Correction - AP 7

Chaînes de Markov

Exercice 1 (D'après ESSEC II 2008)

1. (a) Non. En fait, $St_n(\mathbb{R})$ n'est ni stable par multiplication par un réel, ni par somme.
Par exemple, soit $Q \in St_n(\mathbb{R})$, alors $A = 2Q \notin St_n(\mathbb{R})$ car

$$\sum_{i=1}^{n} A(i,1) = \sum_{i=1}^{n} 2Q(i,1) = 2\sum_{i=1}^{n} Q(i,1) = 2 \neq 1.$$

On pourrait trouver d'autre contre-exemple : $-2Q$ n'est pas dans $St_n(\mathbb{R})$ car elle a au moins un coefficient strictement négatif; une somme de matrices de $St_n(\mathbb{R})$ n'est pas dans $St_n(\mathbb{R})$ car la somme de chacune de ses colonnes vaut 2 et non 1... etc...

(b) Pour tout $(i,j) \in (\llbracket 1,n \rrbracket)^2$, on a $(AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} \geq 0$ comme somme de nombres positifs (tous les coefficients de A et de B sont positifs car ce sont des matrices stochastiques).
De plus, pour tout $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}}_{\text{en échangeant les sommes}} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{k,j} \times 1}_{\text{car } A \text{ est stochastique}} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} = \underbrace{1}_{\text{car } B \text{ est stochastique}}\end{aligned}$$

(c) Récurrence triviale qui découle de la propriété précédente.

2. (a) Pour tout $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$,

$$({}^tQ\ U)_i = \sum_{j=1}^{n} ({}^tQ)_{i,j} \times U_j = \sum_{j=1}^{n} Q_{j,i} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} Q_{j,i} = 1$$

car Q est stochastique. Ainsi, ${}^tQ\ U = U$.

(b) Si λ une valeur propre d'une matrice A, alors $\dim(Ker(A - \lambda I)) \geq 1$. Or avec le théorème du rang et les propriétés sur le rang d'une matrice (il est égal au rang de sa transposée), on a :

$$\dim(Ker(A-\lambda I)) = n-rg(A-\lambda I) = n-rg({}^t(A-\lambda I)) = n-rg({}^tA-\lambda I) = \dim(Ker({}^tA-\lambda I)).$$

Donc $\dim(Ker({}^tA - \lambda I)) \geq 1$ et λ est valeur propre de ${}^tA$.
Ainsi, $Sp(A) = Sp({}^tA)$. De plus avec l'égalité ci-dessus, $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$.

(c) On suppose que A est diagonalisable alors il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Donc ${}^tA = {}^t(PDP^{-1}) = {}^tP^{-1}{}^tD{}^tP = {}^tP^{-1}D{}^tP = QDQ^{-1}$ en posant $Q = {}^tP^{-1}$ inversible. Il existe bien Q inversible et D diagonale telles que ${}^tA = QDQ^{-1}$ donc ${}^tA$ est diagonalisable.
On suppose que ${}^tA$ est diagonalisable. Avec ce qu'on vient de démontrer, ${}^t({}^tA) = A$ est diagonalisable.

(d) On a vu à la question 2.(a) que ${}^tQU = U$ donc U est un vecteur propre de ${}^tQ$ et 1 est une valeur propre de ${}^tQ$.
Ainsi, d'après la question 2.(b), 1 est aussi une valeur propre de Q.

Rappels. Avant de poursuivre le sujet, faisons quelques rappels et compléments sur la valeur absolue :

Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x est le nombre réel, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a alors les propriétés algébriques de la valeur absolue suivantes :

Propriété 1 (de la valeur absolue d'un nombre réel)

(1) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| \times |y| = |x \times y|$.

(2) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

Preuve.

(1) Il suffit de faire une disjonction de cas (si $x \geq 0$ ou $x \leq 0$ et si $y \geq 0$ ou $y \leq 0$).

(2) De même, il suffit de faire une disjonction de cas (si $x \geq 0$ ou $x \leq 0$ et si $y < 0$ ou $y > 0$).

$\square$

Propriété 2 (Inégalité triangulaire)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \textit{(inégalité triangulaire)}.$$

De plus, $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont de même signe.

