Correction - DM 11

A rendre le Mercredi 17 Janvier

Exercice 1 (ECRICOME 2010)

1. On commence par E_1, qu'on écrit comme une union incompatible en se ramenant au couple (D_1, D_2) :

$$E_1 = (D_1 < D_2) = \bigcup_{i=2}^{6} ([D_1 < i] \cap [D_2 = i])$$

donc par incompatibilité puis avec l'indépendance des variables D_1 et D_2 et le changement d'indice $j = i - 1$:

$$P(E_1) = \sum_{i=2}^{6} P(D_1 < i)P(D_2 = i) = \sum_{i=2}^{6} \frac{i-1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \sum_{j=1}^{5} j = \frac{5 \times 6}{36 \times 2} = \frac{5}{12}.$$

De même

$$P(E_2) = \sum_{i=1}^{6} P\left[(D_1 = i) \cap (D_2 = i)\right] = \sum_{i=1}^{6} P(D_1 = i) \times P(D_2 = i) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

et comme (E_1, E_2, E_3) est un système complet d'événements,

$$P(E_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$

On pouvait aussi dire que $P(E_1) = P(E_3)$ par symétrie des deux dés d'où $2P(E_1) = 1 - \frac{1}{6}$.
Il était également possible dénombrer dans un tableau exhaustif de $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ dont les éléments sont équiprobables :

$D_1 \backslash D_2$	1	$2 \cdots$		6
1	$=$	$<$	$\cdots$	$<$
2	$>$	$=$		
6	$>$	$>$		$=$

où l'on retrouve les 6 cas sur 36 d'égalité, et les $(1+2+3+4+5) = 15$ cas sur 36 d'être supérieur (ou inférieur).

2. On a $X_i(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et :

$$P(X_i = 0) = P(E_1) = \frac{5}{12} \quad , \quad P(X_i = 1) = P(E_3) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad P(X_i = 2) = P(E_2) = \frac{1}{6}.$$

X_i est finie donc admet des moments de tous ordres, et en particulier une espérance et une variance et :

$$E(X_i) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Par théorème de transfert

$$E(X_i^2) = 0^2 \times \frac{5}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{12}$$

et enfin par théorème de Koenig-Huygens

$$V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{13}{12} - \frac{9}{16} = \frac{52 - 27}{48} = \frac{25}{48}.$$

3. Y_1 est le nombre de points au bout d'un seul tirage. Donc $Y_1 = X_1$ et sa loi est ci dessus.
4. On a $Y_2 = X_1 + X_2$ donc $Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
   On se ramène ensuite au couple (X_1, X_2) :
   - $(Y_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ et par indépendance
   $$P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \left(\frac{5}{12}\right)^2.$$
   - $(Y_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ avec une réunion d'incompatibles et des intersections d'évènements indépendants donc :
   $$P(Y_2 = 1) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = 2\left(\frac{5}{12}\right)^2$$
   - $(Y_2 = 2) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 0)$ avec une réunion incompatible et des intersections d'évènements indépendants donc
   $$P(Y_2 = 2) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + (\frac{5}{12})^2 + \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} = (\frac{5}{12})^2 + \frac{1}{3} \times \frac{5}{12}.$$
   - $(Y_2 = 3) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1)$ avec une réunion incompatible et des intersections d'évènements indépendants donc
   $$P(Y_2 = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{12}$$
   - $(Y_2 = 4) = (X_1 = 2 \cap X_2 = 2)$ avec des évènements indépendants donc
   $$P(Y_2 = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$
5. (a) Comme à chaque tirage, on peut engranger de 0 à 2 points, en 3 tirages, $Y_3(\Omega) = [\![0, 6]\!]$.
   (b) Ce tableau à double entrée croise les valeurs de Y_2 et de Y_3. Il contient donc au total 35 valeurs ...
   Pour calculer les probabilités, on se ramène au couple (Y_2, X_3) dont on connaît les deux lois marginales et qui sont indépendantes, donc on a les probabilités des intersections par produit.
   Exemple : $P(Y_2 = 0 \cap Y_3 = 0) = P(Y_2 = 0 \cap X_3 = 0) = \frac{25}{144}\frac{5}{12}$.

