Correction - DM 15

A rendre le Mardi 12 Mars

Exercice 1 (ECRICOME 2023 Sujet 0)

1. La matrice
$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$
est de rang 2 puisque ses trois colonnes C_1, C_2, C_3 vérifient : $C_2 = -C_1$ et (C_1, C_3) libre (deux vecteurs non colinéaires).

   La matrice $A - 6I_3$ n'est donc pas inversible, donc 6 est une valeur propre de A.

   Comme $rg(A - 6I_3) = 2$, on a avec le théorème du rang que :
$$\dim(E_6(A)) = 3 - rg(A - 6I_3) = 1.$$

2. On commence par calculer U puis AU. On obtient :
$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AU = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2U.$$
Comme U est un vecteur non nul vérifiant $AU = 2U$, U est bien un vecteur propre de A et la valeur propre associée est 2.

3. (a) Montrons que $\mathscr{B} = (U, V, W)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Comme $Card(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, il suffit de vérifier que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
   Soient a, b, c trois réels tels que :
$$aU + bV + cW = 0.$$
   Par identification des coefficients, on a alors :
$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 & (L_1) \\ -2b = 0 & (L_2 - L_1) \\ -b - c = 0 & (L_3 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$
   Ainsi, la famille $\mathscr{B} = (U, V, W)$ est bien une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) On sait que $f(V) = AV = U + 2V$ par définition du vecteur U. On sait de plus que $f(U) = 2U$ puisque U est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. On calcule enfin $f(W) = AW = 6W$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (c) Comme A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, les matrices A et B sont alors semblables.
   En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, on a :
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Avec la formule de changement de bases, on a alors :
$$M_{can}(f) = P_{can,\mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B},can} \quad \text{donc} \quad A = PBP^{-1}.$$

4. La matrice B est triangulaire, donc on lit son spectre sur sa diagonale : $Sp(B) = \{2, 6\}$.
   Or, A et B sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres. En effet :
   $$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow rg(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow rg(B - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in Sp(B),$$
   en utilisant que deux matrices semblables ont même rang et que $A - \lambda I_3 = PBP^{-1} - \lambda I_3 = P(B - \lambda I_3)P^{-1}$ et donc que $A - \lambda I_3$ et $B - \lambda I_3$ sont semblables.
   Donc $Sp(A) = \{2, 6\}$ et 0 n'est donc pas valeur propre de A. Elle est donc inversible.

   Comme A et B sont semblables, A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable. On recherche donc les sous-espaces propres de B (qui est plus simple à étudier). On obtient :
   $$E_2(B) = Vect\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_6(B) = Vect\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$
   Par concaténation de familles libres (à chaque fois un vecteur non nul), $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme son cardinal est égal à 2 et donc différent $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, ce n'est pas une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et B n'est pas diagonalisable donc A n'est pas diagonalisable.

5. On peut conjecturer que, dans les cas où $x(0) = y(0)$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = y(t)$.

6. En effectuant le produit matriciel, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$AX(t) = \begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\3 & 3 & -4\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5x(t) + y(t) - 4z(t)\\3x(t) + 3y(t) - 4z(t)\\x(t) - y(t) + 2z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix} = X'(t).$$

7. On note pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Alors :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}(PBP^{-1})X(t) = BP^{-1}X(t) = BY(t).$$

8. (a) L'équation différentielle homogène $(\mathscr{E}_1)$: $\varphi' - 6\varphi = 0$ a pour ensemble de solutions :
   $$S_1 = \{t \mapsto a_1 e^{6t} \mid a_1 \in \mathbb{R}\}.$$
   (b) L'équation différentielle homogène $(\mathscr{E}_2)$: $\varphi' - 2\varphi = 0$ a pour ensemble de solutions :
   $$S_2 = \{t \mapsto a_2 e^{2t} \mid a_2 \in \mathbb{R}\}.$$
   (c) Soit c un réel. Notons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = cte^{2t}$. La fonction ψ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :
   $$\psi'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} = 2\psi(t) + ce^{2t}.$$
   Ainsi, ψ vérifie l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$.
   Comme les solutions de l'équation différentielle homogène associée $(\mathscr{E}_3)$ sont les solutions de $(\mathscr{E}_2)$, on en déduit que l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_3)$ est :
   $$S_3 = \{t \mapsto a_3 e^{2t} + cte^{2t} \mid a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

9. On a montré dans la question 7. que $Y'(t) = BY(t)$. Donc :
   $$\begin{pmatrix}\alpha'(t)\\\beta'(t)\\\gamma'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\\\gamma(t)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha'(t) = 2\alpha(t) + \beta(t)\\\beta'(t) = 2\beta(t)\\\gamma'(t) = 6\gamma(t)\end{cases}$$

