

Correction - DM 15

## A rendre le Vendredi 7 Mars

### Exercice 1 (ECRICOME 2010)

1. On applique la méthode du pivot à la matrice  $M_a - \lambda I$  :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a+2-\lambda & -(2a+1) & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ a+2-\lambda & -(2a+1) & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ (L_2 \leftrightarrow L_3) \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda(a+2-\lambda) - (2a+1) & a \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 - (a+2-\lambda)L_1) \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & a + \lambda[\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1)] \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_3 - [\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1)] L_2
 \end{aligned}$$

Cette réduite triangulaire n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= a + \lambda[\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1)] = a + \lambda[a\lambda + 2\lambda - \lambda^2 - (2a+1)] \\
 &= -\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 - (2a+1)\lambda + a = -Q(\lambda)
 \end{aligned}$$

est nul. Les valeurs propres de  $M_a$  sont donc les racines de  $Q$ .

2. On calcule :

$$Q(1) = 1 - (a+2) + (2a+1) - a = 1 - a - 2 + 2a + 1 - a = 0.$$

donc  $\lambda = 1$  est une racine de  $Q$ .

3. On en déduit que  $Q(x)$  se factorise par  $x - 1$  :

$$Q(x) = (x-1)(bx^2 + cx + d).$$

On développe et on identifie :

$$Q(x) = bx^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x - d = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

donc :

$$\begin{cases} b = 1 \\ c - b = -a - 2 \Leftrightarrow c = -a - 2 + b = -a - 2 + 1 = -a - 1 \\ d - c = 2a + 1 \Leftrightarrow d = 2a + 1 - a - 1 = a \\ d = a \end{cases}$$

On obtient :

$$Q(x) = (x-1)[x^2 - (a+1)x + a]$$

donc

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (déjà vue) ou } x^2 - (a+1)x + a.$$

On calcule le discriminant de ce polynôme du second degré et on discute selon son signe :

$$\Delta = (a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

Il y a deux possibilités :

- Si  $a = 1$ , alors  $\Delta = 0$  et il y a une seule solution (double)

$$\lambda = \frac{a+1}{2} = 1$$

donc  $Q$  a une seule racine :  $\lambda = 1$ .

- Si  $a \neq 1$ , alors  $\Delta > 0$  et il y a deux solutions :

$$\lambda_1 = \frac{a+1-(a-1)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{a+1+a-1}{2} = a.$$

Il y a donc au total deux racines pour  $Q$  : 1 et  $a \neq 1$ .

4. Si  $a = 1$ , l'unique valeur propre de  $M_1$  est 1. On prouve alors par l'absurde que  $M_1$  n'est pas diagonalisable.

Supposons que  $M_1$  est diagonalisable. Comme sa seule valeur propre est 1, elle est semblable à la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :  $I$ .

D'où il existe  $P$  inversible tel que  $M_1 = PIP^{-1} = I$ , ce qui est absurde car  $M_1 \neq I$ .

On en déduit que  $M_1$  n'est pas diagonalisable.

5. Il y a trois vecteurs de  $E$  qui est de dimension 3. Il suffit donc de prouver que la famille est libre. On résout le système  $xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0$  :

$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Leftrightarrow (xa^2 + y + 2z)e_1 + (xa + y + z)e_2 + (x + y)e_3 = 0$$

et comme  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$  :

$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ (1 - a^2)y + 2z = 0 \\ (1 - a)y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ (1 - a)y + z = 0 \\ [2 - (1 + a)]z = 0 \end{cases}$$

Or  $1 - a \neq 0$  puisqu'on a supposé  $a \neq 1$ , donc on obtient  $x = y = z = 0$ , et la famille  $\mathcal{B}'$  est libre et admet trois vecteurs en dimension 3 : c'est une base de  $E$ .

6. On passe par la matrice et les vecteurs colonnes associés dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$M_a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc  $f_a(e'_1) = ae'_1$ .

