Correction - AP 8

Espaces vectoriels

Exercice 1

1. (a) Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E :
   - $F \cap G \subset E$ car $F \subset E$ et $G \subset E$.
   - $0_E \in F$ et $0_E \in G$ (car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E) donc $0_E \in F \cap G$ et $F \cap G \neq \emptyset$.
   - Soit $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $u, v \in F$ et F sous-espace vectoriel, $\lambda u + v \in F$. Comme $u, v \in G$ et G sous-espace vectoriel, $\lambda u + v \in G$. Donc $\lambda u + v \in F \cap G$.

   Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y + z\} = \{(-2y + z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = Vect((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$. Donc $((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$ est une famille génératrice et libre (car ce sont deux vecteurs non colinéaires) de F. C'est donc une base de F.

   $G = \{(a, a + b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 1, 0), (0, 1, 1))$. Donc $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est une famille génératrice et libre (car ce sont deux vecteurs non colinéaires) de G. C'est donc une base de G.

   Soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$. Alors $x + 2y - z = 0$ (car $u \in F$) et $y = x + z$ (car $u \in G$). On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 0 \\ -3y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{1}{3}z \\ y & = & \dfrac{2}{3}z \end{array}\right.$$

   Donc $F \cap G = \{(-\frac{1}{3}z, \frac{2}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = Vect((-1, 2, 3))$. Donc $((-1, 2, 3))$ est une famille génératrice et libre (car c'est un vecteur non nul) de $F \cap G$. C'est donc une base de $F \cap G$.

2. (a) $(1, 0) \in F$ donc $(1, 0) \in F \cup G$. $(0, 1) \in G$ donc $(0, 1) \in F \cup G$. Mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$ et $\notin G$ donc $\notin F \cup G$.

   $F \cup G$ n'est donc pas stable pour la loi $+$ et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

   (b) $\Rightarrow$ Par l'absurde. Supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Donc il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Alors $x, y \in F \cup G$ qui est un sous-espace vectoriel par hypothèse. Donc $x + y \in F \cup G$. Donc $x + y \in F$ ou $x + y \in G$.
   - Si $x + y \in F$, alors $y = \underbrace{x + y}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F} \in F$ car F est un sous-espace vectoriel. Ceci est absurde car $y \notin F$.
   - Si $x + y \in G$, alors $x = \underbrace{x + y}_{\in G} - \underbrace{y}_{\in G} \in G$ car G est un sous-espace vectoriel. Ceci est absurde car $x \notin G$.

   Dans les deux cas, on a une contradiction. Donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.

   $\Leftarrow$ Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$. Si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$. Dans les deux cas, $F \cup G$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

3. (a) Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E :
   - Si $x \in F + G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Or $f \in F \subset E$ et $g \in G \subset E$ donc par stabilité par somme de E, $x = f + g \in E$ et $F + G \subset E$.
   - $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$ et $F + G \neq \emptyset$.

- Soient $x, y \in F+G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$ tels que : $x = f+g$ et $y = f'+g'$. Alors :

$$\lambda x + y = \lambda(f+g) + f' + g' = \underbrace{(\lambda f + f')}_{\in F} + \underbrace{(\lambda g + g')}_{\in G} \in F+G$$

car F et G sont des sous-espaces vectoriels.

Donc $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit $f \in F$. Alors $f = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G$. Donc $F \subset F+G$.

Soit $g \in G$. Alors $g = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G} \in F+G$. Donc $G \subset F+G$.

(c) Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant F et G. Soit $x \in F+G$. Il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f+g$. Or $f \in F \subset H$ et $g \in G \subset H$ donc $x = f+g \in H$ car H est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, $F+G \subset H$.

(d) $\Rightarrow$ D'après la question 3.(b), $F \subset F+G$.
Si $x \in F+G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f+g$. Or $G \subset F$, donc $g \in G \subset F$. Donc $x = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in F} \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E. Donc $F+G \subset F$.
Ainsi, $F+G = F$.

$\Leftarrow$ D'après la question 3.(b), $G \subset F+G$. Comme $F+G = F$, on a finalement $G \subset F$.

