Correction - DM 1

A rendre le Vendredi 13 Septembre

Exercice 1 (ECRICOME 2005)

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et sommes de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

   D'autre part, d'après les croissances comparées on a
   $$x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$
   donc
   $$f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \xrightarrow[x \to 0^+]{} -1 = f(0).$$
   Donc f est continue à droite en 0 et donc sur $\mathbb{R}_+$.

2. On calcule le taux d'accroissement en 0 :
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x - \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$
   donc f n'est pas dérivable en 0.

   Comme le taux d'accroissement a une limite infinie, la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale en 0.

3. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et sommes de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$f'(x) = 2x - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - \ln x - 1,$$
   puis
   $$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$
   qui est du signe de $2x - 1$ car $x > 0$. Or $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ donc $f''(x) \leq 0$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et f y est concave, et $f''(x) \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et f y est convexe. On a un point d'inflexion en $x = \frac{1}{2}$.

   On en déduit que f' est décroissante puis croissante donc admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$, valant
   $$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln 2 > 0$$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

   Enfin, on cherche la limite de f en $+\infty$:
   $$f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$
   car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées, puis par somme et produit de limites.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	
$f'(x)$	||		$+$		
$f(x)$	|| -1		$\nearrow$		$+\infty$

4. Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-1,+\infty[= J$.

5. On échange le rôle de x et y dans le tableau de variation de f, on obtient :

x	-1	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to-1} f^{-1}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

6. (a) La commande `x = np.linspace(0.01,4,400)` crée un vecteur ligne de 400 valeurs régulièrement espacée entre 0.01 et 4.

   Le programme trace un graphe approché de la courbe de f sur l'intervalle $[0.01, 4]$ à l'aide de 400 points.

   (b) On remarque que la courbe tend bien vers $-1 = f(0)$ lorsque x tend vers 0 : f est bien continue en 0.

   On remarque que la pente de la courbe est verticale au voisinage de 0 (c'est pas forcément évident sur le graphique...) : il y a bien une demi-tangente verticale à droite en 0.

   On remarque que la courbe de f est au dessus de ses cordes (et au dessous de ses tangentes) sur $[0, 1/2]$: f est donc concave sur $[0, 1/2]$ et sa courbe est au dessous de ses cordes (et au dessus de ses tangentes) sur $[1/2, +\infty[$: f est donc convexe sur $[1/2, +\infty[$.

   (c) L'instruction `plt.plot(y,x)` renverse l'ordre des abscisses et des ordonnées : à chaque valeur $y = f(x)$ en abscisse, on associe en ordonnée l'unique antécédent x de y par f : c'est la définition de la bijection réciproque de f. Cette instruction trace donc la courbe de f^{-1}.

   (d) La courbe obtenue est bien symétrique à la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

7. (a) Pour tout entier naturel k, $k \in]-1, +\infty[= J$ donc il existe un unique $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_k) = k$ (car f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]-1, +\infty[$).

   Comme de plus $f(0) = -1 \neq k$, ce x_k est unique sur $\mathbb{R}_+$ (car le seul point supplémentaire, 0, n'est pas une solution de l'équation $f(x) = k$).

   (b) x_0 est l'unique solution de $f(x) = 0$. Comme $f(1) = 0$ alors $x_0 = 1$.

   (c) Comme
$$f(1,5) < 1 = f(x_1) < f(2) < 2 = f(x_2) < f(2,5)$$
   (avec le tableau de valeurs de f) et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que tous les termes en sont éléments alors :
$$1,5 < x_1 < 2 < x_2 < 2,5$$

   (d) Comme f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans J, $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in J$ alors :
$$f(x_k) = k \iff x_k = f^{-1}(k).$$
   Et comme f^{-1} est croissante sur J, pour tout entier k, comme $k < k+1$ alors :
$$f^{-1}(k) < f^{-1}(k+1) \qquad \text{et} \qquad x_k < x_{k+1}$$

Donc la suite (x_k) est croissante.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ alors :

$$x_k = f^{-1}(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

8. (a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2+x}{x^2}.$$

qui est du signe de $-2+x$, donc strictement négative sur $]0,2[$, nulle en 2 et strictement positive sur $]2,+\infty[$ donc φ est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

(b) Comme φ est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$, alors :

$$\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) = \left[\varphi(2);\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right] \simeq [1,69\ ;\ 1,73] \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$$

(c) φ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{4-x}{x^3}$$

donc $\varphi''(x) \geq 0$ sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$.