$Y_2 \backslash Y_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{25}{144}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{144}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{144}\frac{1}{6}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{25}{72}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{72}\frac{5}{12}$	$\frac{25}{72}\frac{1}{6}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{5}{16}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{16}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{16}\frac{1}{6}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{5}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{5}{36}\frac{1}{6}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{1}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{1}{36}\frac{5}{12}$	$\frac{1}{36}\frac{1}{6}$
$P(Y_3 = k)$	$(\frac{5}{12})^3$	$\frac{125}{576}$	$\frac{175}{576}$	$\frac{425}{12^3}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{5}{144}$	$(\frac{1}{6})^3$

Remarque : Les calculs effectués pour remplir ce tableau sont très lourds. En pratique, il ne fallait surtout pas simplifier, et donner les résultats sous forme d'énormes sommes si on ne veut pas y passer 2 heures (ou bien sauter le calcul du tableau!).

(c) La loi de Y_3 est obtenue comme loi marginale du couple (voir le tableau, à donner aussi sous forme de somme non simplifiée), c'est-à-dire en décomposant sur le système complet d'évènements des valeurs de Y_2 : $([Y_2 = 0], [Y_2 = 1], [Y_2 = 2], [Y_2 = 3], [Y_2 = 4])$.
Justifions l'une des valeurs, par exemple $P(Y_3 = 1)$:

$$\begin{aligned}(Y_3 = 1) &= (Y_2 = 0 \cap Y_3 = 1) \cup (Y_2 = 1 \cap Y_3 = 1) \cup (Y_2 = 2 \cap Y_3 = 1)\\ &\cup (Y_2 = 3 \cap Y_3 = 1) \cup (Y_2 = 4 \cap Y_3 = 1)\end{aligned}$$

Par incompatibilité de l'union, on obtient :

$$\begin{aligned}P(Y_3 = 1) &= P(Y_2 = 0 \cap Y_3 = 1) + P(Y_2 = 1 \cap Y_3 = 1) + P(Y_2 = 2 \cap Y_3 = 1)\\ &+ P(Y_2 = 3 \cap Y_3 = 1) + P(Y_2 = 4 \cap Y_3 = 1)\\ &= \frac{25}{144}\frac{5}{12} + \frac{25}{72}\frac{5}{12} + 0 + 0 + 0 = \frac{125}{576}\end{aligned}$$

6. Y_n est le nombre total de points donc $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ donc par linéarité de l'espérance,

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{3}{4}n$$

et par indépendance des X_i,

$$V(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{25}{48}n.$$

7. (a) Voici la fonction demandée :

```python
def simulX():
    d1 = np.floor(rd.random()*6+1)
    d2 = np.floor(rd.random()*6+1)
    if d1<d2 :
        x = 0
    elif d1==d2 :
        x = 2
    else:
        x = 1
    return(x)
```

(b) Voici le programme complété :

```python
N = np.zeros((5,7))
for i in range(1000):
    Y2 = imulX()+simulX()
    Y3 = Y2+simulX()
    N[Y2, Y3] = N[Y2, Y3]+1
```

(c) On ajoute les commandes :

```python
F = N/1000
print(f)
```

(d) i. $Y_3 = Y_2 + X_3$.
On remarque qu'on a $Y_3 = 1 \times Y_2 + X_3$ mais X_3 n'est pas constante. En revanche, si on prend $a = 1$ et $b = E(X_3) = 3/4$, on a $Y_3 = aY_2 + b + \epsilon$ où ϵ est une erreur d'ajustement centrée en 0 (i.e. d'espérance nulle).

ii. Pour c, on reconnait la version empirique de la formule $E(Y_2Y_3) - E(Y_2)E(Y_3) = Cov(Y_2, Y_3)$: c calcule la covariance empirique du couple (Y_2, Y_3) sur 1000 simulations du couple.
La variable $v2$ contient la variance empirique de Y_2.
Pour cor, on reconnait la version empirique de la formule $\dfrac{Cov(Y_2, Y3)}{\sigma(Y_2)\sigma(Y_3)} = \rho(Y_2, Y_3)$: cor calcule le coefficient de corrélation linéaire empirique du couple (Y_2, Y_3).

iii. Le coefficient de corrélation linéaire est relativement proche de 1, ce qui est cohérent avec les constations faites à la question 7.(d).i.
De même, a est bien proche de 1 et b est bien proche de 3/4.