10. Ainsi, γ est bien solution de $(\mathscr{E}_1)$: on peut donc dire qu'il existe un $a_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t) = a_1 e^{6t}$.
Ainsi, β est bien solution de $(\mathscr{E}_2)$: on peut donc dire qu'il existe un $a_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\beta(t) = a_2 e^{2t}$.
Alors, on obtient :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t) = 2\alpha(t) + a_2 e^{2t}.$$
Alors α est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour $c = a_2$.
On peut donc dire qu'il existe un $a_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t) = a_3 e^{2t} + a_2 t e^{2t} = (a_2 t + a_3)e^{2t}$.
Finalement, il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} (a_2 t + a_3)e^{2t} \\ a_2 e^{2t} \\ a_1 e^{6t} \end{pmatrix}.$$
Comme $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on en déduit par équivalence que $X(t) = PY(t)$ et donc par produit matriciel :
$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_2 t + a_3)e^{2t} \\ a_2 e^{2t} \\ a_1 e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a_2 t + a_2 + a_3)e^{2t} + a_1 e^{6t} \\ 2(a_2 t + a_3)e^{2t} + a_1 e^{6t} \\ (2(a_2 t + a_3) + a_2)e^{2t} \end{pmatrix}.$$
En notant $\lambda_1 = a_2, \lambda_2 = a_3$ et $\lambda_3 = a_1$, on obtient bien que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) &= (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{cases}$$

11. Avec les notations précédentes, on a :
$$\begin{cases} x_0 = x(0) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ y_0 = y(0) = 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ z_0 = z(0) = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$
ce qui donne en inversant le système que :
$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{x_0 - y_0}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{-x_0 + y_0 + 2z_0}{2} \\ \lambda_3 = \dfrac{x_0 + y_0 - 2z_0}{2} \end{cases}$$
Ce qui donne alors que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) &= \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\right)e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right)e^{6t} \\ y(t) &= \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(y_0 - x_0)\right)e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right)e^{6t} \\ z(t) &= ((x_0 - y_0)t + z_0)\,e^{2t} \end{cases}$$

12. En particulier, lorsque $x_0 = y_0$, on obtient que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = z_0 e^{2t} + (x_0 - z_0)e^{6t} \\ y(t) = z_0 e^{2t} + (x_0 - z_0)e^{6t} \\ z(t) = z_0 e^{2t} \end{cases}$$
et en particulier on a bien : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = y(t)$.

Exercice 2 (EDHEC 2012)

1. Si A est diagonalisable, alors il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   Alors $A^2 = PD^2P^{-1}$ avec D^2 diagonale. Ainsi, A^2 est semblable à une matrice diagonale et elle est donc diagonalisable.

2. (a) On calcule :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Donc
$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$
   (b) Donc $P(x) = x^4 - 1$ est annulateur de A, et λ est racine de P si $\lambda^4 = 1$, donc si et seulement si $\lambda^2 = 1$ ou -1, la deuxième étant absurde on obtient $\lambda^2 = 1$ puis $\lambda = \pm 1$.
   Finalement $Sp(A) \subset \{-1; 1\}$.
   (c) Supposons que A est diagonalisable. Il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   Comme $Sp(A) \subset \{-1; 1\}$,
$$D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad D^2 = I_3 \quad \text{donc} \quad A^2 = PD^2P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3.$$
   Or $A^2 \neq I_3$ d'après la question 2.(a). On abouti donc à une contradiction de A n'est pas diagonalisable.

3. (a) On a :
$$(x,y,z) \in Ker(g - Id) \quad \Leftrightarrow \quad (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ 3x - 8y + 5z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$
   Donc $Ker(g - Id) = Vect\,((1,1,1))$ et avec $u = (1,1,1)$ la famille (u) est génératrice de $Ker(g - Id)$ et libre car constituée d'un unique vecteur non nul, donc c'est une base de $Ker(g - Id)$.
   (b) On va travailler matriciellement en cherchant $Ker(A^2 + I)$. Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :
$$(A^2 + I)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y - z$$
$$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   donc $Ker(A^2 + I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc $Ker(g^2 + Id) = Vect\,((1,1,0), (-1,0,1))$.
   La famille $((1,1,0), (-1,0,1))$ est donc génératrice de $Ker(g^2 + Id)$ et libre (2 vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $Ker(g^2 + Id)$.
   En posant $v = (1,1,0)$ et $w = (-1,0,1)$ on a donc : (v,w) est une base de $Ker(g^2 + Id)$.