Donc φ' est croissante sur l'intervalle et si

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \text{alors} \quad \varphi'\left(\frac{3}{2}\right) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(2) \quad \text{soit} \quad -\frac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0 \leq \frac{2}{9}$$

et donc :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2},2\right], \quad \left|\varphi'(x)\right| \leq \frac{2}{9}.$$

(d) Tout d'abord, remarquons que 0 n'est solution ni pour l'une ni pour l'autre. Et pour tout $x > 0$:

$$x = \varphi(x) \iff \frac{2}{x} + \ln(x) = x \iff 2 + x\ln(x) = x^2 \iff x^2 - x\ln(x) - 1 = 1 \iff f(x) = 1.$$

Or $f(x) = 1$ a pour unique solution x_1 donc $x = \varphi(x)$ également.

(e) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation</u> : $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[\frac{3}{2},2\right]$ donc $\varphi(u_n) \in \left[\frac{3}{2},2\right]$ d'après 8.(b) et $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

(f) On vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis :

- φ est dérivable sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ car de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$ pour tout $x \in \left[\frac{3}{2},2\right]$.

On en déduit alors : pour tout $(a,b) \in \left[\frac{3}{2};2\right]^2$,

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \frac{2}{9}|b-a|$$

On choisit $a = x_1 \in \left[\frac{3}{2},2\right]$ (d'après 7.(c)) et on choisit $b = u_n \in \left[\frac{3}{2},2\right]$ (d'après 8.(e)). On a alors :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$$

et comme $\varphi(x_1) = x_1$ on a bien alors :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|.$$

(g) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation</u> : Comme $u_0 = \frac{3}{2} \leq x_1 \leq 2$, alors

$$0 \leq x_1 - u_0 \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad |u_0 - x_1| \leq \frac{1}{2} \leq 1 = \left(\frac{2}{9}\right)^0.$$

et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée. Par hypothèse de récurrence, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$. Alors :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1| \leq \frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$$

car $\frac{2}{9} \geq 0$. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : Par récurrence, pour tout entier naturel n, $0 \leq |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

(h) Comme $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$, $\left(\frac{2}{9}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par encadrement (une valeur absolue est toujours positive) $|u_n - x_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_1$.

(i) Il suffit que l'on ait $\left(\frac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-4}$ pour avoir $|u_n - x_1| \leq 10^{-4}$.
Résolvons donc l'inéquation :

$$\left(\frac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow e^{n\ln(2/9)} \leq e^{-4\ln(10)} \Leftrightarrow n\ln(2/9) \leq -4\ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(2/9)},$$

car $\ln(2/9) < 0$.
Comme $\dfrac{-4\ln(10)}{\ln(2/9)} \notin \mathbb{N}$, l'inéquation est vérifiée à partir de l'entier $N = \lfloor \dfrac{-4\ln(10)}{\ln(2/9)} \rfloor + 1$.

(j) Voici le programme `Python` correctement complété :

```
def phi(x):
    return 2/x + np.log(x)

N = np.floor(-4*np.log(10)/np.log(2/9))+1
U = 3/2
for n in range(1,N+1) :
    U = phi(U)

print('U = ', U)
```

Le programme donne le résultat suivant `U = 1.70644`. On sait d'après la question 8.(i) que :

$$|u_N - x_1| \leq 10^{-4} = 0,0001 \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_N - 0,0001 \leq x_1 \leq u_N + 0,0001.$$

Donc la valeur exacte de x_1 est comprise entre $1,70634$ et $1,70654$.

