

Correction - DM 10

**A rendre le Mardi 9 Janvier**

**Exercice 1 (EDHEC 2004)**

1. Pour tout  $t \in [0; 1]$ ,  $1 + t + t^n \geq 1 > 0$  ce qui assure la continuité de  $t \rightarrow \frac{1}{1 + t + t^n}$  sur  $[0; 1]$ .

L'intégrale est donc bien définie car elle n'est pas généralisée.

2. Par primitives directes,

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt = \left[ \ln|2+t| \right]_0^1 = \ln(3) - \ln(2)$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t} dt = \left[ \frac{1}{2} \ln|1+2t| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(3).$$

3. (a) Soit  $t \in [0, 1]$ . Par décroissance de l'inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , :

$$t^n \geq t^{n+1} \Rightarrow 1 + t + t^n \geq 1 + t + t^{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + t + t^n} \leq \frac{1}{1 + t + t^{n+1}}.$$

Par croissance de l'intégrale avec des bornes rangées dans l'ordre croissant,

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + t + t^n} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + t + t^{n+1}} dt \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}.$$

La suite  $(u_n)$  est croissante.

(b) Soit  $t \geq 0$ . Par décroissance de l'inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$t^n \geq 0 \Rightarrow 1 + t + t^n \geq 1 + t > 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + t + t^n} \leq \frac{1}{1 + t}.$$

On en déduit en intégrant cette inégalité avec des bornes dans l'ordre croissant que

$$u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \left[ \ln|1+t| \right]_0^1 = \ln(2).$$

(c)  $(u_n)$  est croissante et majorée donc, par le théorème des suites monotones,  $(u_n)$  converge.

4. (a) On se rappelle qu'on a rencontré que  $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$ . Donc on peut écrire par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt = \int_0^1 \frac{1+t+t^n - 1-t}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt. \end{aligned}$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \geq 0$ , on a :

$$1 + t + t^n \geq 1 \quad \text{et} \quad 1 + t \geq 1$$

donc par produit d'inégalités avec des termes tous positifs :

$$(1 + t + t^n) \times (1 + t) \geq 1$$

puis en passant à l'inverse décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et en multipliant par  $t^n \geq 0$  :

$$\frac{1}{(1 + t + t^n) \times (1 + t)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{t^n}{(1 + t) (1 + t + t^n)} \leq t^n$$

qu'on intègre sur  $[0, 1]$  avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$\ln(2) - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(c) La question 3.(b) donne  $\ln(2) - u_n \geq 0$  donc on obtient l'encadrement

$$0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

qui donne par encadrement, avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2) - u_n) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2).$$

5. (a)  $t \rightarrow \frac{1}{1+t+t^n}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  car  $1+t+t^n \geq 1 > 0$  sur cet intervalle.

L'intégrale est donc généralisée en  $+\infty$  et la fonction intégrée est positive.

Comme  $n \geq 2$ ,

$$\frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1}{t^n \left(1 + \frac{1}{t^{n-1}} + \frac{1}{t^n}\right)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$$

car  $n \geq 2$  et  $n-1 \geq 1$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{n-1}} = 0$ .

Or l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$  est une intégrale de Riemann en  $+\infty$ , convergente car  $n \geq 2 > 1$ , et est également l'intégrale d'une fonction positive.

Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale définissant  $v_n$  est convergente et  $v_n$  est bien définie.

(b) Pour tout  $t \geq 1$ , on a par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$1+t+t^n \geq t^n > 0 \quad \text{donc} \quad 0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}$$

et en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant (toutes les intégrales sont bien convergentes) :

$$0 \leq v_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$

et on calcule cette dernière intégrale en revenant à l'intégrale partielle : pour  $x \geq 1$ ,

$$\int_1^x \frac{1}{t^n} dt = \left[ \frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{n-1} \quad \text{et enfin} \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

(c) Par théorème de comparaison, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ ,  $(v_n)$  converge vers 0.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ln(2) + 0 = \ln(2).$$

### Exercice 2 (EDHEC 2003)

1. (a) On passe par l'intégrale partielle : pour tout  $y \geq n$ , on a :

$$\int_n^y f(x) dx = - \int_n^y -\frac{1}{x^2} e^{1/x} dx = - \left[ e^{1/x} \right]_n^y = -e^{1/y} + e^{1/n} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} e^{1/n} - 1$$

car  $\frac{1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$  donc  $e^{1/y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 1$  (par continuité de exp). On en déduit que l'intégrale  $I_n$  converge, et

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx = e^{1/n} - 1.$$

(b) Comme  $u = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on a  $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$  donc  $I_n = e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$ .

2. On procède par théorème de comparaison et on cherche un équivalent simple de  $u_n$  :

$$u_n = f(n) = \frac{e^{1/n}}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

car  $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{e} 1$  (par continuité de exp).

