Correction - DM 14

# A rendre le Vendredi 16 Février

## Exercice 1 (ECRICOME 2010)

1. On applique la méthode du pivot à la matrice $M_a - \lambda I$ :

$$\begin{pmatrix} a+2-\lambda & -(2a+1) & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ a+2-\lambda & -(2a+1) & a \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ (L_2 \leftrightarrow L_3) \end{matrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda(a+2-\lambda)-(2a+1) & a \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - (a+2-\lambda)L_1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & a+\lambda\left[\lambda(a+2-\lambda)-(2a+1)\right] \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_3 - \left[\lambda(a+2-\lambda)-(2a+1)\right] L_2$$

Cette réduite triangulaire n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= a+\lambda\left[\lambda(a+2-\lambda)-(2a+1)\right] = a+\lambda\left[a\lambda+2\lambda-\lambda^2-(2a+1)\right] \\ &= -\lambda^3+(a+2)\lambda^2-(2a+1)\lambda+a = -Q(\lambda) \end{aligned}$$

est nul. Les valeurs propres de $M_a$ sont donc les racines de $Q$.

2. On calcule :

$$Q(1) = 1-(a+2)+(2a+1)-a = 1-a-2+2a+1-a = 0.$$

donc $\lambda = 1$ est une racine de $Q$.

3. On en déduit que $Q(x)$ se factorise par $x-1$ :

$$Q(x) = (x-1)(bx^2+cx+d).$$

On développe et on identifie :

$$Q(x) = bx^3+(c-b)x^2+(d-c)x-d = x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$$

donc :

$$\begin{cases} b = 1 \\ c-b = -a-2 \Leftrightarrow c = -a-2+b = -a-2+1 = -a-1 \\ d-c = 2a+1 \Leftrightarrow d = 2a+1-a-1 = a \\ d = a \end{cases}$$

On obtient :

$$Q(x) = (x-1)\left[x^2-(a+1)x+a\right]$$

donc

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (déjà vue) ou } x^2-(a+1)x+a.$$

On calcule le discriminant de ce polynôme du seconde degré et on discute selon son signe :

$$\Delta = (a+1)^2-4a = a^2+2a+1-4a = a^2-2a+1 = (a-1)^2$$

Il y a deux possibilités :

- Si $a = 1$, alors $\Delta = 0$ et il y a une seule solution (double)
$$\lambda = \frac{a+1}{2} = 1$$
donc $Q$ a une seule racine : $\lambda = 1$.
- Si $a \neq 1$, alors $\Delta > 0$ et il y a deux solutions :
$$\lambda_1 = \frac{a+1-(a-1)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{a+1+a-1}{2} = a.$$
Il y a donc au total deux racines pour $Q$ : 1 et $a \neq 1$.

4. Si $a = 1$, l'unique valeur propre de $M_1$ est 1. On prouve alors par l'absurde que $M_1$ n'est pas diagonalisable.

   Supposons que $M_1$ est diagonalisable. Comme sa seule valeur propre est 1, elle est semblable à la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale : $I$.

   D'où il existe $P$ inversible tel que $M_1 = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde car $M_1 \neq I$.

   On en déduit que $M_1$ n'est pas diagonalisable.

5. Il y a trois vecteurs de $E$ qui est de dimension 3. Il suffit donc de prouver que la famille est libre. On résout le système $xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0$ :
$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Leftrightarrow (xa^2 + y + 2z)e_1 + (xa + y + z)e_2 + (x + y)e_3 = 0$$
   et comme $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $E$ :
$$xe'_1+ye'_2+ze'_3 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2x + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + y \qquad = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + y = 0 \\ (1-a^2)y + 2z = 0 \\ (1-a)y + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + y = 0 \\ (1-a)y + z = 0 \\ \left[2 - (1+a)\right] z = 0 \end{array}\right.$$
   Or $1 - a \neq 0$ puisqu'on a supposé $a \neq 1$, donc on obtient $x = y = z = 0$, et la famille $\mathscr{B}'$ est libre et admet trois vecteurs en dimension 3 : c'est une base de $E$.