(e) $\Rightarrow$ D'après 3.(b), $F \subset F+G = F \cap G \subset G$ donc $F \subset G$. De même, toujours avec 3.(b), $G \subset F+G = F \cap G \subset F$ donc $G \subset F$. Finalement, $F = G$.

$\Leftarrow$ Si $F = G$, $F \cap G = F$. Et d'après la question 3.(d), comme $G \subset F$ (car $F = G$), $F+G = F$. Finalement, $F \cap G = F = F+G$.

(f)
- Existence de la décomposition : $u \in F+G$ donc par définition de $F+G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f+g$.
- Unicité de la décomposition : Supposons qu'il existe $(f_1, g_1) \in F \times G$ et $(f_2, g_2) \in F \times G$ tels que $u = f_1+g_1 = f_2+g_2$. Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G$ car $f_1 - f_2 \in F$ (par stabilité de F par combinaisons linéaires) et $g_2 - g_1 \in G$ (par stabilité de G par combinaisons linéaires).
Donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G = \{0_E\}$. Donc $f_1 - f_2 = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2$ et $g_2 - g_1 = 0 \Leftrightarrow g_2 = g_1$. Il y a donc unicité de la décomposition de u.

(g) Comme $F = Vect((-2,1,0),(1,0,1))$ et $G = Vect((1,1,0),(0,1,1))$, on a :

$$\begin{aligned} F+G &= \{f+g \mid f \in F \text{ et } g \in G\} \\ &= \{a(-2,1,0) + b(1,0,1) + c(1,1,0) + d(0,1,1) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect((-2,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)) \\ &= Vect((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)) \end{aligned}$$

car $(-2,1,0) = -\dfrac{3}{2}(1,0,1) - \dfrac{1}{2}(1,1,0) + \dfrac{3}{2}(0,1,1)$. Ainsi, $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est une famille génératrice de $F+G$ et elle est libre (à démontrer). C'est donc une base de $F+G$ et $dim(F+G) = 3$. Comme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $dim(F+G) = dim(\mathbb{R}^3)$, $F+G = \mathbb{R}^3$.

On a vu à la question 1.(b) que $dim(F) = 2$, $dim(G) = 2$ et $dim(F \cap G) = 1$. On a donc bien que $dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$.

Exercice 2

1. On vérifie que $A^tA =^t AA$ et $B^tB =^t BB$ donc A et $B \in E$.

2. $A+B=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$, ${}^t(A+B)=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$ et on vérifie que $(A+B)^t(A+B)\neq^t(A+B)(A+B)$.

   Ainsi, $A+B\notin E$. E n'est donc pas stable par somme et n'est donc pas un espace vectoriel.

3. Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}
M\in E &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a^2+b^2&ac+bd\\ac+bd&c^2+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2&ab+cd\\ab+cd&b^2+d^2\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=a^2+c^2\\ac+bd=ab+cd\\c^2+d^2=b^2+d^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}b^2=c^2\\(c-a)(a-d)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}b=c \text{ ou } b=-c\\b=c \text{ ou } a=d\end{cases}
\end{aligned}$$

4. On en déduit que les matrices de E peuvent être de deux formes :

$$M=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}\qquad\text{ou}\qquad M=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}.$$

5. On peut donc écrire $E=E_1\cup E_2$:

   - $E_1=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}=Vect\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est le sous-espace vectoriel de dimension 3 des matrices symétriques d'ordre 2.
   - $E_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}=Vect\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

   On a ici une illustration du fait qu'en général la réunion de deux espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 3

1. Montrons que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   - $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\in\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ car ${}^t0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}=0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})\neq\emptyset$.
   - Soient $M_1,M_2\in\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

   $${}^t(\lambda M_1+M_2)=\lambda\,{}^tM_1+{}^tM_2=\lambda M_1+M_2.$$

     Donc $\lambda M_1+M_2\in\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.

   Ainsi, $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   De même, on montre que $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. - Pour $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, on a :

   $$\begin{aligned}
   \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) &= \{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\mid {}^tM=M\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}\mid a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right\}\\
   &= Vect\,(E_{1,1},E_{2,2},E_{3,3},E_{1,2}+E_{2,1},E_{3,1}+E_{1,3},E_{2,3}+E_{3,2})
   \end{aligned}$$

     On montre que la famille génératrice obtenue est aussi libre. C'est donc une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R}))=6$.