8. (a) On a $T_1(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ et $(T_1 = k)$ signifie que l'on marque le premier point (ou 2 points d'un coup) à la k-ième partie.
Les parties étant indépendantes,

$$T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right) \quad \text{et} \quad P(T_1 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}.$$

(b) T_1 admet donc une espérance et une variance et :

$$E(T_1) = \frac{12}{7} \quad \text{et} \quad V(T_1) = \left(\frac{12}{7}\right)^2 \times \frac{5}{12} = \frac{5 \times 12}{7^2} = \frac{60}{49}.$$

9. (a) $T_2(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ car on peut marquer 2 points dès la première partie.

(b) $(T_2 = 1)$ signifie que l'on atteint 2 points lors de la première partie donc :

$$(T_2 = 1) = (X_1 = 2) \quad \text{et} \quad P(T_2 = 1) = \frac{1}{6}$$

$(T_2 = 2)$ signifie que le total atteint 2 à la seconde partie donc :

$$(T_2 = 2) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 \geq 1)$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des évènements intersectés :

$$P(T_2 = 2) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{10 + 35}{12^2} = \frac{3 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 3 \times 4} = \frac{5}{16}.$$

(c) pour $k \geq 3$, $(T_2 = k)$ signifie que 2 points ont été atteints à la k-ième partie, et pas avant, c'est à dire que :

- ou bien que jusqu'à la $(k-1)$-ième aucun point n'avait été marqué et que deux points l'ont été à la k-ième, formalisé par :

$$(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap ... \cap (X_{k-1} = 0) \cap (X_k = 2) = \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = 0)\right] \cap (X_k = 2)$$

dont la probabilité vaut par indépendance :

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

- ou bien dans les $k-1$ premières parties, un seul point a été marqué à une des parties et 0 aux autres, et un ou deux points ont été marqués à la k-ième formalisé par :

$$\bigcup_{i=1}^{k-1}\Big[(X_1=0)\cap\ldots\cap(X_{i-1}=0)\cap(X_i=1)\cap(X_{i+1}=0)\cap\ldots\cap(X_{k-1}=0)\cap(X_k\geq 1)\Big]$$

de probabilité (par incompatibilité de la réunion et indépendance des évènements intersectés) :

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{5}{12}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-2}\times\frac{7}{12}=(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}\times\frac{7}{12}$$

Les deux possibilités considérées étant incompatibles, on obtient finalement :

$$P(T_2=k)=\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}+(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}\times\frac{7}{12}.$$

(d) Pour $k=1$ on a :

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{1-1}\times\frac{1}{6}+(1-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{1-1}\times\frac{7}{12}=\frac{1}{6}=P(T_2=1)$$

et pour $k=2$ on a

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{2-1}\times\frac{1}{6}+(2-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{2-1}\times\frac{7}{12}=\frac{5}{16}=P(T_2=2).$$

Donc ce résultat est encore valable pour $k=1$ et pour $k=2$.

(e) On n'a donc pas à traiter à part les valeurs $k=1$ et $k=2$; on cherche la convergence et la valeur d'une somme infinie, on passe par la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^{n}P(T_2=k)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}+\frac{7}{12}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\sum_{h=0}^{N-1}\left(\frac{5}{12}\right)^{h}+\frac{7}{12}\sum_{h=0}^{N-1}h\left(\frac{5}{12}\right)^{h}$$

On reconnaît deux séries géométrique et géométrique dérivée de raison appartenant à $]-1;1[$ donc elles convergent et la série considérée converge. De plus on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(T_2=k)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{5}{12}}+\frac{7}{12}\times\frac{\frac{5}{12}}{(1-\frac{5}{12})^2}=\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}+\frac{7}{12}\times\frac{12\times 5}{7^2}=\frac{2}{7}+\frac{5}{7}=1.$$

(f) L'événement "le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2" est le contraire de "l'obtenir à un moment donné" : $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}(T_2=k)$ qui est quasi certain (on vient de le vérifier).
Donc l'évènement "n'obtenir jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2" est quasi impossible ou négligeable (de probabilité nulle).