6. On passe par la matrice et les vecteurs colonnes associés dans la base $\mathscr{B}$ :
$$M_a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$
   donc $f_a(e'_1) = ae'_1$.

7. Calculons $f_a(F)$ et vérifions que $f_a(F) \subset F$ : comme $F$ admet pour base $(e'_2, e'_3)$ on sait que
$$f_a(F) = Vect(f_a(e'_2), f_a(e'_3))$$
   qu'on calcule :
$$M_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   donc
$$f_a(e'_2) = e'_2 \qquad \text{et} \qquad f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$$
   puis
$$f_a(F) = Vect(e'_2, e'_2 + e'_3) = Vect(e'_2, e'_3) = F$$
   avec l'opération de pivot $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

   On en déduit bien que $f_a(F) \subset F$ (on a même prouvé l'égalité).

   Remarque : on pouvait aussi prendre un vecteur quelconque de $F$ sous la forme $\alpha e'_2 + \beta e'_3$, calculer son image et montrer qu'elle appartient à $F$.

8. On vient de calculer $f_a(e'_1) = ae'_1$, $f_a(e'_2) = e'_2$ et $f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$ donc :

$$T_a = Mat_{\mathcal{B}'}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Montrons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \geq 0$, $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Ini.** $T^0 = I$ donc la propriété est vraie au rang 0.

**Héré.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$T^{n+1} = TT^n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

**Ccl.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. On calcule en partant du plus compliqué :

$$M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

11. En préalable, la formule de changement de base donne :

$$M_2 = Mat_{\mathcal{B}}(f_2) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(f_2) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_2 T_2 P_2^{-1}.$$

Montrons à présent par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ :

**Ini.** $P_2 T_2^0 P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P_2 P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

**Héré.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2 P_2^{-1} P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P_2 T_2^{n+1} P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

**Ccl.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

12. Avec des pivots de Gauss, on obtient

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

puis on calcule

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2 P_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 3 \times 2^n - 5n - 2 \end{pmatrix}$$

et on peut conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2$$

13. On factorise par le terme prépondérant :

$$u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2 = 3 \times 2^n \left(1 - \frac{5n}{3 \times 2^n} - \frac{2}{3 \times 2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

par croissances comparées d'une suite puissance et d'une suite géométrique, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente.

14. (a) Voici le programme demandé :

```python
M = np.array([[4, -5, 2], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
X = np.zeros((3,20))
X[0, 0] = 7
X[2, 0] = -1
for n in range(1,20):
    X[:, n] = np.dot(M, X[:, n-1])
```

(b) La troisième ligne de la matrice $X$ contient les termes successifs de la suite $(u_n)$ c'est-à-dire que le coefficient numéro $k$ contient $u_k$.

On obtient donc la représentation graphique de la suite $(u_n)$. On remarque qu'elle a l'air de diverger très rapidement vers $+\infty$. Ceci est cohérent car $u_n \sim 3 \times 2^n = 3e^{n\ln(2)}$ donc que la croissance est exponentielle.

---

## Exercice 2 (EML 2010)

1. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $b = c$, c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = aF + bG + dH$$

donc $\mathscr{S}_2 = Vect(F, G, H)$ est un sous-espace vectoriel, et $(F, G, H)$ en est une famille génératrice.

On résout ensuite :

$$aF + bG + cH = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = d = 0$$

donc la famille $(F, G, H)$ est libre.

Comme $(F, G, H)$ est une famille libre et génératrice de $\mathscr{S}_2$, c'est donc une base de $\mathscr{S}_2$ et $card(F, G, h) = 3 = dim(\mathscr{S}_2)$.

2. (a) Soit $S = aF + bG + cH = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2$. Alors

$$u(S) = \begin{pmatrix} 4c & 4b+6c \\ 4b+6c & 4a+12b+9c \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2$$

car on reconnaît une matrice symétrique.

(b) Soit $S$ et $T$ dans $\mathscr{S}_2$ et $\lambda$ un réel, on a :

$$u(\lambda S + T) = A(\lambda S + T)A = (\lambda AS + AT)A = \lambda ASA + ATA = \lambda u(S) + u(T)$$

donc $u$ est linéaire, et c'est une application de $\mathscr{S}_2$ dans $\mathscr{S}_2$ d'après la question précédente, donc c'est un endomorphisme de $\mathscr{S}_2$.