7. Calculons  $f_a(F)$  et vérifions que  $f_a(F) \subset F$  : comme  $F$  admet pour base  $(e'_2, e'_3)$  on sait que

$$f_a(F) = \text{Vect}(f_a(e'_2), f_a(e'_3))$$

qu'on calcule :

$$M_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$f_a(e'_2) = e'_2 \quad \text{et} \quad f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$$

puis

$$f_a(F) = \text{Vect}(e'_2, e'_2 + e'_3) = \text{Vect}(e'_2, e'_3) = F$$

avec l'opération de pivot  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ .

On en déduit bien que  $f_a(F) \subset F$  (on a même prouvé l'égalité).

Remarque : on pouvait aussi prendre un vecteur quelconque de  $F$  sous la forme  $\alpha e'_2 + \beta e'_3$ , calculer son image et montrer qu'elle appartient à  $F$ .

8. On vient de calculer  $f_a(e'_1) = ae'_1$ ,  $f_a(e'_2) = e'_2$  et  $f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$  donc :

$$T_a = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \geq 0$ ,  $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Ini.**  $T^0 = I$  donc la propriété est vraie au rang 0.

**Héré.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a alors :

$$T^{n+1} = TT^n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

**Ccl.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. On calcule en partant du plus compliqué :

$$M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

11. En préalable, la formule de changement de base donne :

$$M_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_2) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_2 T_2 P_2^{-1}.$$

Montrons à présent par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$  :

**Ini.**  $P_2 T_2^0 P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P_2 P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$  donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

**Héré.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2 P_2^{-1} P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P_2 T_2^{n+1} P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

et la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

**Ccl.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

12. Avec des pivots de Gauss, on obtient

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

puis on calcule

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2 P_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 3 \times 2^n - 5n - 2 \end{pmatrix}$$

et on peut conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2$$

13. On factorise par le terme prépondérant :

$$u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2 = 3 \times 2^n \left( 1 - \frac{5n}{3 \times 2^n} - \frac{2}{3 \times 2^n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

par croissances comparées d'une suite puissance et d'une suite géométrique, et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc divergente.

14. (a) Voici le programme demandé :

```

1 | M = np.array([[4, -5, 2], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
2 | X = np.zeros((3,20))
3 | X[0, 0] = 7
4 | X[2, 0] = -1
5 | for n in range(1,20):
6 |     X[:, n] = np.dot(M, X[:, n-1])

```

(b) La troisième ligne de la matrice  $X$  contient les termes successifs de la suite  $(u_n)$  c'est-à-dire que le coefficient numéro  $k$  contient  $u_k$ .

On obtient donc la représentation graphique de la suite  $(u_n)$ . On remarque qu'elle a l'air de diverger très rapidement vers  $+\infty$ . Ceci est cohérent car  $u_n \sim 3 \times 2^n = 3e^{n \ln(2)}$  donc que la croissance est exponentielle.

**Exercice 2 (EML 2010)**

1. Une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est symétrique si et seulement si  $b = c$ , c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = aF + bG + dH$$

donc  $\mathcal{S}_2 = Vect(F, G, H)$  est un sous-espace vectoriel, et  $(F, G, H)$  en est une famille génératrice.

On résout ensuite :

$$aF + bG + cH = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = d = 0$$

donc la famille  $(F, G, H)$  est libre.

Comme  $(F, G, H)$  est une famille libre et génératrice de  $\mathcal{S}_2$ , c'est donc une base de  $\mathcal{S}_2$  et  $card(F, G, h) = 3 = dim(\mathcal{S}_2)$ .

2. (a) Soit  $S = aF + bG + cH = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$ . Alors

$$u(S) = \begin{pmatrix} 4c & 4b + 6c \\ 4b + 6c & 4a + 12b + 9c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$$

car on reconnaît une matrice symétrique.

(b) Soit  $S$  et  $T$  dans  $\mathcal{S}_2$  et  $\lambda$  un réel, on a :

$$u(\lambda S + T) = A(\lambda S + T)A = (\lambda AS + AT)A = \lambda ASA + ATA = \lambda u(S) + u(T)$$

donc  $u$  est linéaire, et c'est une application de  $\mathcal{S}_2$  dans  $\mathcal{S}_2$  d'après la question précédente, donc c'est un endomorphisme de  $\mathcal{S}_2$ .