Preuve. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = |x|^2 + |y|^2 + 2xy.$$

Comme $xy \leq |xy| = |x|\,|y|$, on a :

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2\,|x|\,|y| = (|x| + |y|)^2.$$

Par croissance de la fonction racine carrée, nous obtenons l'inégalité :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Pour le cas d'égalité, on a :

$$\begin{aligned} |x + y| = |x| + |y| \quad &\Leftrightarrow \quad |x + y|^2 = (|x| + |y|)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x + y)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\,|x|\,|y| \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2\,|xy| \\ &\Leftrightarrow \quad xy = |xy| \\ &\Leftrightarrow \quad xy \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont de même signe. $\square$

Propriété 3 (Inégalité triangulaire généralisée)

Pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \textit{(inégalité triangulaire généralisée).}$$

De plus, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ si et seulement si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont tous de même signe.

Preuve. Par récurrence. □

Revenons à l'exercice 1 :

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\|QV\| &= \sum_{i=1}^{n} |(QV)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)v_j\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |Q(i,j)v_j| \qquad \text{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j| \qquad \text{(car } Q(i,j) \geq 0\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j| \qquad \text{(en échangeant les sommes)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |v_j| \sum_{i=1}^{n} Q(i,j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |v_j| \times 1 = \|V\| \qquad \text{(car } Q \text{ est stochastique)}
\end{aligned}$$

De plus, si les coefficients de V sont tous de même signe, la seule inégalité de la preuve ci-dessus est une égalité car

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)v_j\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)|v_j|$$

car $Q(i,j)$ positifs.

(b) Soit λ une valeur propre de Q. Par définition d'une valeur propre, il existe $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $V \neq 0$, tel que $QV = \lambda V$.
D'après l'inégalité démontrée à la question précédente, $\|QV\| \leq \|V\|$ donc $\|\lambda V\| \leq \|V\|$.
Or $\|\lambda V\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda v_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda||v_i| = |\lambda|\,\|V\|$.
On a donc $|\lambda|\,\|V\| \leq \|V\|$ et en divisant par $\|V\| > 0$ (car $V \neq 0$), on obtient $|\lambda| \leq 1$.

4. (a) X est non nul donc l'un au moins de ses coefficients est non nul donc

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| > 0.$$

On pose alors $\mu = \frac{1}{\|X\|}$. Le vecteur $W = \mu X$ est un vecteur propre de Q associé à 1 (car colinéaire à X) et vérifie $\|W\| = |\mu|\,\|X\| = \frac{1}{\|X\|}\,\|X\| = 1$.
Comme W n'est pas nul, il a au moins un coefficient non nul. S'il admet un coefficient strictement positif, on pose $V = W$. Si aucun coefficient n'est strictement positif, il y en a au moins un strictement négatif et on pose $V = -W = -\mu X$, qui a au moins un coefficient strictement positif et qui vérifie toujours les conditions demandées.

(b) i. L'inégalité triangulaire assure l'inégalité large. De plus, l'égalité n'est réalisée dans l'inégalité triangulaire que si tous les coefficients sont de même signe. Or V a un coefficient strictement positif et on a supposé qu'il en a un strictement négatif donc l'égalité n'est pas réalisée (les $Q(1,j)$ sont strictement positifs et ne changent rien au signe, même strict). On a bien :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} Q(1,j)v_j\right| < \sum_{j=1}^{n} Q(1,j)\,|v_j|\,.$$

ii. Soit $i \in [\![2,n]\!]$. L'inégalité est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire, avec les $Q(i,j)$ qui sont positifs ou nuls donc $|Q(i,j)| = Q(i,j)$.

iii. Comme $QV = V$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(QV)_i = v_i$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)v_j = v_i$.

iv. Les inégalités des questions (i) et (ii) deviennent donc :

$$|v_1| < \sum_{j=1}^{n} Q(1,j)\,|v_j| \quad \text{et pour tout } i \in [\![2,n]\!], \quad |v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j|\,.$$

Ainsi, en sommant pour i allant de 1 à n on obtient :

$$\|V\| = \sum_{i=1}^{n} |v_i| < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j|$$

v. Or :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Q(i,j)\,|v_j| = \sum_{j=1}^{n} |v_j| \sum_{i=1}^{n} Q(i,j) = \sum_{j=1}^{n} |v_j| = \|V\|\,.$$

L'inégalité de la question précédente devient donc $\|V\| < \|V\|$. On obtient donc une contradiction !

vi. L'hypothèse comme quoi l'un au moins des coefficients de V est négatif est donc fausse. Donc tous les coefficients de V sont positifs. De plus, $\|V\| = 1$ d'après la question 4.(a) donc V est bien un vecteur de probabilité. Il vérifie (d'après 4.(a)) $QV = V$ donc c'est un vecteur propre de Q associé à la valeur propre 1.

