Correction - DM 13

A rendre le Mercredi 7 Février

Exercice 1 (EML 2016)

1. On calcule sans difficulté :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On résout l'équation :

$$aI + bA + cA^2 = 0 \iff \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0.$$

Donc (I, A, A^2) est libre.

3. $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A.$

4. On veut les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

D'après la question 3., on sait que le polynôme $X^3-2X = X(X^2-2)$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$; et donc $Sp(A) \subset \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

Puisqu'on doit calculer les sous-espaces propres, vérifions qu'elles sont bien valeurs propres en calculant les sous-espaces propres associés :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x & + z = 0 \\ y & = 0 \\ & 0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \right. \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_0(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$. 0 est bien valeur propre de A car il y a au moins un vecteur non nul dans le sous-espace propre associé.

De même

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(A) \quad \Leftrightarrow \quad (A + \sqrt{2}I)X = 0 \Leftrightarrow \text{ (après pivot) } \left\{ \begin{array}{r} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ y = -\sqrt{2}z \\ z = z \end{array} \right. \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-\sqrt{2}}(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Enfin :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A) \quad \Leftrightarrow \quad (A - \sqrt{2}I)X = 0 \Leftrightarrow \text{ (après pivot) } \left\{ \begin{array}{r} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ y = \sqrt{2}z \\ z = z \end{array} \right. \iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{\sqrt{2}}(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Enfin la famille $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ est une base de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-\sqrt{2}, 0$ et $\sqrt{2}$ (à démontrer : card = 3 = dim + libre).

Donc en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

P est inversible et la formule de changement de base assure que $A = PDP^{-1}$.

5. On remarque que

$$\mathcal{E} = \left\{aI + bA + cA^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = Vect(I, A, A^2)$$

donc $\mathcal{E}$ est bien un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, engendré par (I, A, A^2) qui est également libre (question 2) donc c'est une base de $\mathcal{E}$, et $dim(\mathcal{E}) = 3$.

6. Soit $M \in \mathcal{E}$, on la note $M = aI + bA + cA^2$, on a alors avec la question 4 :

$$AM = aA + bA^2 + cA^3 = (a + 2c)A + bA^2 \in Vect(A, A^2) \subset \mathcal{E}$$

donc AM est bien élément de $\mathcal{E}$.

7. On vient de voir que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) \in \mathcal{E}$ donc f est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Vérifions qu'elle est linéaire : pour tous $M_1, M_2 \in \mathcal{E}$ et tout λ réel on a :

$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$

donc f est linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

8. On calcule sans difficulté $f(I) = A$, $f(A) = A^2$ et $f(A^2) = A^3 = 2A$ (question 4) donc :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. On peut calculer F^3 et vérifier que $F^3 = 2F$ puis revenir à l'endomorphisme f. Mais on peut aussi calculer directement et sans difficulté : pour tout $M \in \mathcal{E}$,

$$f \circ f \circ f(M) = f \circ f(AM) = f(A^2M) = A^3M = 2AM = 2f(M).$$

10.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(F) \iff FX = 0 \iff \begin{matrix} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \iff X = z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $Ker(F) = Vect\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ et $Ker(f) = Vect(A^2 - 2I)$.

$$Im(f) = Vect(f(I), f(A), f(A^2)) = Vect(A, A^2, 2A) = Vect(A, A^2).$$

La famille (A, A^2) est génératrice de $Im(f)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $Im(f)$.

11. (a) On peut résoudre cette équation en passant par les matrices associées dans la base (I, A, A^2).

On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que :

$$FX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x+2z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est absurde d'après le premier coefficient des deux vecteurs.
Donc l'équation $f(M) = I + A^2$ n'a pas de solution dans $\mathcal{E}$.
On peut aussi travailler directement sur f en remarquant que $I + A^2 \notin Vect(A, A^2) = Imf$ donc l'équation n'a pas de solution.

(b) On résout de même l'équation, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$FX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x+2z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = 1-2z \\ y = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1-2z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

donc les matrices N de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(N) = A + A^2$ sont toutes les matrices de la forme :

$$N = (1-2z)I + A + zA^2 = \begin{pmatrix} 1-z & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1-z \end{pmatrix}$$

avec $z \in \mathbb{R}$.
On peut aussi résoudre directement avec f en remarquant que $A = f(I)$ et $A^2 = f(A)$ pour écrire :

$$\begin{aligned} f(N) = A + A^2 \quad &\Leftrightarrow \quad f(N) = f(I) + f(A) \Leftrightarrow f(N - I - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad N - I - A \in Ker(f) \Leftrightarrow N - I - A = \lambda(A^2 - 2I) \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et enfin les solutions sont toutes les matrices de la forme :

$$N = I + A + \lambda(A^2 - 2I) = (1-2\lambda)I + A + \lambda A^2.$$

qui est bien la même que celle trouvée par le calcul matriciel.