- Pour $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_3(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Vect\left(E_{1,2}-E_{2,1}, E_{3,1}-E_{1,3}, E_{2,3}-E_{3,2}\right)\end{aligned}$$

  On montre que la famille génératrice obtenue est aussi libre. C'est donc une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et $dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = 3$.

3. Soit $M \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$. Donc $M = -M \Leftrightarrow 2M = 0 \Leftrightarrow M = 0$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) \subset \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$.

   Comme $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Donc $\{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\} \subset \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

   Ainsi $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$.

4. On a vu dans l'exercice 1 que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   De plus, $dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) + dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) - dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = 6 + 3 - 0 = 9 = dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))$.

   Donc $\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

5. Comme $\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\}$, on a démontré à la question 3.(f) de l'exercice 1 que, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $S \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et une unique matrice $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A$.

6. On a $M = S + A$ avec $S \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Donc ${}^tM = {}^t(S + A) = {}^tS + {}^tA = S - A$. Alors $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Exercice 4 (d'après EDHEC 1997)

1. (a) On a :

$$\mathscr{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\} = \{aJ + bK \mid a,b \in \mathbb{R}\}\, Vect\left(J,K\right),$$

   donc $\mathscr{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$. De plus, la famille (J,K) est génératrice de $\mathscr{N}$. Elle est également libre car J et K sont deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}$ est de dimension 2.

   (b) Les matrices de $\mathscr{N}$ sont triangulaires supérieures dont tous les éléments diagonaux sont nuls, elles sont donc non inversibles.

   (c) Soit A une matrice non nulle de $\mathscr{N}$. Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A. Comme A n'a qu'une seule valeur propre égale à 0 (car A est triangulaire supérieure et que ses éléments diagonaux sont nuls), $D = 0$ et donc $A = PDP^{-1} = 0$. Ceci contredit que A est non nulle. Donc A n'est pas diagonalisable.

   (d) Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathscr{N}$. Comme (J,K) est une base de $\mathscr{N}$, il existe des (uniques) réels a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $A = a_1J + a_2K$ et $B = b_1J + b_2K$. Alors :

$$AB = (a_1J + a_2K)(b_1J + b_2K) = a_1b_1J^2 + a_1b_2JK + a_2b_1KJ + b_1b_2K^2 = a_1b_1K \in \mathscr{N},$$

   car $J^2 = K$ et $JK = KJ = K^2 = 0$. Ainsi, $\mathscr{N}$ est bien stable par produit matriciel.

(e) En reprenant les calculs précédents, on a :

$$AB = a_1b_1K = b_1a_1K = BA.$$

Ainsi, les matrices de $\mathscr{N}$ commutent bien deux à deux.

(f) Soient A, B et C trois matrices appartenant à $\mathscr{N}$. En décomposant dans la base (J, K) comme aux questions précédentes, on a :

$$ABC = \underbrace{(a_1J + a_2K) \times (b_1J + b_2K)}_{=a_1b_1K} \times (c_1J + c_2K) = a_1b_1c_1 \underbrace{KJ}_{=0} + a_1b_1c_2 \underbrace{K^2}_{=0} = 0.$$

2. (a) La matrice nulle n'appartient pas à $\mathscr{J}$ donc $\mathscr{J}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(b) Soient $I + N$ et $I + N'$ deux matrices appartenant à $\mathscr{J}$, avec N et N' appartenant à $\mathscr{N}$. Alors :

$$(I + N)(I + N') = I + N + N' + NN'.$$

La stabilité de $\mathscr{N}$ pour la multiplication implique que $NN' \in \mathscr{N}$. Puisque $\mathscr{N}$ est un espace vectoriel, $N + N' + NN' \in \mathscr{N}$. Donc, par définition de $\mathscr{J}$, $I + N + N' + NN' \in \mathscr{J}$. On a bien prouvé que $\mathscr{J}$ est stable par produit matriciel.

