Correction - DM 12

A rendre le Vendredi 26 Janvier

Exercice 1 (EML 2002)

1. (a) Comme on sait que la série converge, on travaille directement la somme infinie pour tout réel $x \in [0,1[$, et on reconnaît des séries géométriques et géométriques dérivées :

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(b) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $k < n$, on a $k+1 \leq n$ donc les coefficients s'écrivent sous forme factorielle :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

(c) On part du côté le plus compliqué (à droite) et on simplifie pour arriver de l'autre côté :

$$\begin{aligned} xs_k(x) + xs_{k+1}(x) &= x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^{n+1} + \binom{k}{k} x^{k+1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right] x^{n+1} + x^{k+1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} + x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+2}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m = s_{k+1}(x) \end{aligned}$$

(d) Soit $x \in [0,1[$. On fait apparaître la relation de récurrence qui permettra de déterminer s_{k+1} à partir de s_k :

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x) \iff s_{k+1}(x)\,(1-x) = xs_k(x) \iff s_{k+1}(x) = s_k(x)\,\frac{x}{1-x}.$$

Alors par récurrence :

Ini. On a $s_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{x^0}{(1-x)^{0+1}}$ donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.

Héré. Soit $k \geq 0$. Supposons que $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$. Alors :

$$s_{k+1}(x) = s_k(x)\,\frac{x}{1-x} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+1+1}}$$

et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Ccl. Pour tout entier naturel k, $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

2. (a) La loi de N est celle de la première boule noire obtenue dans une suite de tirages indépendants ayant tous la même probabilité $1/5$ de donner une boule noire.

Donc $N \hookrightarrow \mathcal{G}(1/5)$ admet une espérance et $E(N) = \dfrac{1}{1/5} = 5$.

(b) Quand $N = n$, on effectue n tirages indépendants dans l'urne. Donc le nombre X de boules noires obtenues suit une loi binômiale de paramètres n et $1/5$, ce qui donne :

$$P_{(N=n)}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

(c) Comme la probabilité dépend de la valeur de n, on utilise la formule des probabilités totales avec comme système complet d'événements $(N = n)_{n\in[\![1,+\infty[\![}$. La série est convergente et

$$P(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{P_{(N=n)}(X=0)}_{\text{avec } 0\leq n} P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5}.$$

On regroupe les puissances pour n'avoir qu'une puissance n et on factorise les constantes :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{1}{5}\times\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^n - \left(\frac{16}{25}\right)^0\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{16}{25}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{9} - \frac{9}{9}\right) = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

(d) $(N = n)_{n\in[\![1,+\infty[\![}$ est là encore un système complet d'événements. Mais dans la formule des probabilités totales, seuls les termes pour lesquels $n \geq k$ seront non nuls

$$P(X=k) = \sum_{n=1}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)\,P(N=n)$$

ce qui donne en remplaçant :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{4}{5}\right)^n\frac{1}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{16}{25}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1-\left(\frac{16}{25}\right)\right)^{k+1}} = \frac{1}{4^k}\times\frac{16^k}{9^k}\times\frac{25}{9}\frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^k\frac{25}{36} \end{aligned}$$

(e) La série $\sum kP(X = k)$ est à termes positifs donc sa convergence absolue est équivalente à sa convergence, et on reconnaît une série géométrique dérivée avec $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$ donc X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) + 0 = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^k\frac{25}{36} \\ &= \frac{25}{36}\times\frac{4}{9}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{25}{9^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{25}{9^2}\times\frac{9^2}{5^2} = 1. \end{aligned}$$

(f) On a pour $k \geq 1$ (pour pouvoir mettre à part le terme pour $k = 0$)

$$\begin{aligned} P(X\leq k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \frac{4}{9} + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{4}{9}\right)^i\frac{25}{36} = \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\left(\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{4}{9}\right)^i - 1\right) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1}{\frac{4}{9} - 1} - 1\right) = \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\,\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1 + \frac{5}{9}}{-\frac{5}{9}} \\ &= \frac{4}{9} - \frac{5}{4}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - \frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k \end{aligned}$$

et le résultat est aussi vrai pour $k = 0$ où $P(X \leq 0) = 4/9$.