(c) On calcule :

$$AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4H,\ AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4G+12H \text{ et } AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4F+6G+9H.$$

(d) D'après la question 2.(c) on a :

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre. On résout l'équation (E) $aB + bC + cE = 0$ d'inconnues $a$, $b$ et $c$ réels :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4a+4b+c & 3a-2b+2c \\ 3a-2b+2c & -4a+b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4a+4b+c & = & 0 \\ 3a-2b+2c & = & 0 \\ -4a+b+4c & = & 0 \end{array} \right.$$

On résout ce système par la méthode du pivot, on obtient $a = b = c = 0$.

Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre à $3 = dim(\mathscr{S}_2)$ vecteurs donc c'est une base de $\mathscr{S}_2$.

Enfin, la matrice demandée est $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $u(B) = ABA = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} = -4B$.

$u(C) = ACA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = C$.

$u(E) = AEA = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 32 & 64 \end{pmatrix} = 16E$.

Donc $D = M_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Avec la formule de changement de bases, on a :

$$M_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(u) P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \quad \Leftrightarrow \quad M = PDP^{-1}.$$

5. D'après l'égalité $M = PDP^{-1}$, on sait que $-4$, 1 et 16 sont les valeurs propres de $M$ et que $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres respectivement associés à chacune de ces valeurs propres.

Or le vecteur $\begin{pmatrix} -0.2182179 \\ -0.4364358 \\ -0.8728716 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc c'est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 16 (car $E_{16}(M)$ est un espace vectoriel donc stable par multiplication par un scalaire).

De même, les vecteurs $\begin{pmatrix} -0.8728716 \\ 0.4364358 \\ -0.2182179 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -0.6246950 \\ -0.4685213 \\ 0.6246950 \end{pmatrix}$ sont respectivement colinéaires à $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives 1 et $-4$.

On a donc bien dans $P$ une base de vecteurs propres et dans $D$ les valeurs propres associées dans le bon ordre.

6. On fait les calculs : c'est un produit de matrices diagonales, assez rapide.

7. En développant, on en déduit que

$$D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$$

Pour faire apparaître $M$, on multiplie par $P$ à gauche et $P^{-1}$ à droite :

$$P(D^3 - 13D^2 - 52D + 64I)P^{-1} = P0P^{-1} = 0,$$

donc

$$PD^3P^{-1} - 13PD^2P^{-1} - 52PDP^{-1} + 64PIP^{-1} = 0.$$

De plus, on montre que $PD^nP^{-1} = M^n$ par récurrence (ou seulement sur les quelques cas particuliers ici). On a alors :

$$M^3 - 13M^2 - 52M + 64I = 0 \quad \text{et enfin} \quad M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$$

8. La relation précédente se réécrit :

$$[M_{\mathscr{B}}(u)]^3 = 13\,[M_{\mathscr{B}}(u)]^2 + 52\,[M_{\mathscr{B}}(u)] - 64\,[M_{\mathscr{B}}(e)]$$

donc

$$\left[M_{\mathscr{B}}(u^3)\right] = 13\left[M_{\mathscr{B}}(u^2)\right] + 52\,[M_{\mathscr{B}}(u)] - 64\,[M_{\mathscr{B}}(e)]$$

et enfin

$$\left[M_{\mathscr{B}}(u^3)\right] = \left[M_{\mathscr{B}}(13u^2 + 52u - 64e)\right]$$

Par l'isomorphisme existant entre les applications linéaires et les matrices, une base étant fixée, on en déduit :

$$u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$$

---

## Exercice 3 (EML 2015)

1. D'après le cours, une densité et la fonction de répartition d'une variable $X$ suivant $\mathcal{E}(\lambda)$ sont données par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