Exercice 2 (EDHEC 2001)

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k; k+1]$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}+^*$:

$$k \leq t \leq k+1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

On intègre l'inégalité de gauche avec des bornes rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$$

et enfin comme $\dfrac{1}{k+1}$ est une constante,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$$

2. On somme ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^n = \ln(n)$$

Enfin on effectue un changement d'indice dans la somme et on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = v_n - \frac{1}{1} \leq \ln(n) \quad \text{donc} \quad v_n \leq \ln(n) + 1.$$

3. (a) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien défini et $u_n > 0$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : u_0 et définie et $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$. Alors $\frac{1}{u_n}$ existe donc u_{n+1} également et par quotient de signes,

$$\frac{1}{u_n} > 0 \quad \text{et} \quad u_n > 0 \quad \text{donc par somme} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0.$$

et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et $u_n > 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0 \quad \text{car} \quad u_n > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante (strictement).

4. (a) On a (on pouvait aussi développer le carré et simplifier) :

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k} + u_k\right) \times \left(u_k + \frac{1}{u_k} - u_k\right) \\ &= \frac{1}{u_k} \times \left(2u_k + \frac{1}{u_k}\right) = 2 + \frac{1}{u_k^2}. \end{aligned}$$

(b) On somme les égalités de la question 2)a) pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(2 + \frac{1}{u_k^2}\right)$$

On remarque le télescopage pour calculer la somme de gauche, et à droite on sépare en deux sommes et on calcule la première, évidente :

$$u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$$

et enfin on ajoute 1 des deux côtés, et comme $u_0 = 1$:

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}.$$

(c) Un carré est toujours positif, et la somme de termes positifs est toujours positive donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} \geq 0$$

puis on ajoute $2n+1$:

$$2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = u_n^2 > 2n + 1.$$

Par comparaison puis en composant par la racine carrée avec $u_n > 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{u_n^2} = \lim_{n\to+\infty}|u_n| = \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

5. (a) L'astuce est d'utiliser la majoration de u_n^2 pour minorer $\frac{1}{u_n^2}$ et donc minorer la somme dans l'expression de u_n^2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ (on part de $k = 1$ comme dans v_{n+1}), on a par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$u_k^2 \geq 2k + 1 \geq 2k \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2k}$$

donc en sommant ces inégalités, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}v_{n-1}$$

puis en rajoutant $\frac{1}{u_0^2} = 1$ et $2n+1$, on obtient :

$$u_n^2 = 2n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}.$$

(b) Pour tout $n \geq 2$, $n - 1 \geq 1$ donc en appliquant la partie I on a :

$$v_{n-1} \leq \ln(n-1) + 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2}v_{n-1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

On ajoute $2n+2$ et on obtient :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1} \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1).$$

(c) On a obtenu l'encadrement suivant de u_n^2 pour tout $n \geq 2$:

$$2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

et pour obtenir l'équivalent souhaité de u_n, on compose par la racine carrée (tous les termes sont strictement positifs et $|u_n| = u_n$) puis on divise par $\sqrt{2n}$:

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \frac{\sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)}}{\sqrt{2n}}.$$

On cherche alors les limites des deux côtés de l'encadrement :

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2n}} = \sqrt{1+\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{1+0} = 1.$$

et de l'autre côté, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)}}{\sqrt{2n}} &= \sqrt{\frac{2n\left(1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n-1)}{2n}\right)}{2n}} = \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln\left(n\left[1-\frac{1}{n}\right]\right)}{2n}} \\
&= \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2n}} \\
&= \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{2n}}
\end{aligned}$$

Or par quotient de limites

$$\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et par croissances comparées

$$\frac{\ln(n)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc par produit, puis somme, composée de limites :

$$\frac{\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis

$$1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et enfin

$$\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc les deux côtés de l'encadrement ont pour limite 1 en $+\infty$, donc le terme du milieu aussi par encadrement, ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1 \quad \text{donc} \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

6. On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel n.

   On affecte la valeur u_n à `u`. On calcule les termes de u_1 à u_n (`for k in range(1,n+1):`).

```python
n = input('Donner n : ')
u = 1
for k in range(1,n+1) :
  u = u + 1/u
print(u)
```

7. (a) On calcule u_n et n tant que $u_n < 100$.

```python
n = 0
u = 1
while u < 100 :
  n = n + 1
  u = u + 1/u
print(n)
```

   (b) Avec les propriétés du logarithme, on a :

$$\ln(5000) = \ln(5^4 2^3) = 4\ln(5) + 3\ln(2) < 4 \times 1,61 + 3 \times 0,70 = 8,54.$$

   Donc $\ln(5000) < 8,54$.