Exercice 2 (EDHEC 2006)

1. (a) Passons par le noyau de A :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad &\Leftrightarrow \quad AX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10y + 7z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 10y + 7z = 0 & \\ -2y - z = 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ 2y + z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 10y - 14y = 0 & \\ z = -2y & \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = 2y \\ z = -2y \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $ker(f) = Vect((2, 1, -2)) = Vect(u)$.

(b) Comme $ker(f) \neq \{0\}$ alors f n'est pas injective donc pas bijective donc A n'est pas inversible.

2. (a) Soit $v = (x, 1, z)$.

$$f(v) = u \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ 2 + z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

L'unique vecteur v vérifiant $f(v) = u$ avec une deuxième coordonnée égale à 1 est donc :

$$v = (3, 1, -2).$$

(b) Soit $w = (x, 1, z)$.

$$f(w) = v \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 3 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 3 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ 2 + z = 1 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

L'unique vecteur w vérifiant $f(w) = v$ avec une deuxième coordonnée égale à 1 est donc :

$$w = (0, 1, -1)$$

(c) La famille (u, v, w) comprend trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.
Il suffit donc de démontrer que la famille est libre et on résout le système :

$$xu + yv + zw = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2, 1, -2) + y(3, 1, -2) + z(0, 1, -1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -y + 2z = 0 \quad (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ y - z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre et $card(u, v, w) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) On a $u \in ker f \Leftrightarrow f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$ donc

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La formule de changement de base donne :

$$A = M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = PNP^{-1}.$$

On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0.$$

Donc, pour tout $k \geq 3$:

$$N^k = N^3 N^{k-3} = 0 \qquad \text{et} \qquad A^k = P\, N^k P^{-1} = 0.$$

4. (a) Par définition, $C_N = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

   - $C_N \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   - $0\,N = 0 = N\,0$ donc $O \in C_N$.

   - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in C_N$. Alors :

   $$\left(\lambda M + M'\right) N = \lambda MN + M'N = \lambda NM + NM' = N\left(\lambda M + M'\right)$$

   Donc $(\lambda M + M') \in C_N$.

   C_N est stable par combinaison linéaire et c'est un sous espace de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   On explicite maintenant C_N (on aurait pu expliciter directement C_N, pour montrer que c'est un sev) :

   $$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in C_N \quad &\Leftrightarrow \quad NM = MN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} d = 0 & e = a & f = b \\ g = 0 & h = d & e = i \\ 0 = 0 & g = 0 & h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 & e = a & f = b \\ g = 0 & h = 0 & e = i \\ 0 = 0 & g = 0 & h = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = aI + bN + cN^2. \end{aligned}$$

   Donc $C_N = Vect(I, N, N^2)$ (et on retrouve que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

   (b) On procède par équivalence :

   $$\begin{aligned} M \in C_A \quad &\Leftrightarrow \quad M\,A = A\,M \\ &\Leftrightarrow \quad M\;P\;N\;P^{-1} = P\;N\;P^{-1}M \\ &\Leftrightarrow \quad P^{-1}(M\;P\;N\;P^{-1})P = P^{-1}(P\;N\;P^{-1}M)P \\ &\Leftrightarrow \quad (P^{-1}M\;P)\;N = N\;(P^{-1}MP) \\ &\Leftrightarrow \quad P^{-1}MP \in C_N. \end{aligned}$$

   D'où, toujours par équivalence :

   $$\begin{aligned} M \in C_A \quad &\Leftrightarrow \quad \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^{-1}MP = aI + bN + cN^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ M = P(P^{-1}MP)P^{-1} = aI + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ M = aI + bA + cA^2 \Leftrightarrow M \in \text{Vect}\left(I, A, A^2\right). \end{aligned}$$

   Donc $C_A = Vect(I, A, A^2)$.
   Pour avoir la dimension, il reste à voir si la famille est libre. Pour cela, on réutilise N :

   $$aI + bA + cA^2 = 0 \Leftrightarrow P(aI + bA + cA^2)P^{-1} = 0 \Leftrightarrow aI + bN + cN^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

   car la famille (I, N, N^2) est libre (évident car elle est échelonnée, ou bien on écrit le système d'équation).
   La famille (I, A, A^2) est libre et génératrice donc base de C_A et $dim(C_A) = 3$.

Exercice 3 (EML 2001)

1. (a) On a :

$$t^2 f_n(t) = \frac{e^{-t}t^{n+2}}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{t^{n+2}}{e^t}.$$

Comme $t^{n+2} = o\left(e^t\right)$ (par croissances comparées), $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

f_n est continue sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
Comme f_n admet une limite finie en 0^+, l'intégrale est faussement impropre en 0.
On sait que $f_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2>1$).
Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge également.

