IV : Simulation informatique

15.

a)

	x	y	k
$(r=1)$	1	0	1
$(r=1)$	2	0	2
$(r=1)$	2	0	3
$(r=1)$	2	0	4
$(r=0)$	3	1	5

b)

	x	y	k
$(r=1)$	1	0	1
$(r=0)$	0	1	2
$(r=1)$	1	2	3
$(r=0)$	0	1	4
$(r=0)$	0	1	5
$(r=0)$	0	1	6
$(r=1)$	1	2	7
$(r=1)$	2	3	8

c)

	x	y	k
$(r=1)$	0	1	1
$(r=0)$	1	2	2
$(r=1)$	0	1	3
$(r=0)$	1	2	4
$(r=0)$	0	1	5
$(r=0)$	1	2	6
$(r=1)$	2	3	7

16. Si on considère qu'obtenir 1 correspond à obtenir un Pile et obtenir 0 un Face, on constate que la séquence " Pile, Pile, Face " intervient au cinquième lancer dans 15.(a) et que la séquence " Face, Pile, Pile " n'est pas apparu auparavant donc le joueur J a gagné au cinquième lancer. Pour 15.(b) et 15.(c), c'est le joueur J' qui gagne respectivement au huitième et septième lancer. La valeur que prend k correspond dans chaque cas au rang du lancer où l'un des deux joueurs gagne, x désigne le nombre d'éléments de la séquence " Pile, Pile, Face " pour le joueur J et y le nombre d'éléments de la séquence " Face, Pile, Pile " pour le joueur J'.

Il faut donc rajouter " le joueur J gagne " dans la première parenthèse et " le joueur J' gagne " dans la deuxième parenthèse.

Il affiche successivement " le joueur J gagne ", " le joueur J' gagne ", " le joueur J' gagne ".