(g) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kP(T_2=k)$ est à termes positifs. L'absolue convergence équivaut donc à la simple convergence, et on veut la convergence et la somme : on passe par la somme partielle.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}kP(T_2=k)&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}+\frac{7}{12}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}+\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-2}\end{aligned}$$

On reconnaît deux séries géométrique et géométrique dérivée de raison appartenant à $]-1;1[$ donc elles convergent et T_2 admet une espérance. De plus on a :

$$E(T_2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^2}+\frac{35}{12^2}\times\frac{2}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^3} = \frac{1}{6}\times\frac{12^2}{7^2}+\frac{35}{12^2}\times\frac{12^3 2}{7^3} = \frac{24}{7^2}+5\frac{24}{7^2} = \frac{6\times 24}{7^2} = \frac{144}{49}$$

Exercice 2 (EML 2009)

1. (a) f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   De plus, pour $x \neq 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0 puis :
   $$f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+o(x)} \xrightarrow[x\to 0, x\neq 0]{} \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$
   donc f est continue en 0, et f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus pour tout $x \neq 0$,
   $$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}.$$

   (c) Obtenons un DL du numérateur et du dénominateur au voisinage de 0 :
   $$(e^x-1)^2 = (x+o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$$
   $$e^x - 1 - xe^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$
   $$e^x - 1 - xe^x = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
   D'où
   $$f(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^2(1+o(1))} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

   (d) $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} = \frac{x+1-e^x}{x(e^x-1)}$.
   On cherche alors un développement limité de chacun des facteurs, à l'aide du DL de exp, on obtient :
   $x+1-e^x = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. et $e^x-1 = x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Ainsi : $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))}$.
   On factorise les sommes par les termes prépondérants en 0 :
   $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2(-\frac{1}{2}+o(1))}{x^2(1+\frac{x}{2}+o(x))} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+\frac{x}{2}+o(x)} \xrightarrow[x\to 0, x\neq 0]{} -\frac{1}{2}$.
   Ainsi, f est bien dérivable en 0 (car cette limite est finie) et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

   (e) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
   Il reste à montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 :
   - f est dérivable en 0 d'après la question 1.(d) et $f'(0) = -1/2$;
   - D'après la question 1.(c) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -1/2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ donc f' est continue en 0.

2. (a) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et
   $$u'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$
   est strictement positive sur $]-\infty;0[$, nulle en 0 et strictement négative sur $]0;+\infty[$.
   On en déduit que u est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

(b) u admet donc un maximum strict en 0, qui vaut $u(0) = -1 + 1 = 0$ donc $u(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
Or sur ces deux intervalles $f'(x)$ est du signe (strict) de u donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.
De plus en $x = 0$, $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ par quotient de limites, car $x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $e^x - 1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$.
En $+\infty$, on écrit

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

car $\frac{x}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées et $\frac{1}{1-e^{-x}}$ tend vers 1.
Enfin $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et on obtient :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

3. x contient un nombre pair de valeurs (100 valeurs) régulièrement répartie entre -10 et 10 . 0 ne fait donc pas partie de ces valeurs (il faudrait prendre un nombre impair de valeurs).

   Tous les résultats de la partie I. apparaissent sur le graphe.

   On voit notamment que la droite d'équation $y = 1 - 1/2x$ se confond avec la courbe de f au voisinage de 0. Ça semble donc être la tangente à la courbe de f au voisinage de 0, qui est de pente $-1/2 = f'(0)$: cohérent avec le résultat de la question 1.(d).

4. On a $f(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas un point fixe.

   Pour $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{e^x - 1} = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

   Donc $x = \ln(2)$ est l'unique point fixe de f.

5. (a) La fonction $g : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et pour tout x réel,

$$g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - 1 - x).$$

La fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$ est dérivable et pour tout x réel $h'(x) = e^x - 1$ est nulle en 0 et strictement positive sur $]0; +\infty[$.
On en déduit que h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc admet un minimum strict en 0, qui vaut $h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ et $h(x)$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et nulle en 0.
On en déduit que $g'(x)$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et nulle en 0 donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Elle atteint donc son minimum en 0, avec $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et on obtient bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0.$$

(b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2(e^x - 1 - xe^x) + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