De plus, cette variable admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. On reconnait la densité plus l'espérance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda$, ces intégrales convergent donc et on fait apparaître proprement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\ dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \frac{1}{\lambda}\times 1 = \frac{1}{\lambda}$$

d'une part, et d'autre part :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\ dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\times\lambda e^{-\lambda x}\ dx = \frac{1}{\lambda}\times E(X) = \frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. (a) On sait que $U(\Omega) = [0;1[$, donc $(1-U)(\Omega) = ]0;1]$, $\ln(1-U)(\Omega) = ]-\infty;0]$ et enfin

$$V(\Omega) = \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)\right)(\Omega) = [0;+\infty[.$$

On en déduit que pour tout $x<0$, $F_V(x) = P(V\leq x) = 0$. D'autre part, pour $x\geq 0$, par stricte croissance de l'exponentielle,

$$(V\leq x) = [\ln(1-U)\geq -\lambda x] = [1-U\geq e^{-\lambda x}] = (U\leq 1-e^{-\lambda x})$$

donc on en déduit que

$$F_V(x) = P(V\leq x) = P(U\leq 1-e^{-\lambda x}) = F_U(1-e^{-\lambda x}).$$

Pour connaître l'expression de $F_U$ à utiliser, il faut comparer $1-e^{-\lambda x}$ avec 0 et 1. Or :

$$1-e^{-\lambda x}\geq 0 \Longleftrightarrow e^{-\lambda x}\leq 1 \Longleftrightarrow -\lambda x\leq 0 \Longleftrightarrow x\geq 0$$

qui est vrai, et

$$1-e^{-\lambda x}\leq 1 \Longleftrightarrow e^{-\lambda x}\geq 0$$

qui est certain également, donc pour tout $x\geq 0$, $1-e^{-\lambda x}\in[0;1]$ et enfin

$$F_V(x) = F_U(1-e^{-\lambda x}) = 1-e^{-\lambda x}.$$

En rassemblant, on obtient :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

et $V$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

(b) On sait simuler la loi uniforme sur $[0;1[$, et on déduit la simulation de $\mathcal{E}(\lambda)$ suivante :

```
def simulexp(lambda):
    u = rd.random()
    v = -(1/lambda)*np.log(1-u)
    return(v)
```

4. (a) Pour que le maximum soit plus petit que $x$, il faut que toutes les variables le soient, donc

$$(T_n\leq x) = \bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leq x)$$

et par indépendance des variables $X_i$, on en déduit que pour tout $x>0$ :

$$P(T_n\leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i\leq) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-e^{-x}\right) = \left(1-e^{-x}\right)^n.$$

(b) Comme chaque $X_i$ a un support égal à $\mathbb{R}_+$, leur maximum aussi prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x < 0$, $P(T_n \leq x) = 0$. On obtient finalement :

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe $C^1$ sauf peut-être en 0 (fonction nulle d'une part, opérations élémentaires de l'autre) et donc également continue sauf peut-être en 0. On étudie la continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} F_{T_n}(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} F_{T_n}(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - e^{-\lambda x})^n = (1-1)^n = 0$$

et enfin $F_{T_n}(0) = 0$, donc la fonction de répartition de $T_n$ est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$, et de classe $C^1$ sauf peut-être en 0, donc $T_n$ est à densité. On obtient une densité de $T_n$ en dérivant $F_{T_n}$ sauf en 0, valeur arbitraire, et on obtient :

$$f_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = f_n(x).$$

5. (a) On veut prouver la convergence absolue de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} dx.$$

La première intégrale converge absolument et vaut 0 (fonction nulle), la seconde est généralisée en $+\infty$ et la fonction intégrée est positive, donc la convergence absolue est équivalent à la convergence et le théorème de comparaison s'applique. On cherche un équivalent de $xf_n(x)$ en $+\infty$ :

$$(1 - e^{-x})^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad \text{donc} \quad xe^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} xe^{-x}.$$

Or d'après la partie I, question 2, pour $\lambda = 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ converge, donc par théorème de comparaison, la deuxième intégrale considérée converge, donc converge absolument, et $T_n$ admet une espérance.