Remarque. Si A est la matrice de transition d'une chaîne de Markov, on sait que :

- A est stochastique par ligne donc ${}^tA$ est stochastique par colonne ;
- Un état stable U est un vecteur-ligne probabiliste tel que ${}^tU$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

On a donc prouvé dans cette question 4 l'existence d'un état stable lorsque la matrice de transition admet au moins une colonne dont tous les coefficients sont strictement positifs.

Exercice 2 (ESSEC I 2011)

1. (a) S'il n'y a avait aucune personne voulant voter pour A, les deux personnes se rencontrant veulent toutes les deux voter pour B et il n'y a pas de changement. D'où

$$p_{0,0} = P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = 1.$$

De même si toutes les personnes veulent voter pour A, les deux qui se rencontrent veulent voter pour A et il n'y a aucun changement, et

$$p_{4,4} = P_{(X_k=4)}(X_{k+1} = 4) = 1.$$

(b) Chaque jour une personne au maximum change d'avis donc si $X_k = i$, alors le lendemain

$$i - 1 \leq X_{k+1} \leq i + 1$$

et si $|i - j| \geq 2$ cette condition n'est pas vérifiée donc

$$p_{i,j} = 0.$$

(c) Si $X_k = 1$ on a :
Pour avoir $X_{k+1} = 0$ il faut que la première personne tirée veuille voter pour B; or il y en a 3 sur les 4 donc la probabilité est de $\frac{3}{4}$.
Il faut de plus que la deuxième personne tirée veuille voter pour A; or il y en a 1 sur les 3 restantes donc la probabilité est de $\frac{1}{3}$.
On obtient donc

$$p_{1,0} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

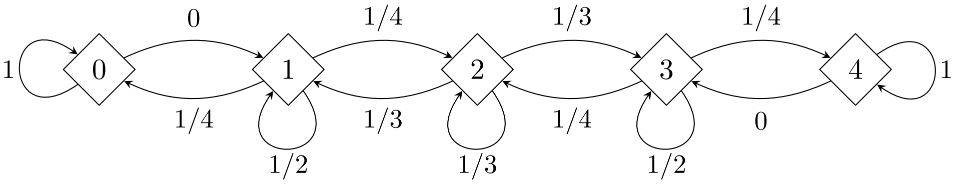
Pour avoir $X_{k+1} = 2$ il faut que la première personne tirée veuille voter pour A; or il y en a 1 sur les 4 donc la probabilité est de $\frac{1}{4}$.
Il faut de plus que la deuxième personne tirée veuille voter pour B; or il y en a 3 sur les 3 restantes donc la probabilité est de 1.
On obtient donc

$$p_{1,2} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

Enfin comme $(X_k = i)_{0 \leq i \leq 4}$ est un système complet d'évènements et $p_{1,3} = p_{1,4} = 0$ par la question précédente, on a :

$$p_{1,1} = 1 - p_{1,0} - p_{1,2} - p_{1,3} - p_{1,4} = \frac{1}{2}.$$

(d) La justification est la même que celles de la question c) à chaque fois.