(c) On en déduit que $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ sur $]0; +\infty[$. De plus, $f'(0) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ donc $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.
Cela donne donc $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$.
De plus on a déjà prouvé que $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$, et on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0.$$

(d) On reconnaît une application des accroissements finis. Comme l'inégalité vérifiée par f' n'est valable que sur $\mathbb{R}_+$, il faut justifier que $u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout n et que $\ln(2) \in \mathbb{R}_+$ (évident).
On peut le prouver par une récurrence très simple, ou astucieusement :
On a $u_0 = 1 > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \geq 0$ car $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'où $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, avec $a = \ln(2)$ et $b = u_n$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \qquad \text{donc} \qquad |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$$

6. Une récurrence classique donne le résultat :

Ini. $2^0 = 1$ donc on a bien $|u_0 - \ln(2)| = |1 - \ln(2)| = 1 - \ln(2) \leq \frac{1}{2^0}(1 - \ln(2))$.

Héré. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \ln(2))$, alors

$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(1 - \ln(2)) = \frac{1}{2^{n+1}}(1 - \ln 2)$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln(2)| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \ln(2))$.

7. La suite 2^n diverge vers $+\infty$ donc par quotient $\frac{1}{2^n}(1 - \ln(2))$ converge vers 0 et par théorème d'encadrement (une valeur absolue est toujours positive),

$$u_n - \ln(2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{et enfin} \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2).$$

8. Voici le programme demandé :

```
u = 1
n = 0
while np.abs(u-np.log(2)) >= 10**(-9):
    n = n+1
    u = u/(np.exp(u)-1)
print(n)
```

9. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives ; soit F une primitive de f, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = F(2x) - F(x).$$

Or F est dérivable, de dérivée f continue donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par somme et composée définie de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

Premier cas : $x \neq 0$. Alors $2x \neq 0$ et :

$$G'(x) = \frac{2 \times 2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x - 1} = \frac{2 \times 2x}{e^{2x}-1} - \frac{x(e^x+1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{4x - xe^x - x}{e^{2x}-1} = \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$$

D'autre part si $x = 0$, on a $G'(0) = 2f(0) - f(0) = f(0) = 1$.

10. (a) On a $x \geq 0$ donc $2x \geq x$ et les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant. f est positive et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ donc pour tout $t \in [x; 2x]$, on a

$$0 \leq f(t) \leq f(x).$$

On intègre cette inégalité sur $[x; 2x]$ et on obtient :

$$0 \leq \int_x^{2x} f(t)\ dt \leq \int_x^{2x} f(x)\ dt = f(x)\ [\ t\ ]_x^{2x} = f(x)(2x - x) = xf(x).$$

On obtient bien :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq G(x) \leq xf(x).$$

De plus on a :

$$xf(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

par croissances comparées. D'où par théorème d'encadrement on a

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0.$$

(b) On a $x \leq 0$ donc $2x \leq x$ et les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre décroissant. f est positive et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc pour tout $x \in [2x; x]$,

$$f(2x) \geq f(t) \geq f(x)$$

puis en intégrant avec des bornes dans l'ordre décroissant on a :

$$\int_x^{2x} f(t)\ dt \leq \int_x^{2x} f(x)\ dt = f(x)\ [\ t\ ]_x^{2x} = f(x)(2x - x) = xf(x).$$

On obtient bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad G(x) \leq xf(x)$$

Enfin on a

$$xf(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

car $x^2 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty + \infty$ et $e^x - 1 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty - 1$ donc par théorème de comparaison,

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = -\infty.$$

11. On a $G'(0) = 1 > 0$.

Pour tout $x \neq 0$,

$$G'(x) = \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$$

Or $3 - e^x$ est strictement positive pour $x < \ln(3)$, nulle en $\ln(3)$ et strictement positive pour $x > \ln(3)$.

D'autre part x et $e^{2x} - 1$ sont de même signe : strictement négatifs pour $x < 0$ et strictement positifs pour $x > 0$ donc $\frac{x}{e^{2x}-1} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

On en déduit que $G'(x)$ est du signe de $3-e^x$, puis que G est strictement croissante sur $]-\infty; \ln(3)]$ et strictement décroissante sur $[\ln(3); +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{2x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-e^x$		$+$	2	$+$	0	$-$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$G(\ln(3))$	$\searrow$	0