   (c) Comme la suite (u_n) est croissante (question 3.(b)), il faut déterminer n tel que $u_n \geq 100$ et $u_{n-1} < 100$.

   Or, on a l'encadrement : $2n+1 \leq u_n^2 \leq 2n + \dfrac{5}{2} + \dfrac{\ln(n-1)}{2}$. Alors :

   - Pour $n = 4994$: On a $\ln(n-1) < \ln(5000)$ (par croissance du logarithme) donc $2n + \dfrac{5}{2} + \dfrac{\ln(n-1)}{2} < 9988 + 2,5 + 8,54 < 10000$.
     Donc $(u_{4994})^2 < 10000$ et $u_{4994} < 100$ (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). Donc la valeur recherchée est strictement supérieure à 4994.
   - Pour $n = 5000$, on a $2n+1 = 10001 > 10000$ donc $(u_{5000})^2 > 10000$ et $u_{5000} > 100$ (toujours par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). Donc la valeur recherchée est inférieure ou égale à 5000.

   Ainsi, n est compris entre 4995 et 5000.

Exercice 3 (EDHEC 2007)

1. (a) On pose $g : x \mapsto x - \ln(x)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

   qui est négative pour $x \leq 1$ et positive pour $x \geq 1$ et ne s'annule qu'en $x = 1$.

   g est donc strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et admet un minimum en 1, égal à

$$g(1) = 1 - \ln 1 = 1$$

   et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) \geq g(1) = 1 > 0$$

(b) On en déduit que le dénominateur $x - \ln(x)$ ne s"annule pas dur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0, donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

2. (a) f est continue sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

En 0 on a :

$$f(x) = \frac{\ln x}{-\ln(x)\left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{0-1} = -1 = f(0)$$

par opérations élémentaires sur les limites, et f est continue en 0.

f est donc continue sur $D = \mathbb{R}_+$.

(b) On a calcule pour $x > 0$,

$$T_0 = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \frac{\frac{\ln x + x - \ln x}{x - \ln x}}{x} = \frac{1}{x - \ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$.

3. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \ln x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

(b) On factorise le numérateur par le terme prépondérant :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0}{1-0} = 0$$

car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

(c) On étudie le signe de f' sur $]0;+\infty[$; comme le dénominateur est un carré, il est positif et f' est du signe de $1 - \ln x$, donc strictement positive pour $0 < x < e$, strictement négative pour $x > e$ et nulle pour $x = e$. :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	‖

4. On cherche les valeurs où f s'annule pour conclure avec le tableau de variation : on résout l'équation $f(x) = 0$.

- Pour $x = 0$, on a $f(0) = -1 \neq 0$.

- pour $x \neq 0$ on a
$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$$

On le rajoute dans le tableau de variation et on en déduit que $f(x) < 0$ pour $x < 1$, $f(x) = 0$ pour $x = 1$ et $f(x) > 0$ pour $x > 1$.

5. (a) Voici le programme `Python` correctement complété :

```
def f(x) :
    if x == 0 :
        return -1
    else :
        return np.log(x) / (x - np.log(x))

x = np.arange(0,10,0.1)
y = [f(t) for t in x]
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

(b) L'instruction `x  = np.arange(0,10,0.1)` renvoie un vecteur ligne x contenant la liste des réels de 0 à 10 avec un pas de $0,1$. C'est-à-dire : $x = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & \dots\dots\dots & 10 \end{pmatrix}$. On remarque que ce vecteur contient 101 coefficients.
Ainsi, si on voulait crée ce vecteur avec la commande `np.linspace`, il aurait fallu taper :

```
x = np.linspace(0,10,101)
```

car la commande `np.linspace(a,b,n)` crée un vecteur ligne contenant n nombre régulièrement espacées dans l'intervalle $[a, b]$.

(c) Ces instructions tracent la représentation graphique de la suite d_k définie par $d_k = f(1/k)$. Or on sait d'après la question 2.(a) que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. En posant $x = 1/k \to 0$ on a bien $\lim\limits_{k \to +\infty} f(1/k) = f(0) = -1$ par continuité de f.