2. (a) Avec le système complet d'évènement $(X_n = i)_{0 \leq i \leq 4}$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{i=0}^{4} P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1) = 0 + p_{1,1} P(X_n = 1) + p_{2,1} P(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{1}{3} P(X_n = 2). \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=2) &= \sum_{i=0}^{4} P(X_n=i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=2)\\
&= 0 + p_{1,2}P(X_n=1) + p_{2,2}P(X_n=2) + p_{3,2}P(X_n=3)\\
&= \frac{1}{4}P(X_n=1) + \frac{1}{3}P(X_n=2) + \frac{1}{4}P(X_n=4).\\
P(X_{n+1}=3) &= \sum_{i=0}^{4} P(X_n=i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=3)\\
&= 0 + p_{2,3}P(X_n=2) + p_{3,3}P(X_n=3)\\
&= \frac{1}{3}P(X_n=2) + \frac{1}{2}P(X_n=3).
\end{aligned}$$

Le produit MU_n donne alors :

$$MU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{1}{3}P(X_n=2) \\ \\ \frac{1}{4}P(X_n=1) + \frac{1}{3}P(X_n=2) + \frac{1}{4}P(X_n=4) \\ \\ \frac{1}{3}P(X_n=2) + \frac{1}{2}P(X_n=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) \\ \\ P(X_{n+1}=2) \\ \\ P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

On prouve alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$:

Ini. Pour $n=0$,

$$M^0U_0 = IU_0 = U_0$$

donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = M^nU_0$, alors :

$$U_{n+1} = MU_n = MM^nU_0 = M^{n+1}U_0$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^nU_0$.

(b) On cherche les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $M - \lambda I$ ne soit pas inversible :

$$\begin{aligned}
M - \lambda I \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}\\
\iff \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 6L_1 \\ L_2 \leftarrow 12L_2 \\ L_3 \leftarrow 6L_3 \end{array} \quad & \begin{pmatrix} 3(1-2\lambda) & 2 & 0 \\ 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \end{pmatrix}\\
\iff L_2 \leftrightarrow L_1 \quad & \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 3(1-2\lambda) & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \end{pmatrix}\\
\iff L_2 \leftarrow L_2 - (1-2\lambda)L_1 \quad & \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2-4(1-2\lambda)(1-3\lambda) & -3(1-2\lambda) \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \end{pmatrix}\\
\iff L_3 \leftrightarrow L_2 \quad & \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \\ 0 & 2-4(1-2\lambda)(1-3\lambda) & -3(1-2\lambda) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui donne pour finir :

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \left[1-2(1-2\lambda)(1-3\lambda)\right] L_2}{\iff} \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -3(1-2\lambda) - 3\left[1-2(1-2\lambda)(1-3\lambda)\right] \times (1-2\lambda) \\ &= -3(1-2\lambda)\left[1+1-2(1-2\lambda)(1-3\lambda)\right] = -6(1-2\lambda)\left[1-(1-5\lambda+6\lambda^2)\right] \\ &= -6(1-2\lambda)(-6\lambda^2+5\lambda) = 6\lambda(1-2\lambda)(6\lambda-5). \end{aligned}$$

Les deux autres valeurs diagonales de la réduite triangulaire ne peuvent être nulles, donc les valeurs propres de M sont les racines de P, c'est-à-dire :

$$Sp(M) = \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right\}$$

On a alors que :

- 0 est valeur propre de M donc il existe $U \neq 0$ vecteur propre de M associé à la valeur propre 0 ;
- $1/2$ est valeur propre de M donc il existe $V \neq 0$ vecteur propre de M associé à la valeur propre $1/2$;
- $5/6$ est valeur propre de M donc il existe $W \neq 0$ vecteur propre de M associé à la valeur propre $5/6$.

Les trois familles (U), (V) et (W) sont des familles libres (car un vecteur non nul) de $E_0(M)$, $E_{1/2}(M)$ et $E_{5/6}(M)$. Par concaténation, (U, V, W) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme son cardinal est égal à $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres 0, $1/2$ et $5/6$. Donc M est diagonalisable et, en posant P la matrice constituée de cette base de vecteurs propres et

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

on obtient alors :

$$M = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}MP.$$

(c) On en déduit par récurrence rapide que

$$P^{-1}M^nP = D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

puis

$$U_n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}U_0$$

et par linéarité du produit matriciel, chaque coefficient est donc une combinaison linéaire de α^n, β^n et γ^n (0, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^n$).

(d) Ces trois suites ont pour limite 0 car elles sont géométriques et leurs raisons sont éléments de $]-1;1[$ donc on en déduit que

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{pour } k \in \{1;2;3\}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(X_n = k)_{0 \le k \le 4}$ est un système complet d'évènements,
$$\sum_{k=0}^{4} P(X_n = k) = 1 \quad \text{donc} \quad P(X_n = 0) + P(X_n = 4) = 1 - \sum_{k=1}^{3} P(X_n = k)$$
et en passant à la limite on en déduit que
$$\lim_{n \to +\infty} [P(X_n = 0) + P(X_n = 4)] = 1.$$
Cela signifie que lorsque n est très grand, on est presque sûrs que soit tous les électeurs voudront voter pour A, soit ils voudront tous voter pour B.