(c) On montre que la famille (u, v, w) est libre. Soient x, y, z réels,

$$xu + yv + zw = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = -x \\ z = -x \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

La famille (u, v, w) est donc une famille libre et de cardinal 3 de $\mathbb{R}^3$, avec $dim\mathbb{R}^3 = 3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) On avait $g(u) = u$ donc $g^2(u) = g(g(u)) = g(u) = u = 1u + 0v + 0w$.
Comme v et w sont des vecteurs de $Ker(g^2 + Id)$, $g^2(v) = v = 0u + 1v + 0w$ et de même $g^2(w) = 0u + 0v + 1w$.
La matrice de g^2 dans la base (u, v, w) est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(e) Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ la base (u, v, w). Avec la formule de changement de base, on a :

$$A^2 = (M_{\mathcal{B}}(g))^2 = M_{\mathcal{B}}(g^2) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(g^2) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}.$$

Donc A^2 est semblable à une matrice diagonale et elle est donc diagonalisable.
On a donc un contre-exemple de la réciproque étudiée : A^2 diagonalisable n'implique pas A diagonalisable.

Exercice 3 (EDHEC 2011)

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{array} \right.$$

Et si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$$

2. $\big\{(Y = 1), (Y = -1)\big\}$ est un système complet d'événements, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ les probabilités totales donnent :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(Y = 1) P_{(Y=1)}(Z \leq x) + P(Y = -1) P_{(Y=-1)}(Z \leq x).$$

On se ramène à X pour utiliser l'indépendance de X et Y et faire apparaître F_X :

$$F_Z(x) = P(Y = 1) P_{(Y=1)}(X \leq x) + P(Y = -1) P_{(Y=-1)}(-X \leq x).$$

On peut maintenant appliquer l'indépendance, puis on fait apparaître $P(X \leq \cdots)$:

$$F_Z(x) = P(Y = 1) P(X \leq x) + P(Y = -1) P(X \geq x)$$

et on utilise enfin la loi de Y et le passage au contraire :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}\left[P(X \leq x) + 1 - P(X \leq -x)\right] = \frac{1}{2}\left[F_X(x) + 1 - F_X(-x)\right]$$

3. (a) i. Voici le programme complété :

```
X = rd.normal( 0, 1, 10000)
Y = rd.randint(0, 2, 10000)
Y = 2*Y-1
Z = X*Y
x = np.arange(-5, 5.1, 0.1)
plt.hist(Z, x, density = 'True')
```

ii. Chaque coefficient de `Y = rd.randint(0, 2, 10000)` vaut 0 ou 1 (choisi au hasard). Donc chaque coefficient de $2Y-1$ vaut $2\times 0-1=-1$ ou $2\times 1-1=1$ (choisi au hasard). Au finalement on choisit donc 10000 nombres au hasard dans $\{-1;1\}$ donc 10000 uniformes sur $\{-1;1\}$.

iii. Les fréquences de chaque classe modale sont très proches de l'aire sous la courbe de la densité d'une normale sur $[0;1]$. Z a donc l'air de suivre une loi normale sur $[0;1]$.

(b) X est la loi normale centrée réduite, sa fonction de répartition est donc $F_X=\Phi$ et on sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$F_Z(x)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x)-(1-\Phi(x))+1\right]=\Phi(x)$$

et Z suit la loi normale centrée réduite.

4. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.

(a) Voici le programme demandé :

```
X = rd.uniform( 0, 1, 10000)
Y = rd.randint(0, 2, 10000)
Y = 2*Y-1
Z = X*Y
x = np.arange(-5, 5.1, 0.1)
plt.hist(Z, x, density = 'True')
plt.show()
```

On remarque que les classes modales sont de fréquence nulle en dehors de $[-1;1]$ et de même fréquence sur $[-1;1]$: Z semble suivre une loi uniforme sur l'intervalle $[-1;1]$.

(b) On a

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

donc

$$F_X(-x)=\begin{cases}0 & \text{si } -x<0\Leftrightarrow x>0\\ -x & \text{si } -x\in[0,1]\Leftrightarrow x\in[-1;0]\\ 1 & \text{si } -x>1\Leftrightarrow x<-1\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si } x<-1\\ -x & \text{si } x\in[-1,0]\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$$

(c) On a $F_Z(x)=\frac{1}{2}(F_X(x)-F_X(-x)+1)$, il faut alors séparer 4 cas :

- si $x<-1$,

$$F_Z(x)=\frac{1}{2}(0-1+1)=0$$

- si $x\in[-1,0]$,

$$F_Z(x)=\frac{1}{2}(0--x+1)=\frac{1+x}{2}$$

- si $x \in [0,1]$,
$$F_Z(x) = \frac{1}{2}(x - 0 + 1) = \frac{x+1}{2}$$
- si $x > 1$,
$$F_Z(x) = \frac{1}{2}(1 - 0 + 1) = 1$$

Finalement en rassemblant les deux cas du milieu :
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
et on reconnait la fonction de répartition de $\mathcal{U}_{[-1,1]}$ donc
$$Z \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,1]}.$$

5. (a) On a
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad F_X(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases}$$
ce qui donne :
$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \frac{1}{2}(F_X(x) - F_X(-x) + 1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[0 - (1 - e^x) + 1\right] & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x} - 0 + 1\right] & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) La fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en 0.
Par opérations élémentaires, la fonction $x \to F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) + 1 - F_X(-x)\right)$ est également continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sauf peut-être en 0, et Z est bien une variable à densité.
Remarque. On pouvait aussi (mais ça demandait un calcul explicite de limite en 0 pour la continuité) utiliser l'expression obtenue à la question a.