(b) Pour $n = 1$ et $x \geq 0$, on a $xf_1(x) = xe^{-x}$, donc d'après la question 2,

$$E(T_1) = 0 + 1 = 1.$$

Remarque : on pouvait aussi conclure en remarquant que $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

D'autre part, pour $T_2$, on doit calculer :

$$E(T_2) = 0 + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}(1 - e^{-x}) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx.$$

Ces deux intégrales convergent bien d'après 2 à nouveau, et encore avec 2 on obtient :

$$E(T_2) = 2 \times \frac{1}{1} - 2 \times \frac{1}{2^2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

6. (a) On calcule $f'_{n+1}(x)$ : pour tout $x \geq 0$, $f_{n+1}(x) = (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n$ donc :

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= -(n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n + (n+1)e^{-x} \left(-(-e^{-x}) \times n(1 - e^{-x})^{n-1}\right) \\ &= (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} \left[-(1 - e^{-x}) + ne^{-x}\right] \\ &= (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}([n+1]e^{-x} - 1). \end{aligned}$$

On en déduit que le côté droit de l'égalité vaut :

$$-\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x) = e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}(1 - (n+1)e^{-x}).$$

D'autre part le côté gauche vaut :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x)-f_n(x) &= (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n - ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} \\ &= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\left[(n+1)(1-e^{-x})-n\right] \\ &= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\left[1-(n+1)e^{-x}\right] = -\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x). \end{aligned}$$

(b) On utilise la question précédente pour obtenir que (avec $M>0$) :

$$\int_0^M x[f_{n+1}(x)-f_n(x)]\,dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^M xf'_{n+1}(x).$$

On intègre par parties avec

$$u=x \quad \text{et} \quad v=f_{n+1}(x)$$

qui sont de classe $C^1$, avec

$$u'=1 \quad \text{et} \quad v'=f'_{n+1}(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_0^M x[f_{n+1}(x)-f_n(x)]dx &= -\frac{1}{n+1}\left([xf_{n+1}(x)]_0^M - \int_0^M f_{n+1}(x)dx\right) \\ &= -\frac{Mf_{n+1}(M)}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_0^M f_{n+1}(x)dx. \end{aligned}$$

Il reste à prendre la limite en $+\infty$. Or on a

$$\frac{Mf_{n+1}(M)}{n+1} = Me^{-M}(1-e^{-M})^n \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0\times 1^n = 0$$

par croissances comparées, et on obtient bien :

$$\int_0^{+\infty} x[f_{n+1}(x)-f_n(x)]dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

(c) En développant le côté gauche, et en remarquant que $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx = 1$ car $f_{n+1}$ est une densité et elle est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on obtient :

$$E(T_{n+1})-E(T_n) = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit, soit par télescopage, soit en itérant, que :

$$E(T_n) = E(T_{n-1})+\frac{1}{n} = E(T_{n-2})+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} = \cdots = E(T_1)+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = 1+\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

ou par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} E(T_{k+1})-E(T_k) = E(T_n)-E(T_1) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

et on conclut au même résultat.

7. $N=0$ signifie qu'aucun des $X_n$ n'est supérieur strictement à $a$, donc qu'ils sont tous inférieur ou égaux à $a$ :

$$(N=0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_k \leq a).$$

On en déduit par indépendance que :

$$\begin{aligned} P(N=0) &= \lim_{n\to+\infty} P\left[\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \leq a)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq a)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}(1-e^{-a})\right] = \lim_{n\to+\infty}(1-e^{-a})^n. \end{aligned}$$

Or avec $a > 0$ on a

$$-a < 0 \quad \text{donc} \quad 0 < e^{-a} < 1 \quad \text{et enfin } 0 < 1 - e^{-a} < 1$$

donc on obtient :

$$P(N=0) = \lim_{n\to+\infty}(1-e^{-a})^n = 0.$$

8. $(N = n)$ signifie que $X_n$ est la première variable qui dépasse $a$, ce qui signifie que toutes les précédentes sont inférieures ou égales à $a$ et que $X_n$ le dépasse donc :

$$(N=n) = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k \leq a)\right) \cap (X_n > a)$$

et par indépendance des évènements,

$$P(N=n) = (1-e^{-a})^{n-1} \times [1-(1-e^{-a})] = (1-e^{-a})^{n-1}e^{-a}.$$

9. On en déduit que $N \hookrightarrow \mathcal{G}(e^{-a})$, donc elle admet une espérance et une variance et :

$$E(N) = \frac{1}{e^{-a}} = e^a \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1-e^{-a}}{(e^{-a})^2} = e^{2a}(1-e^{-a}) = e^{2a} - e^a.$$

10. Si $N \neq 0$, $N$ est la première valeur de $n$ telle que $X_n > a$, donc $X_N$, qui représente la valeur de $X_n$ pour $N = n$, est strictement supérieure à $a$.