(c) On calcule :

$$AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4H, \quad AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4G + 12H \quad \text{et} \quad AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4F + 6G + 9H.$$

(d) D'après la question 2.(c) on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Montrons que la famille  $\mathcal{B}$  est libre. On résout l'équation (E)  $aB + bC + cE = 0$  d'inconnues  $a$ ,  $b$  et  $c$  réels :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4a + 4b + c & 3a - 2b + 2c \\ 3a - 2b + 2c & -4a + b + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 4b + c = 0 \\ 3a - 2b + 2c = 0 \\ -4a + b + 4c = 0 \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode du pivot, on obtient  $a = b = c = 0$ .

Ainsi, la famille  $\mathcal{B}$  est libre à  $3 = \dim(\mathcal{S}_2)$  vecteurs donc c'est une base de  $\mathcal{S}_2$ .

Enfin, la matrice demandée est  $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

4.  $u(B) = ABA = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} = -4B.$

$u(C) = ACA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = C.$

$u(E) = AEA = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 32 & 64 \end{pmatrix} = 16E.$

Donc  $D = M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$

Avec la formule de changement de bases, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \Leftrightarrow M = PDP^{-1}.$$

5. D'après l'égalité  $M = PDP^{-1}$ , on sait que  $-4$ ,  $1$  et  $16$  sont les valeurs propres de  $M$  et que

$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres respectivement associés à chacune de ces valeurs propres.

Or le vecteur  $\begin{pmatrix} -0.2182179 \\ -0.4364358 \\ -0.8728716 \end{pmatrix}$  est colinéaire à  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  donc c'est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 16 (car  $E_{16}(M)$  est un espace vectoriel donc stable par multiplication par un scalaire).

De même, les vecteurs  $\begin{pmatrix} -0.8728716 \\ 0.4364358 \\ -0.2182179 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -0.6246950 \\ -0.4685213 \\ 0.6246950 \end{pmatrix}$  sont respectivement colinéaires à  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et à  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$  donc sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives 1 et  $-4$ .

On a donc bien dans  $P$  une base de vecteurs propres et dans  $D$  les valeurs propres associées dans le bon ordre.

6. On fait les calculs : c'est un produit de matrices diagonales, assez rapide.

7. En développant, on en déduit que

$$D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$$

Pour faire apparaître  $M$ , on multiplie par  $P$  à gauche et  $P^{-1}$  à droite :

$$P(D^3 - 13D^2 - 52D + 64I)P^{-1} = P0P^{-1} = 0,$$

donc

$$PD^3P^{-1} - 13PD^2P^{-1} - 52PDP^{-1} + 64PIP^{-1} = 0.$$

De plus, on montre que  $PD^nP^{-1} = M^n$  par récurrence (ou seulement sur les quelques cas particuliers ici). On a alors :

$$M^3 - 13M^2 - 52M + 64I = 0 \quad \text{et enfin} \quad M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$$

8. La relation précédente se réécrit :

$$[M_{\mathcal{B}}(u)]^3 = 13 [M_{\mathcal{B}}(u)]^2 + 52 [M_{\mathcal{B}}(u)] - 64 [M_{\mathcal{B}}(e)]$$

donc

$$[M_{\mathcal{B}}(u^3)] = 13 [M_{\mathcal{B}}(u^2)] + 52 [M_{\mathcal{B}}(u)] - 64 [M_{\mathcal{B}}(e)]$$

et enfin

$$[M_{\mathcal{B}}(u^3)] = [M_{\mathcal{B}}(13u^2 + 52u - 64e)]$$

Par l'isomorphisme existant entre les applications linéaires et les matrices, une base étant fixée, on en déduit :

$$u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$$

### Exercice 3 (EML 2015)

1. D'après le cours, une densité et la fonction de répartition d'une variable  $X$  suivant  $\mathcal{E}(\lambda)$  sont données par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