3. (a) $E(0) = I \neq 0$ donc E n'est pas une application linéaire.

(b) Soit $N \in \mathscr{N}$. Alors $N^2 \in \mathscr{N}$ car $\mathscr{N}$ est stable par produit matriciel. Donc $N + \frac{1}{2}N^2 \in \mathscr{N}$ car $\mathscr{N}$ est un espace vectoriel. On a alors :

$$E(N) = I + \underbrace{N + \frac{1}{2}N^2}_{\in \mathscr{N}} \in \mathscr{J}.$$

On a ainsi démontré que $E(\mathscr{N}) \subset \mathscr{J}$.

(c) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} E(A) \times E(B) &= \left(I + A + \frac{1}{2}A^2\right) \times \left(I + B + \frac{1}{2}B^2\right) \\ &= I + B + \frac{1}{2}B^2 + A + AB + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{4}A^2B^2. \end{aligned}$$

Comme $A, B \in \mathscr{N}$, $AB^2 = A^2B = A^2B^2 = 0$ (question 1.(f)).
Donc

$$E(A) \times E(B) = I + (A + B) + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2).$$

Comme $AB = BA$ car A et B appartiennent à $\mathscr{N}$ (question 1.(e)), on a alors :

$$E(A) \times E(B) = I + (A + B) + \frac{1}{2}(A + B)^2 = E(A + B).$$

(d) Soit $A \in \mathscr{N}$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$(E(A))^n = E(nA)$".

Ini. $(E(A))^0 = I$ et $E(0 \times A) = E(0) = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n + 1)$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité et la question précédente à la troisième :

$$(E(A))^{n+1} = (E(A))^n \times E(A) = E(nA) \times E(A) = E(nA + A) = E((n + 1)A).$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(E(A))^n = E(nA)$.

(e) Avec la question 3.(c), on a : $E(A) \times E(-A) = E(A - A) = E(0) = I$. Donc $E(A)$ est inversible et $(E(A))^{-1} = E(-A)$.

4. (a) $L(0) = -\frac{3}{2}I \neq 0$ donc L n'est pas une application linéaire.

(b) Soit $I + N$ une matrice appartenant à $\mathscr{I}$, avec $N \in \mathscr{N}$. Alors :

$$L(I+N) = (I+N) - I - \frac{1}{2}((I+N) - I)^2 = N - \frac{1}{2}N^2 \in \mathscr{N},$$

car $\mathscr{N}$ est un espace vectoriel qui est stable par produit (questions 1.(a) et 1.(d)). On a ainsi démontré que $L(\mathscr{I}) \subset \mathscr{N}$.

(c) Remarquons tout d'abord que les composées $L \circ E$ et $E \circ L$ existe bien d'après les questions 3.(b) et 4.(b). Soit $N \in \mathscr{N}$.

- D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
(L \circ E)(N) &= L(E(N)) = L\left(I + N + \frac{1}{2}N^2\right) \\
&= \left(I + N + \frac{1}{2}N^2\right) - I - \frac{1}{2}\left(\left(I + N + \frac{1}{2}N^2\right) - I\right)^2 \\
&= N + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}\left(N + \frac{1}{2}N^2\right)^2 = N + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}\left(N^2 + N^3 + \frac{1}{4}N^4\right) \\
&= N + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N^2 = N,
\end{aligned}$$

en utilisant la question 1.(f) pour simplifier.

- D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(E \circ L)(I+N) &= E(L(I+N)) = E\left(N - \frac{1}{2}N^2\right) \\
&= I + \left(N - \frac{1}{2}N^2\right) + \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{2}N^2\right)^2 \\
&= I + N - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}\left(N^2 - N^3 + \frac{1}{4}N^4\right) \\
&= I + N - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N^2 = I + N,
\end{aligned}$$

en utilisant encore la question 1.(f) pour simplifier.

On a ainsi démontré que $L \circ E = Id_{\mathscr{N}}$ et $E \circ L = Id_{\mathscr{I}}$. Les applications E et L sont donc bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Remarque. Le lecteur intéressé pourra regarder l'exercice 3 du sujet EDHEC 1997 qui porte également sur ce thème.