La seule possibilité d'obtenir $(X_N \leq a)$ est donc $N = 0$, d'où

$$(X_N \leq a) = (N = 0) \quad \text{et} \quad P(X_N \leq a) = P(N=0) = 0.$$

11. Soit $x \in ]a; +\infty[$.

(a) Si $n = 1$, $N = n$ signifie exactement que $X_1 > a$, et comme $x > a$ on a bien :

$$\begin{aligned} [(N=1)\cap(Z \leq x)] &= [(N=1)\cap(X_N \leq x)] = [(N=1)\cap(X_1 \leq x)] \\ &= [(X_1 > a)\cap(X_1 \leq x)] = (a < X_1 \leq x). \end{aligned}$$

Si $n \geq 2$, on a vu que

$$(N=n) = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k \leq a)\right) \cap (X_n > a) = (T_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a)$$

d'après la décomposition de $(T_n \leq x)$ vue à la question 4. On a alors :

$$\begin{aligned} [(N=n)\cap(Z \leq x)] &= [(N=n)\cap(X_N \leq x)] = [(N=n)\cap(X_n \leq x)] \\ &= (T_{n-1} \leq a)\cap(X_n > a)\cap(X_n \leq x) \\ &= (T_{n-1} \leq a)\cap(a < X_n \leq x). \end{aligned}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales on a :

$$(Z \leq x) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(N = n) \cap (Z \leq x)]$$

donc on en déduit (réunion incompatible) que :

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P[(N = n) \cap (Z \leq x)] \\ &= P(a < X_1 \leq x) + \sum_{n=2}^{+\infty} P[(T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x)]. \end{aligned}$$

Or $T_{n-1}$ ne dépend que des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ et les $X_i$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions $T_{n-1}$ et $X_n$ sont indépendantes. On obtient alors pour tout $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} P[(T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x)] &= (1 - e^{-a})^{n-1} \times [F_{X_n}(x) - F_{X_n}(a)] \\ &= (1 - e^{-a})^{n-1}(1 - e^{-x} - 1 + e^{-a}) \\ &= (e^{-a} - e^{-x})(1 - e^{-a})^{n-1}. \end{aligned}$$

Enfin on peut calculer :

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= F_{X_1}(x) - F_{X_1}(a) + (e^{-a} - e^{-x}) \sum_{n=2}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1} \\ &= 1 - e^{-x} - 1 + e^{-a} + (e^{-a} - e^{-x}) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^n \\ &= e^{-a} - e^{-x} + (e^{-a} - e^{-x}) \left( \frac{1}{1 - (1 - e^{-a})} - 1 \right) \\ &= (e^{-a} - e^{-x}) \left( 1 + \frac{1}{e^{-a}} - 1 \right) = \frac{e^{-a} - e^{-x}}{e^{-a}} = 1 - e^{-x+a}. \end{aligned}$$

12. (a) On a vu que $P(Z \leq a) = 0$, on en déduit que pour tout $x \leq a$, $P(Z \leq x) = 0$ puis

$$P(Z \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x > a \end{cases}$$

en d'autre part on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(Z - a \leq x) = (Z \leq x + a)$$

donc

$$F_{Z-a}(x) = P(Z \leq x + a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + a \leq a \\ 1 - e^{a-(x+a)} & \text{si } x + a > a \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et $Z - a$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(b) On en déduit que $Z - a$ admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(Z - a) = 1 \quad \text{et} \quad V(Z - a) = 1$$

puis par linéarité de l'espérance et quadracité de la variance, $Z$ admet également une espérance et une variance :

$$E(Z) = E(Z - a) + a = a + 1 \quad \text{et} \quad V(Z) = V(Z - a) = 1.$$