(g) Voici le programme Scilab demandé :

```
def simulX():
    n = rd.geometric(1/5)
    x = binomial(n, 1/5)
    return(x)
```

3. (a) F est la fonction de répartition d'une variable à densité si :
   - $F \to 0$ en $-\infty$ et $F \to 1$ en $+\infty$.
   - F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points.
   - F est croissante sur $\mathbb{R}$.

   ce que l'on vérifie :
   - Pour $x < a$ on a
   $$F(x) = 0 \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$
   et pour $x > a$ on a
   $$F(x) = 1 - e^{x \ln \frac{4}{9}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$
   car $\ln(4/9) < 0$ (car $4/9 < 1$).
   - F est continue sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a[$ comme composée de fonctions continues. Il reste à montrer la continuité en a^- en revenant à la définition : en a^- on a
   $$F(x) = 0 \xrightarrow[x\to a^-]{} 0$$
   et
   $$F(a) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^a = 1 - \frac{5}{9}e^{a \ln \frac{4}{9}}$$
   avec
   $$a \ln \frac{4}{9} = -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4} \ln \frac{4}{9} = -\frac{\ln(9/5)}{\ln(9/4)} [-\ln(9/4)] = \ln\left(\frac{9}{5}\right)$$
   donc
   $$F(a) = 1 - \frac{5}{9}\frac{9}{5} = 0$$
   Donc
   $$F(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} F(a)$$
   et F est continue à gauche de a donc continue sur $\mathbb{R}$.
   Enfin elle est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a[$ comme composée de fonctions C^1.
   - Enfin
   $$F'(x) = 0 \quad \text{sur }]-\infty, a[$$
   et
   $$F'(x) = -\frac{5}{9}e^{x \ln(4/9)} \ln\left(\frac{4}{9}\right) > 0 \quad \text{sur }]a, +\infty[$$
   car $\ln(4/9) < 0$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

   Donc F est bien une fonction de répartition de variable à densité.

   (b) Une densité de Y est alors obtenue en dérivant en tout point où elle est dérivable, et en donnant une valeur arbitraire ailleurs, ce qui donne :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right) e^{x \ln(4/9)} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(c) On sait qu'une primitive de g est $G(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x te^{t\ln(\frac{4}{9})}dt$.
On ne sait pas primitiver directement donc on procède par intégration par partie :
On pose $u(x) = \frac{e^{x\ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})}$ et $v(x) = x$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par I.P.P :

$$\int_0^x te^{t\ln(\frac{4}{9})}dt = [v(t)u(t)]_0^x - \int_0^x v'(t)u(t)dt = x\frac{e^{x\ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})} - \int_0^x \frac{e^{t\ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})}dt = x\frac{e^{x\ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})} - \left[\frac{e^{t\ln(\frac{4}{9})}}{\left(\ln(\frac{4}{9})\right)^2}\right]_0^x$$

Ainsi,

$$G(x) = x\frac{e^{x\ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})} - \frac{e^{x\ln(\frac{4}{9})}}{\left(\ln(\frac{4}{9})\right)^2} + \frac{1}{\left(\ln(\frac{4}{9})\right)^2}$$

(d) Par relation de Chasles, sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \frac{5}{9}\int_a^{+\infty} t\ln\left(\frac{9}{4}\right)e^{-t\ln(9/4)}dt$$

- $\int_{-\infty}^{a} 0dt$ converge absolument et vaut 0.
- Pour la deuxième intégrale, on reconnaît l'espérance d'une loi exponentielle (où l'intégrale part de a au lieu de 0), donc cette intégrale converge, et c'est l'intégrale d'une fonction positive donc elle converge absolument.
- Enfin Y admet une espérance et on a :

$$E(Y) = \frac{5}{9}\int_a^{+\infty} t\ln\left(\frac{9}{4}\right)e^{t\ln(4/9)}dt$$

qu'on calcule à l'aide de la primitive G de g, en se ramenant sur un segment :

$$\begin{aligned}
\int_a^M tf(t)\,dt &= = \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)\int_a^M g(t)\,dt = \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)[G(t)]_a^M \\
&= \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)\left[\frac{Me^{M\ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} - \frac{e^{M\ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^2} - \frac{ae^{a\ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} + \frac{e^{a\ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^2}\right] \\
&\xrightarrow[M\to+\infty]{} \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)\left[-\frac{ae^{a\ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} + \frac{e^{a\ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^2}\right]
\end{aligned}$$

avec

$$a\ln\left(\frac{4}{9}\right) = \ln\left(\frac{9}{5}\right) \quad \text{et} \quad e^{a\ln(4/9)} = \frac{9}{5}$$

ce qui donne enfin :

$$E(Y) = \frac{5}{9}\times\frac{-a\times\frac{9}{5}\ln\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{9}{5}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{1-\ln(9/5)}{\ln(4/9)}$$

