Correction - DM 1

A rendre le Jeudi 2 Septembre

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \ln(a_{n+1}) = \ln(a_n^{3/5}b_n^{2/5}) = \ln(a_n^{3/5}) + \ln(b_n^{2/5}) = \frac{3}{5}\ln(a_n) + \frac{2}{5}\ln(b_n) = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \\ v_{n+1} &= \ln(b_{n+1}) = \ln(a_n^{2/5}b_n^{3/5}) = \ln(a_n^{2/5}) + \ln(b_n^{3/5}) = \frac{2}{5}\ln(a_n) + \frac{3}{5}\ln(b_n) = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n \end{aligned}$$

2. (a) On a, pour tout entier naturel n,

$$t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \left(\frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n\right) - \left(\frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n\right) = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}v_n = \frac{1}{5}t_n.$$

Donc $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

(b) D'après la formule explicite sur les suites géométriques, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times t_0$.

(c) On a $t_0 = u_0 - v_0 = \ln(a_0) - \ln(b_0) = \ln\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$. Par hypothèse, $b_0 > a_0 > 0$ donc, en divisant par $b_0 > 0$, $1 > \frac{a_0}{b_0} > 0$. Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\ln(1) > \ln\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$, c'est-à-dire $0 > \ln\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$. Donc $t_0 \leq 0$.

On a montré à la question précédente que $t_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times t_0$. Comme $t_0 \leq 0$, on en déduit que $t_n \leq 0$, c'est-à-dire $u_n - v_n \leq 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.

(d) $u_n - v_n = t_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times t_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Rappelons qu'on a démontré à la question 2.(c) que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n - u_n = \frac{2}{5}(v_n - u_n) \geq 0.$$

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n - v_n = \frac{2}{5}(u_n - v_n) \leq 0$$

4. (a) On a démontré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question 3.), que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (question 3.) et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ (question 2.(d)). Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ.

(b) On a posé $u_n = \ln(a_n)$ et $v_n = \ln(b_n)$, donc $a_n = e^{u_n}$ et $b_n = e^{v_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ (question 4.(a)), on a par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^{\ell}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = e^{\ell}$. Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite commune $L = e^{\ell} > 0$.

5. (a) Pour tout entier naturel n,

$$w_{n+1} = a_{n+1} \times b_{n+1} = a_n^{2/5} \times b_n^{3/5} \times a_n^{3/5} \times b_n^{2/5} = a_n \times b_n = w_n.$$

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $w_0 = a_0 \times b_0$.

(b) On a donc, pour tout entier naturel n, $w_n = a_0 \times b_0$, c'est-à-dire $a_n \times b_n = a_0 \times b_0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$ (question 4.(b)), on a par passage à la limite dans l'égalité $a_n \times b_n = a_0 \times b_0$, $L \times L = a_0 \times b_0$ donc $L^2 = a_0 b_0$ donc $L = \sqrt{a_0 b_0}$.

(c) Voici le programme pour calculer une approximation de $L = \sqrt{2}$ à ε près :

```
epsilon=input('Donner une valeur pour epsilon')
a=1
b=2
while abs(b-a)>epsilon do
    x=a
    y=b
    a=x^(3/5)*y^(2/5)
    b=x^(2/5)*y^(3/5)
end
disp(b,a)
```

Exercice 2

1. (a) f est définie, continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

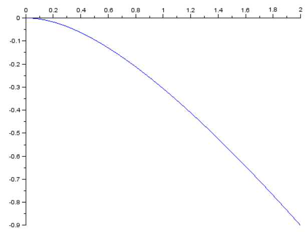
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

(b) D'après le tableau de variation de f, f admet un maximum global en 0 qui vaut $f(0) = 0$. Donc :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) - x \leq 0.$$

(c) Voici les commandes pour tracer f et la courbe :

```
-->function y=f(x)
-->y=ln(1+x)-x
-->endfunction
-->x=0:0.01:2;
-->plot(x,f)
```



2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la question 1.(b) pour $x = -\dfrac{1}{n+1} \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0,$$

en utilisant la question précédente pour la dernière inégalité. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la question 1.(b) pour $x = \dfrac{1}{n+1} \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(n+2) - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

En multipliant cette dernière inégalité par -1, on a bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0,$$

en utilisant la question précédente pour la dernière inégalité. La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = -\ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right). \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ donc, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \ln(1) = 0$.

(b) On a démontré que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante (question 2.(b)), que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante (question 3.(b)) et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ (question 4.(a)). Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite ℓ.

(c) Voici le programme permettant d'obtenir une approximation de ℓ à ε près :

```
epsilon=input('Donner epsilon : ')
n=1 //on initialise n par 1, rang du premier terme de u et v
S=1 //on initialise S par la valeur de la somme pour n=1
u=1 //on initisalise u par la valeur de u_1
v=1-log(2) //on initialise v par la valeur de v_1
while abs(u-v)>epsilon do
    n=n+1 //on calcule le rang suivant
    S=S+1/n //on ajoute un terme dans la somme
    u=S-log(n) //on calcule le terme suivant de la suite u
    v=S-log(n+1) //on calcule le terme suivant de la suite v
end
disp(v,u)
```

Exercice 3

1. (a) On pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien définie et $u_n \geq 1$.