(b) Soit $x \geq 0$. On a le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \dfrac{t^n}{n!} & & e^{-t} \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \longrightarrow & -e^{-t} \end{array}$$

Comme les fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{t^n}{n!}$ sont C^1 sur $[0,x]$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x f_n(t)dt &= \left[\frac{1}{n!}t^n e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-t}dt \\ &= -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)dt.\end{aligned}$$

(c) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}x^n}{n!} = 0$. De plus, d'après la question 1.(a), on sait que $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En passant à la limite quand $x \to +\infty$ dans la relation obtenue à la question précédente, on obtient que :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)dt.$$

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$. On sait donc que (I_n) est une suite constante. De plus,

$$I_0 = \int_0^x f_0(t)dt = \int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = 1$.

(d) f_n est continue sauf éventuellement en 0 et positive sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t)dt + \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 0 + 1 = 1.$$

Ainsi, f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. (a) X_n admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)\,dt$ converge (ce qui est équivalent à la convergence absolue). Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^{+\infty} t\frac{e^{-t}t^n}{n!}dt = 0 + (n+1)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!}dt = (n+1),$$

d'après la question 1.(c). Donc X_n admet une espérance et $E(X_n) = n+1$.

X_n admet un moment d'ordre 2 si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,dt$ converge (ce qui est équivalent à la convergence absolue). Or :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-t}t^n}{n!}dt \\ &= 0 + (n+1)(n+2)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^{n+2}}{(n+2)!}dt \\ &= (n+1)(n+2)\int_0^{+\infty} f_{n+2}(t)dt \\ &= (n+1)(n+2),\end{aligned}$$

d'après la question 1.(c). Donc, d'après le théorème de transfert, X_n admet un moment d'ordre 2 et $E(X_n^2) = (n+1)(n+2)$. D'après la formule de Koenig-Huygens, X_n admet donc une variance et :

$$V(X_n) = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = (n+1)(n+2-1) = n+1.$$

(b) La fonction de répartition F_4 de X_4 est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable là où f_4 est continue. Or f_4 est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 (car $\lim_{x\to 0^-} f_4(x) = f_4(0) = \lim_{x\to 0^+} f_4(x)$). Donc f_4 est continue sur $\mathbb{R}$ et F_4 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in]-\infty, 0]$, $F_4(x) = \int_{-\infty}^x 0 = 0$ donc F_4 est nulle.
En 0, $F_4'(0) = f_4(0) = 0$ donc on a une tangente horizontale à l'origine.
Pour $x \in]0, +\infty[$, $F_4'(x) = f_4(x) = \dfrac{e^{-x}x^4}{4!} > 0$ donc F_4 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
En $+\infty$, $F_4 \to 1$ donc on a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
On déduit de tous ces éléments la courbe représentative de F_4 (on placera aussi les points donnés dans l'énoncer : $F_4(4) = 0.37$, $F_4(6) = 0.71$ et $F_4(8) = 0.90$).

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}P(X_4 > 4) &= 1 - P(X_4 \leq 4) = 1 - F_4(4) \simeq 0.63 \\ P(4 < X_4 \leq 8) &= P(X_4 \leq 8) - P(X_4 \leq 4) = F_4(8) - F_4(4) \simeq 0,90 - 0,37 \simeq 0,53\end{aligned}$$

3. (a) D'après le cours, pour tout réel $t > 0$, $E(Y_t) = V(Y_t) = t$.

(b) Soient $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$(Z_n \leq t)$ signifie que la n-ième voiture arrive au plus tard à l'instant t
Et comme le nombre de voiture va croissant avec le temps, cela signifie qu'à l'instant t, il y a eu au moins n voitures et donc $(Y_t \geq n)$.
Ainsi, $(Z_n \leq t) = (Y_t \geq n)$.

(c) La fonction de répartition de Z_n est donc donnée par :

$$F(t) = P(Z_n \leq t) = P(Y_t \geq n) = 1 - P(Y_t < n).$$

Or :

$$P(Y_t < n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(Y_t = k) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t}\frac{t^k}{k!}$$

Finalement, comme Z_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-t}\frac{t^k}{k!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(d) Montrons d'abord que Z_n est à densité. F est C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. En 0,

- $\lim\limits_{t\to 0^-} F(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$;
- $F(0) = 1 - e^{-0} = 0$;
- $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\right) = 0$ par opérations sur les limites.

Donc $\lim\limits_{t\to 0^-} F(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = F(0)$ et F est continue en 0.

Finalement, F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Donc Z_n est à densité.

Pour obtenir une densité de Z_n, on dérive F là où elle est dérivable :

- Sur $]-\infty, 0[$, $F'(t) = 0$.
- Sur $]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\right)' = \left(1 - e^{-t} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\right)' \\
&= e^{-t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(ke^{-t}t^{k-1} - t^k e^{-t}\right) = e^{-t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!}\, e^{-t}t^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}e^{-t} \\
&= e^{-t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!}\, t^{k-1}e^{-t} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}e^{-t} = e^{-t} - \sum_{h=0}^{n-2} \frac{t^h e^{-t}}{h!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}e^{-t} \\
&= e^{-t} - \frac{t^0 e^{-t}}{0!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}.
\end{aligned}$$

En prenant 0 comme valeur arbitraire positive en 0, Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.