(c) On obtient alors une densité de Z en dérivant F_Z sauf aux points où elle n'est pas de classe C^1 (ici le point 0) où on donne une valeur arbitraire (on la rassemble avec un des deux cas, ici $x > 0$) :
$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

(d) On reconnaît l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1 donc l'intégrale converge et :
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \frac{1}{1} = 1.$$

(e) Le domaine de définition de f_Z, $\mathbb{R}$, est centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f_Z(-x) = \frac{1}{2}e^{-|-x|} = \frac{1}{2}e^{-|x|} = f_Z(x)$$
Donc f_Z est bien paire, et la fonction $x \to xf_Z(x)$ est donc impaire.
Or $\int_0^{+\infty} xf_Z(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$ converge d'après 5.(d) donc converge absolument car c'est une intégrale de fonction positive.
Par imparité $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_Z(x)\, dx$ converge absolument et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_Z(x)\, dx = 0$$
D'où Z admet une espérance et $E(Z) = 0$.

6. (a) On reconnaît le moment d'ordre deux d'une loi exponentielle de paramètre 1.
   Avec $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$ on a par théorème de Koenig-Huygens :
   $$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 2.$$
   (b) f_Z est paire, donc la fonction $x \to x^2 f_Z(x)$ est paire.
   Or $\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx$ converge d'après 5.(d) donc converge absolument car c'est une intégrale de fonction positive.
   Par imparité, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\ dx$ converge absolument et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx = 2$$
   D'où par théorème de transfert Z^2 admet une espérance et une variance et avec Keonig-Huygens :
   $$E(Z^2) = 2 \quad \text{et } V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 2.$$

7. (a) X suit la loi exponentielle de paramètre 1 donc admet une espérance qui vaut 1 et Y est finie donc admet une espérance et :
   $$E(Y) = -1P(Y=-1) + 1P(Y=1) = 0 \quad \text{donc} \quad E(X)E(Y) = 0 = E(Z).$$
   On retrouve le résultat connu pour deux variables discrètes **indépendantes** : l'espérance du produit est le produit des espérances.
   (b) On a $Z^2 = X^2Y^2$ avec $Y = \pm 1$ donc $Y^2 = 1$ et $Z^2 = X^2$.
   On a donc avec Koenig-Huygens :
   $$E(Z^2) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 2$$
   et
   $$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 2.$$

8. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0,1[$
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$F_Q(x) = P(Q \leq x) = P(-\ln(1-V) \leq x) = P(1-V \geq e^{-x}) = P(V \leq 1-e^{-x}) = F_V(1-e^{-x}).$$
   donc en remplaçant :
   $$F_Q(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } 1-e^{-x} < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } 1-e^{-x} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } 1-e^{-x} > 1 \end{array}\right.$$
   On résout les inéquations :
   $$1-e^{-x} < 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ donc } 1-e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$
   et
   $$1-e^{-x} > 1 \Leftrightarrow e^{-x} < 0 \text{ est absurde donc } 1-e^{-x} \leq 1 \text{ est toujours vraie}$$
   et enfin :
   $$F_Q(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{array}\right.$$
   On reconnaît alors la loi de Q : Q est une variable à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(b) R est une variable aléatoire discrète, avec $R(\Omega) = \{2 \times 0 - 1; 2 \times 1 - 1\} = \{-1; 1\}$ et :

$$P(R = 1) = P(2U - 1 = 1) = P(2U = 2) = P(U = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et}$$

$$P(R = -1) = P(2U - 1 = -1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$$

On reconnaît la loi de Y.

(c) On simule $\mathcal{U}_{[0;1[}$ par `v = rd.random()` et $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ par `u = np.floor(2*rd.random())`. Ensuite, on simule $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ par `q = -np.log(1-v)` et la loi de Y par `r = 2*u-1`. Et enfin on a $Z = XY$ donc on la simule par $q \times r$.

```python
def simulation_Z():
    v = rd.random()
    q = -np.log(1-v)
    u = np.floor(2*rd.random())
    r = 2*u-1
    return(q*r)
```