4. (a) Sachant que $(X_n = k)$, pour avoir $(X_{n+1} = k+1)$ il faut que l'un des k électeurs voulant voter pour A soit tiré en premier (probabilité $\frac{k}{m}$) puis que dans les $m-1$ restants, on choisisse un des $m-k$ voulant voter pour B (probabilité $\frac{m-k}{m-1}$) donc
$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k}{m}\frac{m-k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}.$$
Sachant que $(X_n = k)$, pour avoir $(X_{n+1} = k-1)$ il faut que l'un des $m-k$ électeurs voulant voter pour B soit tiré en premier (probabilité $\frac{m-k}{m}$) puis que dans les $m-1$ restants, on choisisse un des k voulant voter pour A (probabilité $\frac{k}{m-1}$) donc
$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{m-k}{m}\frac{k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}.$$
Enfin, on remarque que sachant $(X_n = k)$, X_{n+1} est compris entre $k-1$ et $k+1$ donc
$$P_{(X_n=k)}(k-1 \le X_{n+1} \le k+1) = 1$$
donc
$$P_{(X_n=k)}\left((X_{n+1} = k-1) \cup (X_{n+1} = k) \cup X_{n+1} = k+1)\right) = 1$$
et la réunion est incompatible, ce qui donne :
$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)}.$$
(b) Avec le système complet d'évènement $(X_n = j)_{j \in [\![0;m]\!]}$ on a par probabilités totales :
$$\begin{aligned}
&\pi_{n+1,k}\\
=\; & \sum_{j=0}^{m} \pi_{n,j} \times P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k)\\
=\; & \sum_{j=0}^{k-2} \pi_{n,j} \times 0 + \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} \times P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) + \sum_{j=k+2}^{m} \pi_{n,j} \times 0\\
=\; & \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} \times P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k)\\
=\; & \pi_{n,k-1} \times \frac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)} + \pi_{n,k+1} \times \frac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)} + \pi_{n,k} \times \left(1 - 2\frac{k(m-k)}{m(m-1)}\right)\\
=\; & \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.
\end{aligned}$$

5. (a) Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, on a :
$$\forall k \in [\![1; m-1]\!],\ \pi_{n,k} \le \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$

Ini. $\pi_{0,k}$ est une probabilité donc

$$\pi_{0,k} \leq 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0 = 1.$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall k \in [\![1; m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.
Alors pour tout $k \in [\![1; m-1]\!]$, $\pi_{n+1,k}$ est majoré par

$$\frac{(k-1)(m+1-k) + [m(m-1) - 2k(m-k)] + (k+1)(m-1-k)}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

Simplifions le numérateur du premier facteur (qu'on note N) :

$$\begin{aligned} N &= (k-1)(m+1-k) + [m(m-1) - 2k(m-k)] + (k+1)(m-1-k) \\ &= k(m-k) + k - m - 1 + k + m(m-1) - 2k(m-k) + k(m-k) - k + m - 1 - k \\ &= k(m-k)\,[1-2+1] + k(1+1-1-1) + m(-1+1) + m(m-1) - 2 \\ &= m(m-1) - 2 \end{aligned}$$

ce qui donne enfin :

$$\pi_{n+1,k} \leq \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n = \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![1; m-1]\!]$,

$$\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$

(b) On a $m \geq 2$ donc $m-1 \geq 1$ et enfin $m(m-1) \geq 2$ donc $0 \leq m(m-1) - 2 < m(m-1)$ et

$$0 \leq \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} < \frac{m(m-1)}{m(m-1)} = 1.$$

On en déduit que

$$\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis par théorème d'encadrement, comme $0 \leq \pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$ pour tout $k \in [\![1; m-1]\!]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = 0.$$