Exercice 2 (EDHEC 2014)

1. La fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, avec $t^2+1\geq 1\geq 0$ donc la racine existe bien, et $\sqrt{t^2+1}\geq\sqrt{1}=1>0$ donc l'inverse existe bien.

   On en déduit que pour tout x, la fonction est continue sur le segment $[x;2x]$ ou $[2x;x]$ et l'intégrale est bien définie.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, montrons que $f(-x)=-f(x)$. On applique le changement de variable $u=-t\Leftrightarrow t=-u$ à l'intégrale $f(-x)=\displaystyle\int_{-x}^{-2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$:

- Quand $t = -x$, $u = x$. Quand $t = -2x$, $u = 2x$.
- $dt = -du$.

On en déduit que :

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}} \times (-1)\ du = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\ du = -f(x)$$

car les variables t et u sont muettes. La fonction f est donc impaire.

3. (a) On a vu que la fonction intégrée, qu'on va noter g, est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive G sur $\mathbb{R}$, qui est alors de classe $\mathscr{C}^1$. On peut alors expliciter :

$$f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$$

qui est de classe $\mathscr{C}^1$ comme somme et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

(b) Toujours avec cette nouvelle expression, on obtient : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{(4x^2+1)(x^2+1)}}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif, on s'intéresse au numérateur :

$$2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1} > 0$$

car $4 > 1$ donc $4x^2+4 > 4x^2+1$, et la racine carrée est strictement croissante.
On en déduit que $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et enfin que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) On passe l'encadrement donné par l'énoncé, qui ne concerne que des nombre strictement positifs puisque $t \geq x > 0$, à la racine carrée strictement croissante (avec t et $t+1$ strictement positifs pour la valeur absolue) puis à l'inverse strictement décroissante (tous les nombres sont strictement positifs), puis on intègre avec des bornes rangées dans l'ordre croissant ($x > 0$ donc $x + x = 2x > x$), on obtient :

$$|t| = t \leq \sqrt{t^2+1} \leq |t+1| = t+1$$

puis

$$\frac{1}{t+1} \leq g(t) \leq \frac{1}{t}$$

et enfin

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1} \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}.$$

On calcule ces deux intégrales :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\ dt = [\ln|t+1|]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1)$$

et

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2 + \ln x - \ln x = \ln(2).$$

On en déduit finalement que :

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2).$$

(b) Le terme de droite de l'encadrement converge trivialement vers $\ln(2)$, étudions celui de gauche :

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1)-\ln(x+1) &= \ln\left[2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]-\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\\
&= \ln(2x)+\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \ln x+\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Par composée de limites, cette quantité converge vers $\ln(2)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et finalement par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln(2).$$

(c) f est impaire donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\ln(2)$, et finalement :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\ln 2$ ↗	$\ln 2$

(d) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\ln(2);\ln(2)[$ donc bijective et 0 admet un unique antécédent car il est dans l'intervalle d'arrivée.
De plus f est impaire donc $f(0)=0$, et cette unique solution est donc 0.

5. (a) On va isoler la racine pour la supprimer :

$$x+\sqrt{x^2+1}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x.$$

Attention ici : la fonction carrée change de variations, on ne peut composer l'inégalité que si les deux quantités sont de même signe !!!

- Premier cas : $x\leq 0$. Alors $-x\geq 0$, et en composant par le carré strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$:
$$x+\sqrt{x^2+1}>0 \Longleftrightarrow x^2+1>(-x)^2 \Longleftrightarrow 1>0$$
qui est bien vrai, donc l'inégalité de départ est vraie.
- Deuxième cas : $x>0$. Alors $-x<0$ et on ne peut pas composer (les termes sont de signes opposés). Mais on a alors de manière évidente :
$$-x<0<\sqrt{x^2+1}$$
donc l'inégalité est bien vérifiée, et celle de départ également.

Finalement on a bien, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+1}>0$.