Initialisation : $u_0 = 2 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que u_n est bien définie et $u_n \geq 1$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée, c'est-à-dire que u_{n+1} est bien définie et que $u_{n+1} \geq 1$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$, donc $2 + u_n \geq 3$. En particulier, $2 + u_n \neq 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$ est donc bien définie.

De plus, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{2+u_n}$. Comme $u_n - 1 \geq 0$ et $2 + u_n \geq 3$ (par hypothèse de récurrence), $u_{n+1} - 1 \geq 0$ et donc $u_{n+1} \geq 1$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, on a donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 1$.

(b) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Tout d'abord, $\ell \geq 1$ car, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$ (question précédente).

De plus, par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{1+2\ell}{2+\ell} \Leftrightarrow \ell - \frac{1+2\ell}{2+\ell} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell(2+\ell)-(1+2\ell)}{2+\ell} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell^2-1}{2+\ell} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ell^2 - 1 = 0 \\ 2+\ell \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 1 \text{ ou } \ell = -1 \\ 2+\ell \neq 0 \end{cases} \underset{\ell\geq 1}{\Leftrightarrow} \ell = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers 1.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - 1}{\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} + 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3}\frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{1}{3}v_n.$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

(b) $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{u_n-1}{u_n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad (u_n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(u_n+1) \Leftrightarrow u_n\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}.\end{aligned}$$

(c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. (a) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x} - x = \dfrac{-x^2+1}{2+x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{2+x}$. On obtient le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$1-x$		+		+		+	0	−	
$1+x$		−		−	0	+		+	
$2+x$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		+	||	−	0	+	0	−	

(b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$. Or, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$ (question 1) donc $f(u_n) \leq 0$ d'après le tableau de signe de la question précédente.

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite finie ℓ. Et d'après la question 1.(b), $\ell = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. (a) Voici la procédure qui permet de calculer u_n :

```
n=input("Donner n : ")
u=2
for k=1:n do
    u=(1+2*u)/(2+u)
end
disp(u)
```

(b) Voici la procédure qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 1| \leq \varepsilon$:

```
eps=input("Donner epsilon : ")
u=2
n=0
while abs(u-1)>eps do
    n=n+1
    u=(1+2*u)/(2+u)
end
disp(n)
```

Exercice 4

1. (a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g'(x) = e^x + 2 > 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

(b) $g(0) = 0$ et d'après le tableau de variation de g, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) $f(x)$ est définie si $e^x + 2x - 1 > 0$, c'est-à-dire si $g(x) > 0$. D'après la question 1.(b), f est donc définie sur $]0, +\infty[$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 2x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to0^+} (e^x + 2x - 1) = 0^+$ (avec la question 1.(c)) et $\lim\limits_{X\to0^+} \ln(X) = -\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.
On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(c) f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues et dérivables.
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 2x - 1} = \dfrac{e^x + 2}{g(x)}$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $e^x + 2 > 0$ et $g(x) > 0$ (toujours d'après la question 1.(c)). On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

(d) f est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (c'est l'unique antécédent de 0 par f).
Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

(e) $f(\frac{1}{4}) = \ln(e^{1/4} + 2 \times \frac{1}{4} - 1) = \ln(e^{1/4} - \frac{1}{2})$. Comme $e^{1/4} \simeq 1.28$, $e^{1/4} - \frac{1}{2} \simeq 0.78$. En particulier, $e^{1/4} - \frac{1}{2} \in]0, 1[$, donc $f(\frac{1}{4}) = \ln(e^{1/4} - \frac{1}{2}) < 0$.
$f(\frac{1}{2}) = \ln(e^{1/2} + 2 \times \frac{1}{2} - 1) = \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2} > 0$.

Ainsi, $f(\frac{1}{4}) < f(\alpha) < f(\frac{1}{2})$. Comme f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

3. (a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln(e^x+2x-1)}{x} = \frac{\ln(e^x(1+2xe^{-x}-e^{-x}))}{x} = \frac{\ln(e^x)+\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})}{x} \\ &= \frac{x+\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})}{x} = 1+\frac{\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})}{x}. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2xe^{-x}-e^{-x}) = 1$ par croissance comparée, et $\lim\limits_{X\to 1}\ln(X) = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x}) = 0$.

Par quotient des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ et donc $a = 1$.