6. (a) On peut écrire :

$$V_A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = m)$$

et c'est une union croissante d'évènements car si $(X_n = m)$ est réalisé, alors $(X_{n+1} = m)$ aussi. Le théorème de la limite monotone donne alors

$$P(V_A) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = m).$$

De même

$$V_B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0)$$

et ces évènements sont inclus les uns dans les autres car $(X_n = 0)$ implique que $(X_{n+1} = 0)$. Le théorème de la limite monotone donne alors

$$P(V_B) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0).$$

(b) On a donc
$$P(V_A)+P(V_B)=\lim_{n\to+\infty}\Big[P(X_n=m)+P(X_n=0)\Big].$$
Or pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$P(X_n=m)+P(X_n=0)=1-\sum_{k=1}^{m-1}\pi_{n,k}$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty}\Big[P(X_n=m)+P(X_n=0)\Big]=1-\sum_{k=1}^{m-1}\lim_{n\to+\infty}\pi_{n,k}=1,$$
en enfin
$$P(V_A)+P(V_B)=1.$$
Ce résultat signifie qu'il est presque certain qu'au bout d'un certain temps, tous les candidats auront la même intention de vote.

7. (a) Comme une seule personne peut changer d'avis chaque jour, on a
$$|X_{n+1}-X_n|\leq 1$$
donc $Z_n(\Omega)\subset\{-1;0;1\}$.
De plus (avec $X_n=1$ qui peut donner avec une probabilité non nulle $X_{n+1}=0$, $X_{n+1}=1$ et $X_{n+1}=2$), on a bien $\{-1;0;1\}\subset Z_n(\Omega)$ et enfin
$$Z_n(\Omega)=\{-1;0;1\}.$$

(b) Avec le système complet d'évènement $(X_n=k)_{k\in[\![0;m]\!]}$ on a :
$$\begin{aligned}P(Z_n=1) &= \sum_{k=0}^{m}P\Big[(Z_n=1)\cap(X_n=k)\Big]=\sum_{k=0}^{m}P\Big[(X_{n+1}-X_n=1)\cap(X_n=k)\Big]\\ &= \sum_{k=0}^{m}P\Big[(X_{n+1}=k+1)\cap(X_n=k)\Big]\end{aligned}$$
Or $(X_{n+1}=m+1)$ est impossible (il y a m électeurs) et $(X_n=0)\cap(X_{n+1}=1)$ également car si $(X_n=0)$, alors $(X_{n+1}=0)$.
Enfin par probabilités composées et avec le résultat de 4.(a) on obtient :
$$P(Z_n=1)=\sum_{k=1}^{m-1}\pi_{n,k}\times\frac{k(m-k)}{m(m-1)}.$$

(c) Un raisonnement identique donne (avec $(X_{n+1}=-1)$ et $(X_n=m)\cap(X_{n+1}=m-1)$ impossibles) :
$$\begin{aligned}P(Z_n=-1) &= \sum_{k=1}^{m-1}P(X_n=k)\times P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k-1)=\sum_{k=1}^{m-1}\pi_{n,k}\times\frac{k(m-k)}{m(m-1)}\\ &= P(Z_n=1).\end{aligned}$$

(d) On en déduit que (Z_n est finie donc admet une espérance) :
$$\begin{aligned}E(Z_n) &= -1\times P(Z_n=-1)+0\times P(Z_n=0)+1\times P(Z_n=1)\\ &= -P(Z_n=1)+P(Z_n=1)=0.\end{aligned}$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'espérance (X_n et X_{n+1} sont finies donc admettent des espérances) :

$$E(Z_n) = E(X_{n+1}) - E(X_n) = 0 \quad \text{donc} \quad E(X_{n+1}) = E(X_n).$$

On en déduit par une récurrence triviale que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n) = E(X_0) = a$$

car X_0 est une variable aléatoire certaine égale à a.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E(X_n) = a = \sum_{k=0}^{m} k \times \pi_{n,k}.$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et par unicité de la limite on obtient :

$$a = 0 \times \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,0} + m \times \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,m} + \sum_{k=1}^{m} k \times \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = mP(V_A)$$

car tous les autres termes valent 0 (la limite pour $1 \leq k \leq m-1$ et la valeur de k pour $k=0$).

On en déduit que

$$mP(V_A) = a \quad \text{et enfin} \quad P(V_A) = \frac{a}{m}.$$