De plus, cette variable admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. On reconnaît la densité plus l'espérance de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , ces intégrales convergent donc et on fait apparaître proprement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \times 1 = \frac{1}{\lambda}$$

d'une part, et d'autre part :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \times E(X) = \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. (a) On sait que  $U(\Omega) = [0; 1[$ , donc  $(1 - U)(\Omega) = ]0; 1]$ ,  $\ln(1 - U)(\Omega) = ]-\infty; 0]$  et enfin

$$V(\Omega) = \left( -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \right) (\Omega) = [0; +\infty[.$$

On en déduit que pour tout  $x < 0$ ,  $F_V(x) = P(V \leq x) = 0$ . D'autre part, pour  $x \geq 0$ , par stricte croissance de l'exponentielle,

$$(V \leq x) = [\ln(1 - U) \geq -\lambda x] = [1 - U \geq e^{-\lambda x}] = (U \leq 1 - e^{-\lambda x})$$

donc on en déduit que

$$F_V(x) = P(V \leq x) = P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = F_U(1 - e^{-\lambda x}).$$

Pour connaître l'expression de  $F_U$  à utiliser, il faut comparer  $1 - e^{-\lambda x}$  avec 0 et 1. Or :

$$1 - e^{-\lambda x} \geq 0 \iff e^{-\lambda x} \leq 1 \iff -\lambda x \leq 0 \iff x \geq 0$$

qui est vrai, et

$$1 - e^{-\lambda x} \leq 1 \iff e^{-\lambda x} \geq 0$$

qui est certain également, donc pour tout  $x \geq 0$ ,  $1 - e^{-\lambda x} \in [0; 1]$  et enfin

$$F_V(x) = F_U(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

En rassemblant, on obtient :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et  $V$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

- (b) On sait simuler la loi uniforme sur  $[0; 1[$ , et on déduit la simulation de  $\mathcal{E}(\lambda)$  suivante :

```

1 | def simulexp(lambda):
2 |     u = rd.random()
3 |     v = -(1/lambda)*np.log(1-u)
4 |     return(v)

```

4. (a) Pour que le maximum soit plus petit que  $x$ , il faut que toutes les variables le soient, donc

$$(T_n \leq x) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)$$

et par indépendance des variables  $X_i$ , on en déduit que pour tout  $x > 0$  :

$$P(T_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-x}) = (1 - e^{-x})^n.$$

- (b) Comme chaque  $X_i$  a un support égal à  $\mathbb{R}_+$ , leur maximum aussi prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , donc pour tout  $x < 0$ ,  $P(T_n \leq x) = 0$ . On obtient finalement :

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe  $C^1$  sauf peut-être en 0 (fonction nulle d'une part, opérations élémentaires de l'autre) et donc également continue sauf peut-être en 0. On étudie la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{T_n}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_{T_n}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-\lambda x})^n = (1 - 1)^n = 0$$

et enfin  $F_{T_n}(0) = 0$ , donc la fonction de répartition de  $T_n$  est continue en 0 et finalement sur  $\mathbb{R}$ , et de classe  $C^1$  sauf peut-être en 0, donc  $T_n$  est à densité. On obtient une densité de  $T_n$  en dérivant  $F_{T_n}$  sauf en 0, valeur arbitraire, et on obtient :

$$f_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = f_n(x).$$

5. (a) On veut prouver la convergence absolue de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} dx.$$

La première intégrale converge absolument et vaut 0 (fonction nulle), la seconde est généralisée en  $+\infty$  et la fonction intégrée est positive, donc la convergence absolue est équivalent à la convergence et le théorème de comparaison s'applique. On cherche un équivalent de  $x f_n(x)$  en  $+\infty$  :

$$(1 - e^{-x})^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \text{donc} \quad x e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} x e^{-x}.$$

Or d'après la partie I, question 2, pour  $\lambda = 1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$  converge, donc par théorème de comparaison, la deuxième intégrale considérée converge, donc converge absolument, et  $T_n$  admet une espérance.

- (b) Pour  $n = 1$  et  $x \geq 0$ , on a  $x f_1(x) = x e^{-x}$ , donc d'après la question 2,

$$E(T_1) = 0 + 1 = 1.$$

Remarque : on pouvait aussi conclure en remarquant que  $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ .

D'autre part, pour  $T_2$ , on doit calculer :

$$E(T_2) = 0 + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} (1 - e^{-x}) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx.$$

Ces deux intégrales convergent bien d'après 2 à nouveau, et encore avec 2 on obtient :

$$E(T_2) = 2 \times \frac{1}{1} - 2 \times \frac{1}{2^2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

6. (a) On calcule  $f'_{n+1}(x)$  : pour tout  $x \geq 0$ ,  $f_{n+1}(x) = (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n$  donc :

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= -(n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n + (n+1)e^{-x}(-(-e^{-x}) \times n(1 - e^{-x})^{n-1}) \\ &= (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} [-(1 - e^{-x}) + ne^{-x}] \\ &= (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}([n+1]e^{-x} - 1). \end{aligned}$$

On en déduit que le côté droit de l'égalité vaut :

$$-\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x) = e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}(1 - (n+1)e^{-x}).$$

D'autre part le côté gauche vaut :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n - ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} \\ &= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} [(n+1)(1-e^{-x}) - n] \\ &= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} [1 - (n+1)e^{-x}] = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x). \end{aligned}$$

(b) On utilise la question précédente pour obtenir que (avec  $M > 0$ ) :

$$\int_0^M x[f_{n+1}(x) - f_n(x)] dx = -\frac{1}{n+1} \int_0^M x f'_{n+1}(x) dx.$$

On intègre par parties avec

$$u = x \quad \text{et} \quad v = f_{n+1}(x)$$

qui sont de classe  $C^1$ , avec

$$u' = 1 \quad \text{et} \quad v' = f'_{n+1}(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_0^M x[f_{n+1}(x) - f_n(x)] dx &= -\frac{1}{n+1} \left( [x f_{n+1}(x)]_0^M - \int_0^M f_{n+1}(x) dx \right) \\ &= -\frac{M f_{n+1}(M)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^M f_{n+1}(x) dx. \end{aligned}$$

Il reste à prendre la limite en  $+\infty$ . Or on a

$$\frac{M f_{n+1}(M)}{n+1} = M e^{-M} (1 - e^{-M})^n \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \times 1^n = 0$$

par croissances comparées, et on obtient bien :

$$\int_0^{+\infty} x[f_{n+1}(x) - f_n(x)] dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx.$$

(c) En développant le côté gauche, et en remarquant que  $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx = 1$  car  $f_{n+1}$  est une densité et elle est nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , on obtient :

$$E(T_{n+1}) - E(T_n) = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit, soit par télescopage, soit en itérant, que :

$$E(T_n) = E(T_{n-1}) + \frac{1}{n} = E(T_{n-2}) + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \dots = E(T_1) + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

ou par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} E(T_{k+1}) - E(T_k) = E(T_n) - E(T_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

et on conclut au même résultat.

7.  $N = 0$  signifie qu'aucun des  $X_n$  n'est supérieur strictement à  $a$ , donc qu'ils sont tous inférieurs ou égaux à  $a$  :

$$(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a).$$

On en déduit par indépendance que :

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left[ \bigcap_{k=1}^n (X_k \leq a) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \prod_{k=1}^n P(X_k \leq a) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \prod_{k=1}^n (1 - e^{-a}) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-a})^n. \end{aligned}$$

Or avec  $a > 0$  on a

$$-a < 0 \quad \text{donc} \quad 0 < e^{-a} < 1 \quad \text{et enfin} \quad 0 < 1 - e^{-a} < 1$$

donc on obtient :

$$P(N = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-a})^n = 0.$$

8.  $(N = n)$  signifie que  $X_n$  est la première variable qui dépasse  $a$ , ce qui signifie que toutes les précédentes sont inférieures ou égales à  $a$  et que  $X_n$  le dépasse donc :

$$(N = n) = \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \leq a) \right) \cap (X_n > a)$$

et par indépendance des évènements,

$$P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} \times [1 - (1 - e^{-a})] = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}.$$

9. On en déduit que  $N \hookrightarrow \mathcal{G}(e^{-a})$ , donc elle admet une espérance et une variance et :

$$E(N) = \frac{1}{e^{-a}} = e^a \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1 - e^{-a}}{(e^{-a})^2} = e^{2a}(1 - e^{-a}) = e^{2a} - e^a.$$

10. Si  $N \neq 0$ ,  $N$  est la première valeur de  $n$  telle que  $X_n > a$ , donc  $X_N$ , qui représente la valeur de  $X_n$  pour  $N = n$ , est strictement supérieure à  $a$ .