Or les deux séries sont à termes positifs et la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge (série de Riemann avec  $\alpha > 1$ ), donc le théorème de comparaison assure que la série de terme général  $u_n = f(n)$  converge.

3. (a) Ce type d'inégalité, très classique, repose sur la monotonie de  $f$  :

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$  comme quotient et composée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , avec  $x^2 \neq 0$  sur cet intervalle. De plus, pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x} \times x^2 - 2xe^{1/x}}{x^4} = \frac{e^{1/x}}{x^4} (-1 - 2x) < 0 \quad \text{sur } ]0; +\infty[$$

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

On en déduit que pour tout  $k > 0$  et pour tout  $x \in [k; k + 1]$ ,

$$f(k + 1) \leq f(x) \leq f(k)$$

et en intégrant cette inégalité sur  $[k; k + 1]$  (les bornes sont dans l'ordre croissant) on obtient :

$$\int_k^{k+1} f(k + 1) \, dx \leq \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq \int_k^{k+1} f(k) \, dx$$

qui donne enfin :

$$f(k + 1) \leq \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq f(k)$$

car

$$\int_k^{k+1} dx = (k + 1) - k = 1.$$

(b) On somme ces inégalités pour  $k$  allant de  $n$  à  $p$  où  $p$  est un entier quelconque supérieur à  $n + 1$  :

$$\sum_{k=n}^p u_{k+1} \leq \sum_{k=n}^p \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq \sum_{k=n}^p u_k.$$

Cela donne après un changement d'indice dans la première somme et par relation de Chasles pour les intégrales :

$$\sum_{k=n+1}^p u_k \leq \int_n^{p+1} f(x) \, dx \leq u_n + \sum_{k=n+1}^p u_k.$$

On fait alors tendre  $p$  vers  $+\infty$ , et comme les deux séries et l'intégrale convergent (questions 1 et 2) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \int_n^{+\infty} f(x) \, dx \leq \frac{e^{1/n}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Enfin on reconnaît  $I_n$  :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \frac{e^{1/n}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

(c) On pose  $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  et on cherche à l'encadrer. L'inégalité de gauche donne

$$v_n \leq I_n$$

et celle de droite donne

$$v_n \geq I_n - \frac{e^{1/n}}{n^2}$$

donc on obtient l'encadrement :

$$I_n - \frac{e^{1/n}}{n^2} \leq v_n \leq I_n.$$

Pour obtenir un équivalent on va chercher à encadrer par deux quantités qui tendent vers 1, on divise donc cette inégalité par  $I_n$ , strictement positif :

$$1 - \frac{e^{1/n}}{I_n n^2} \leq \frac{v_n}{I_n} \leq 1.$$

On cherche la limite du terme de gauche :

$$I_n \sim \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \frac{e^{1/n}}{I_n n^2} \sim \frac{e^{1/n}}{\frac{1}{n} n^2} = \frac{e^{1/n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par quotient de limites, car par composée  $e^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$  (par continuité de exp).

On en déduit que

$$1 - \frac{e^{1/n}}{I_n n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

puis par théorème d'encadrement

$$\frac{v_n}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{donc} \quad v_n \underset{+\infty}{\sim} I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et enfin :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

#### 4. Informatique:

(a) On fait des produits et des quotients termes à termes sur des vecteurs. Le coefficient d'indice  $n$  de la matrice  $\mathbf{np.ones}(1000)$  étant 1, et celui de la matrice  $\mathbf{k}$  étant  $n + 1$ , le coefficient d'indice  $n$  de la matrice  $\mathbf{U}$  est donc  $U(n) = \frac{e^{1/(n+1)}}{(n+1)^2}$ .

(b)  $\mathbf{S}$  fait la somme cumulée des termes de  $\mathbf{U}$  donc  $S(n) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{e^{1/k}}{k^2}$ .

(c)  $R(n) = \sum_{k=1}^{1000} \frac{e^{1/k}}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{e^{1/k}}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{1000} \frac{e^{1/k}}{k^2}$ .

(d) On admet que  $R(n) \simeq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$ .

On trace donc (une valeur approchée) des 100 premiers termes de la suite  $(v_n)$  de la question 3.(c). On remarque que le comportement de cette suite coïncide au voisinage de  $+\infty$  avec celui de la suite  $(\frac{1}{n})$  ce qui illustre l'équivalent obtenu à la question 3.(c).

**Exercice 3 (EDHEC 2012)**

1. Par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 \times \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

On pose alors la fonction  $g(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  et on dérive ses 2 expressions (dérivable en tant que polynôme) :

- $g(x) = \sum_{k=0}^n x^k$  donc  $g'(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1}$  ;
- $g(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  donc  $g'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ .

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

2. Loi de  $T_n$

- (a) Si  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $(T_n = k)$  signifie qu'on a lancé  $k \leq n - 1$  fois la pièce avant de s'arrêter. On n'a donc pas pu obtenir  $n$  faces, et on s'est arrêté sur un pile. Enfin les lancers précédents ne peuvent pas avoir donné pile, sinon on se serait arrêté après. D'où, si  $k \geq 2$ ,

$$P(T_n = k) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) = q^{k-1}p$$

par indépendance des lancers,

et si  $k = 1$ ,

$$P(T_n = 1) = P(P_1) = p = q^0p$$

donc la formule ci-dessus est encore valable.

- (b)  $(T_n = n)$  peut avoir été obtenu de deux manières : avec  $n$  fois face ou avec  $n - 1$  fois face et une fois pile. On a donc :

$$P(T_n = n) = P((F_1 \cap \dots \cap F_n) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)) = P(F_1 \cap \dots \cap F_n) + P(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

par incompatibilité, puis :

$$P(T_n = n) = q^n + q^{n-1}p = q^{n-1}(q + p) = q^{n-1}$$

par indépendance des lancers.

- (c) Dans la somme, il faut isoler la valeur  $k = n$  qui n'a pas la même formule que les autres :

$$\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = p \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} + q^{n-1} = p \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^{n-1} = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1.$$

- (d)  $T_n$  étant finie, elle a une espérance et :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= p \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1} = p \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} + nq^{n-1} \\ &= \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

3. Loi de  $X_n$ .

(a) Lors des lancer, on a ou bien  $k$  Face puis un Pile et on s'arrête, ou bien  $n$  face et aucun pile et on s'arrête. Donc  $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$  avec  $(X_n = 0) = F_1 \cap \dots \cap F_n$  donc par indépendance des lancers,  $P(X_n = 0) = q^n$ .

Donc  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - q^n)$ .

(b)  $X_n$  admet donc une espérance et  $E(X_n) = 1 - q^n$ .

4. Loi de  $Y_n$ .

(a) Pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $(Y_n = k)$  signifie que l'on a eu  $k$  Face (donc pas  $n$ ) et donc ensuite un Pile, ce qui donne en écriture mathématique :

$(Y_n = k) = F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$  donc par indépendance des lancers,  $P(Y_n = k) = q^k p$ .

(b)  $(Y_n = n)$  signifie que l'on a eu  $n$  Face donc aucun pile (il ne peut y avoir plus de  $n$  lancers) d'où :  $(Y_n = n) = F_1 \cap \dots \cap F_n$  et par indépendance,  $P(Y_n = n) = q^n$ .

(c) Le nombre total de lancer est le nombre total de Pile et de Face obtenus donc  $T_n = X_n + Y_n$  donc la linéarité de l'espérance donne :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(T_n) - E(X_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q} - (1 - q^n) = (1 - q^n) \left( \frac{1}{1 - q} - 1 \right) \\ &= (1 - q^n) \frac{1 - 1 + q}{1 - q} = (1 - q^n) \frac{q}{1 - q}. \end{aligned}$$

5. (a) Voici la fonction complétée :

```

1 def simul(n,p):
2     t = 0
3     x = 0
4     y = 0
5     while (x==0) and (t<n):
6         t = t+1
7         if rd.random()>p:
8             y = y+1
9         else:
10            x = x+1
11            return [t, x, y]
```

(b) Les termes  $p_k$  vérifient :  $p_0 = p$  et  $\forall k \in \llbracket 1; n - 2 \rrbracket$ ,  $p_k = (1 - p)p_{k-1}$  donc suivent une relation de suite géométrique de raison  $1 - p$ . On a donc  $p_k = p(1 - p)^k$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n - 2 \rrbracket$ .

Enfin,  $p_{n-1} = \frac{(1 - p)}{p} p_{n-2} = \frac{(1 - p)}{p} p q^{n-2} = (1 - p)^{n-1}$ .

Cette fonction renvoie donc la loi (théorique) de la variable  $T_n$ .

(c) Ce programme mémorise 1000 simulations de la variable  $T_n$  dans la liste **T** puis il calcule les effectifs par modalité avec la fonction **count** et les mémorise dans une liste **E**. Il renvoie donc les effectifs correspondants à chaque modalité (de 1 à  $n$ ).

La fréquence de l'évènement ( $T_n = 5$ ) au cours des 1000 simulations est donc

$$f = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} = 0,073.$$

(d) Le diagramme des fréquences de  $T_n$  sur 1000 simulations est très proche de la loi théorique de  $T_n$ . On retrouve la propriété : la fréquence d'un évènement  $A$  sur un grand nombre de simulations converge vers la probabilité mathématique de  $A$ .