(b) La fonction h est dérivable comme composée de fonction dérivables, avec $x^2+1\geq 1>0$ pour la racine carrée, et $x+\sqrt{x^2+1}>0$ pour le logarithme. On peut alors calculer :

$$h'(x)=\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=g(x).$$

(c) h est donc une primitive de g, on peut alors calculer :

$$f(x) = [h(t)]_x^{2x} = h(2x) - h(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

6. (a) f et le terme de droite étant sous forme d'une intégrale de x à $2x$, il faut écrire x de la même manière. On remarque que :

$$x = \int_x^{2x} 1\, dt.$$

On peut alors calculer par linéarité de l'intégrale :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt.$$

Pour éliminer la racine du numérateur, on multiplie par la quantité conjuguée (si on ne pense pas cette astuce, on peut s'aider du résultat à obtenir : il faut visiblement multiplier le dénominateur par $(1+\sqrt{t^2+1})$, donc le numérateur aussi). On reconnaît alors une identité remarquable :

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} \frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right) \times \left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt = \int_x^{2x} \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt. \end{aligned}$$

(b) La fonction sous l'intégrale est positive et pour $x > 0$, les bornes sont rangées dans l'ordre croissant : on en déduit que pour tout $x > 0$,

$$x - f(x) \geq 0.$$

Enfin on peut remarquer que le dénominateur est le produit de deux facteurs, l'un supérieur à 1 (le premier), le second supérieur à 2, donc par produit, il est supérieur à 2. On compose par l'inverse strictement décroissante (2 et le dénominateur sont de même signe) puis on multiplie par $t^2 \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} \leq \frac{t^2}{2}.$$

On intègre enfin avec des bornes dans l'ordre croissant ($x > 0$) :

$$x - f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\, dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^{2x} = \frac{(2x)^3 - x^3}{6} = \frac{8x^3 - x^3}{6} = \frac{7x^3}{6}.$$

Finalement on obtient l'encadrement demandé :

$$\forall x > 0, 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3.$$

(c) Cherchons alors la limite de $\frac{f(x)}{x}$, en encadrant cette quantité : on isole d'abord $f(x)$ puis on divise par $x > 0$:

$$-x \leq -f(x) \leq -x + \frac{7}{6}x^3 \quad , \quad x - \frac{7}{6}x^3 \leq f(x) \leq x \quad , \quad 1 - \frac{7}{6}x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1.$$

Les terme de gauche et de droite de l'encadrement convergent vers 1 lorsque $x \to 0^+$, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{0^+}{\sim} x.$$

(d) Première méthode : par imparité, au voisinage de 0^-, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f[-(-x)]}{x} = \frac{-f(-x)}{x} = \frac{f(-x)}{-x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$$

car $-x$ est au voisinage de 0^+, on peut donc utiliser l'équivalent de la question précédente.
Deuxième méthode : on reprend l'expression de $x - f(x)$ qui était valable sur $\mathbb{R}$:

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt$$

L'encadrement de la fonction à l'intérieur est toujours vrai (tous les arguments précédents sont encore valables), on peut donc écrire :

$$0 \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} \leq \frac{t^2}{2}.$$

Cette fois on intègre l'encadrement avec des bornes dans l'ordre décroissant ($x < 0$ donc $x + x = 2x < x$) :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\, dt \leq x - f(x) \leq 0 \quad \text{donc} \quad \frac{7}{6}x^3 \leq x - f(x) \leq 0.$$

(le calcul de l'intégrale de $t^2/2$ reste valable pour $x < 0$). On encadre alors $f(x)/x$:

$$\frac{7}{6}x^3 - x \leq -f(x) \leq -x \quad \text{donc} \quad 1 - \frac{7}{6}x^2 \leq f(x) \leq 1.$$

De nouveau les deux côtés de l'encadrement convergent vers 1 (cette fois en 0^-), donc la quantité $\dfrac{f(x)}{x}$ également par théorème d'encadrement, et enfin :

$$f(x) \underset{0^-}{\sim} x.$$

Exercice 3 (ECRICOME 2010)

1. $\ln(x)$ a pour limite $-\infty$, $\ln(x+1)$ a pour limite 0 et $\dfrac{1}{x}$ a pour limite $+\infty$, c'est une forme indéterminée. Comme $\dfrac{1}{x}$ est prépondérant, on factorise par celui-ci :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(1 + x\ln x + x\ln(x+1)\right)$$

et $x\ln(x) \to 0$ par croissances comparées donc par produit de limites :

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

On en déduit que la droite $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de φ.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il reste à traiter les deux ln qui donnent une forme indéterminée :
Ici par de terme prépondérant évident, on commence en fait à l'intérieur du second ln :

$$\varphi(x) = \ln(x) - \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] + \frac{1}{x} = \ln x - \ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On pouvait aussi rassembler les deux ln en un seul puis simplifier (en sortant de la méthode habituelle pour un calcul plus astucieux).