La seule possibilité d'obtenir  $(X_N \leq a)$  est donc  $N = 0$ , d'où

$$(X_N \leq a) = (N = 0) \quad \text{et} \quad P(X_N \leq a) = P(N = 0) = 0.$$

11. Soit  $x \in ]a; +\infty[$ .

- (a) Si  $n = 1$ ,  $N = n$  signifie exactement que  $X_1 > a$ , et comme  $x > a$  on a bien :

$$\begin{aligned} [(N = 1) \cap (Z \leq x)] &= [(N = 1) \cap (X_N \leq x)] = [(N = 1) \cap (X_1 \leq x)] \\ &= [(X_1 > a) \cap (X_1 \leq x)] = (a < X_1 \leq x). \end{aligned}$$

Si  $n \geq 2$ , on a vu que

$$(N = n) = \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \leq a) \right) \cap (X_n > a) = (T_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a)$$

d'après la décomposition de  $(T_n \leq x)$  vue à la question 4. On a alors :

$$\begin{aligned} [(N = n) \cap (Z \leq x)] &= [(N = n) \cap (X_N \leq x)] = [(N = n) \cap (X_n \leq x)] \\ &= (T_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a) \cap (X_n \leq x) \\ &= (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x). \end{aligned}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales on a :

$$(Z \leq x) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(N = n) \cap (Z \leq x)]$$

donc on en déduit (réunion incompatible) que :

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P[(N = n) \cap (Z \leq x)] \\ &= P(a < X_1 \leq x) + \sum_{n=2}^{+\infty} P[(T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x)]. \end{aligned}$$

Or  $T_{n-1}$  ne dépend que des variables  $X_1, \dots, X_{n-1}$  et les  $X_i$  sont indépendantes, donc par lemme des coalitions  $T_{n-1}$  et  $X_n$  sont indépendantes. On obtient alors pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} P[(T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x)] &= (1 - e^{-a})^{n-1} \times [F_{X_n}(x) - F_{X_n}(a)] \\ &= (1 - e^{-a})^{n-1} (1 - e^{-x} - 1 + e^{-a}) \\ &= (e^{-a} - e^{-x})(1 - e^{-a})^{n-1}. \end{aligned}$$

Enfin on peut calculer :

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= F_{X_1}(x) - F_{X_1}(a) + (e^{-a} - e^{-x}) \sum_{n=2}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1} \\ &= 1 - e^{-x} - 1 + e^{-a} + (e^{-a} - e^{-x}) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^n \\ &= e^{-a} - e^{-x} + (e^{-a} - e^{-x}) \left( \frac{1}{1 - (1 - e^{-a})} - 1 \right) \\ &= (e^{-a} - e^{-x}) \left( 1 + \frac{1}{e^{-a}} - 1 \right) = \frac{e^{-a} - e^{-x}}{e^{-a}} = 1 - e^{-x+a}. \end{aligned}$$

12. (a) On a vu que  $P(Z \leq a) = 0$ , on en déduit que pour tout  $x \leq a$ ,  $P(Z \leq x) = 0$  puis

$$P(Z \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x > a \end{cases}$$

en d'autre part on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(Z - a \leq x) = (Z \leq x + a)$$

donc

$$F_{Z-a}(x) = P(Z \leq x + a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + a \leq a \\ 1 - e^{a-(x+a)} & \text{si } x + a > a \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et  $Z - a$  suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(b) On en déduit que  $Z - a$  admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(Z - a) = 1 \quad \text{et} \quad V(Z - a) = 1$$

puis par linéarité de l'espérance et quadraticité de la variance,  $Z$  admet également une espérance et une variance :

$$E(Z) = E(Z - a) + a = a + 1 \quad \text{et} \quad V(Z) = V(Z - a) = 1.$$