(b) En reprenant le calcul précédent, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x)-x = \ln(e^x+2x-1)-x = x+\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})-x = \ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})$$

On a démontré à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x}) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

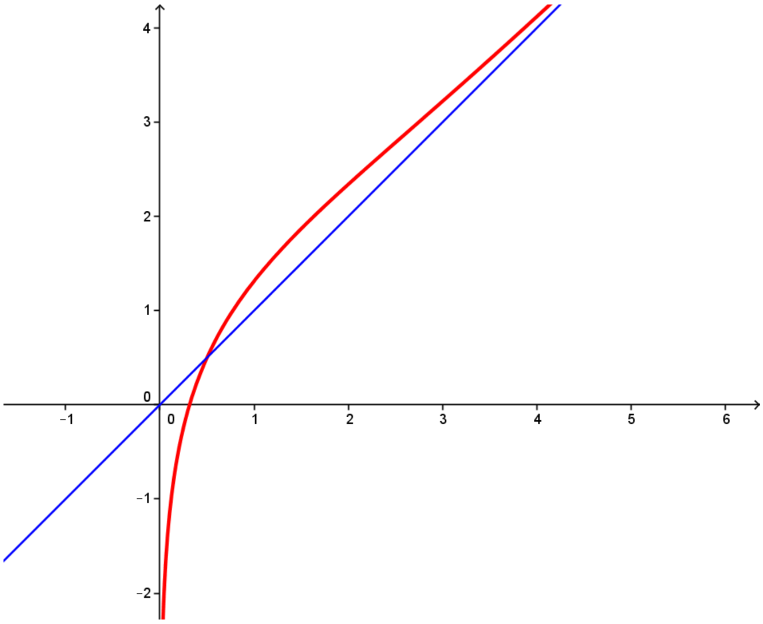
(c) On étudie le signe de $f(x)-x$:

$$\begin{aligned} f(x)-x \geq 0 &\Leftrightarrow \ln(1+2xe^{-x}-e^{-x}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exp(\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})) \geq \exp(0) \\ &\Leftrightarrow 1+2xe^{-x}-e^{-x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-x}(2x-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

en utilisant que la fonction exponentielle est croissante à la deuxième équivalence et que, pour tout x, $e^{-x} > 0$ à la cinquième.

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ sur $[\frac{1}{2},+\infty[$ et en dessous de Δ sur $]0,\frac{1}{2}]$ ($\mathscr{C}_f$ et Δ se coupent en $\frac{1}{2}$).

4. Voici le tracé de $\mathscr{C}_f$ et de Δ :



Exercice 5

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "u_n et v_n sont bien définis et $0 < u_n < v_n$".

   Initialisation : Par hypothèse, $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ donc u_0 et v_0 sont bien définis et $0 < u_0 < v_0$.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

   Par hypothèse de récurrence, $0 < u_n < v_n$, donc $u_n + v_n > 0$. On en déduit que $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}$ sont bien définis (car le dénominateur est non nul).
   De plus, comme $0 < u_n < v_n$ (hypothèse de récurrence) et que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 < u_n^2 < v_n^2$. En divisant par $u_n + v_n > 0$, on obtient :

   $$0 < \frac{u_n^2}{u_n + v_n} < \frac{v_n^2}{u_n + v_n},$$

   c'est à dire $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont bien définis et $0 < u_n < v_n$.

2. Voici la procédure pour calculer u_n et v_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
u=1
v=2
for k=1:n do
    x=u
    y=v
    u=(x^2)/(x+y)
    v=(y^2)/(x+y)
end
disp(v,u)
```

3. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{-u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

D'après la question 1, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, toujours avec la question 1, elle est minorée par 0. D'après le théorème des suites monotones, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite finie ℓ_1.

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - v_n = \frac{v_n^2 - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{-v_n u_n}{u_n + v_n}.$$

D'après la question 1, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$. Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, toujours avec la question 1, elle est minorée par 0. D'après le théorème des suites monotones, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite finie ℓ_2.

(c) On a démontré que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < v_n$, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2. Par passage à la limite dans les inégalités (rappelons que les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite), on a donc $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2$.

4. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$v_n - u_n = 1$".
<u>Initialisation</u> : Par hypothèse, $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ donc $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$.
<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.
Par hypothèse de récurrence, $v_n - u_n = 1$. Alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - \frac{u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n^2 - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(v_n - u_n)(v_n + u_n)}{u_n + v_n} = v_n - u_n = 1.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.
<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = 1$.

(b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2, on a par passage à la limite dans l'égalité obtenue à la question précédente, $\ell_2 - \ell_1 = 1$, donc $\ell_2 = 1 + \ell_1$.

(c) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \Leftrightarrow u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$. En passant à la limite dans cette dernière relation, on obtient :

$$\ell_1(\ell_1 + \ell_2) = \ell_1^2 \Leftrightarrow \ell_1^2 + \ell_1\ell_2 = \ell_1^2 \Leftrightarrow \ell_1\ell_2 = 0.$$

Or, on a démontré à la question précédente que $\ell_2 = 1 + \ell_1$. Donc on obtient $\ell_1(1 + \ell_1) = 0$, donc $\ell_1 = 0$ ou $\ell_1 = -1$. Or d'après la question 3.(c), $\ell_1 \geq 0$. Donc $\ell_1 = 0$. Comme $\ell_2 = 1 + \ell_1$, on obtient $\ell_2 = 1$.