On en déduit que la droite $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de φ en $+\infty$.

3. φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}+^*$ comme somme et composée de fonctions usuelles de classe C^1, et :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$$

sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x+1>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	‖
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0 ‖

5. φ est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\varphi(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$. De plus $1 \in \varphi(]0;+\infty[)$ donc l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$.

On a de plus

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) - (\ln(4) - \ln(3)) + 3 = 3 - 2\ln(2) > 1 \quad \text{et}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) - (\ln(3) - \ln(2)) + 2 = 2 - \ln(3) < 1$$

On obtient alors par stricte décroissance de φ :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

6. On ne dispose pas de suite approchant α, donc on procède par dichotomie :

```
def f(x):
   return(np.log(x)-np.log(x+1)+1/x-1)

a = 1/3
b = 1/2
while np.abs(b-a)>10**(-2):
   c = (a+b)/2
   if f(c)<0:
      b = c
   else:
       a = c
return(a,b)
```

7. f est positive sur $]\alpha;+\infty[$ car $x+1>0$ sur $]\alpha;+\infty[$, et sur $]-\infty;\alpha]$ car $0 \geq 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $]\alpha;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et sur $]-\infty;\alpha]$ car $x \mapsto 0$ est continue, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en α.

Enfin sous réserve de convergence et par relation de Chasles on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \left[-\varphi'(t)\right]\ dt$$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt$ converge et vaut 0, étudions la seconde.
Comme on cherche la convergence et la valeur, on passe par l'intégrale partielle :

$$\int_{\alpha}^{x} \left[-\varphi'(t)\right]\ dt = [-\varphi(t)]_{\alpha}^{x} = -\varphi(x) + \varphi(\alpha) = -\varphi(x) + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -0 + 1 = 1$$

donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\ dt$ et par suite $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ convergent et valent 1, et f est bien une densité de probabilité.

8. Sous réserve de convergence absolue et par relation de Chasles,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\ dt$$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt$ converge absolument et vaut 0, étudions la seconde. Comme on ne cherche que la convergence et pas la valeur, on passe par un théorème de comparaison.
Cette intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et

$$\frac{1}{t(t+1)} \sim \frac{1}{t^2} \qquad \text{en } +\infty$$

et $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\ dt$ converge par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.
Comme on intègre une fonction positive, cette intégrale converge absolument, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge absolument et X admet bien une espérance.

9. Pour $x > \alpha$, on a

$$\varphi'(x) + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2(x+1)} + \frac{x+1}{x^2(x+1)} = \frac{x}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = xf(x).$$

On en déduit que

$$E(X) = \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi'(t)\ dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\left[\varphi(t) - \frac{1}{t}\right]_{\alpha}^{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} - \varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Finalement $E(X) = -1 + \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
On a de plus par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$0 < \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad 2 < \frac{1}{\alpha} < 3 \quad \text{donc} \quad 1 < -1 + \frac{1}{\alpha} < 2 \quad \text{donc} \quad 1 < E(X) < 2.$$

10. On s'intéresse au moment d'ordre 2 : par théorème de transfert et en éliminant l'intégrale nulle de $-\infty$ à α, on a sous réserve de convergence absolue :

$$E(X^2) = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t+1}\ dt$$

On demande uniquement la convergence, on passe par un théorème de comparaison et on commence par chercher un équivalent simple de la fonction à intégrer (qui est bien positive) :

$$\frac{1}{t+1} = \frac{1}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)} \sim \frac{1}{t} \quad \text{en } +\infty.$$

Or $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge comme intégrale de Riemann de paramètre 1, donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t+1}\,dt$ diverge donc X n'admet pas de moment d'ordre 2 donc pas de variance.
