

A rendre le Mercredi 20 Mars

Exercice 1 (EML 2014)

1. (a) $(X_3 = 4)$: "les 3 premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante", donc ici forcément $(3, 2, 1)$, et $N_4 \geq N_3$.

Comme $N_3 = 1$ implique $N_4 \geq N_3$, il nous reste juste

$$(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)$$

et donc, puisque les tirages se font sans remise dans l'urne où il y a 3 boules,

$$P(X_3 = 4) = P(3, 2, 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

- (b) $(X_3 = 2)$ signifie que, dès le deuxième tirage, on a obtenu un résultat supérieur ou égal au premier. On a donc, en notant $(1, 3)$ l'évènement $(N_1 = 1) \cap (N_2 = 3)$:

$$P(X_3 = 2) = P((1, 1) \cup (1, 2) \cup (1, 3) \cup (2, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 3)) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

X_3 prend ses valeurs dans $\{2; 3; 4\}$, donc :

$$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{27 - 18 - 1}{27} = \frac{8}{27}.$$

$$2. E(X_3) = 2 \cdot P(X_3 = 2) + 3 \cdot P(X_3 = 3) + 4 \cdot P(X_3 = 4) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{8}{27} + 4 \cdot \frac{1}{27} = \frac{36 + 24 + 4}{27} = \frac{64}{27}.$$

3. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, N_k peut prendre les valeurs de 1 à n et si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(N_k = j) = \frac{1}{n}$.

On reconnaît une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $E(N_k) = \frac{n+1}{2}$ et $V(N_k) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

4. Comme à la question 1, $(X_n = n+1)$: "les n premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante", donc ici forcément $(n, n-1, \dots, 1)$, et $N_{n+1} \geq N_n$.

Il nous reste alors : $(X_n = n+1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n-1) \cap \dots \cap (N_n = 1)$ et donc, grâce à l'indépendance des tirages :

$$P(X_n = n+1) = P(N_1 = n) \cdot P(N_2 = n-1) \dots P(N_n = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

5. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sachant $(N_1 = i)$, l'évènement $(X_n = 2)$ sera réalisé si et seulement si on a $N_2 \geq i$, c'est à dire si on ne tire pas un des numéros $1, 2, \dots, i-1$.

Par conséquent, $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - (i-1)}{n}$.

6. La formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements $\{(N_1 = i)\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ nous donne alors

$$\begin{aligned} P(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^n P(N_1 = i) P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n - (i-1)}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n n - (i-1) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) = \frac{1}{n^2} \left(n \cdot n - \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{n} \left(n - \frac{(n+1)}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

7. $X_n > k$ lorsque les k premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante, c'est à dire si $N_1 > N_2 > \dots > N_k$. Parmi les cas possibles (qui sont des suites de $n + 1$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$), les cas favorables à $(X_n > k)$ sont constitués d'une suite strictement décroissante de k numéros et d'une suite de $n + 1 - k$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Par exemple pour $n = 10$ et $k = 4$, $(9, 8, 5, 4, 4, 3, 7, 7, 5, 6, 10)$ est un des cas favorables à $(X_{10} > 4)$.

Le nombre des cas possibles est bien entendu n^{n+1} . Et comme il y a autant de suites strictement décroissantes de k numéros de $\llbracket 1, n \rrbracket$ que de parties à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est à dire $\binom{n}{k}$, le nombre des cas favorables à $(X_n > k)$ est $\binom{n}{k} \cdot n^{n+1-k}$.

On obtient enfin le résultat proposé : $P(X_n > k) = \frac{\binom{n}{k} \cdot n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Pour $k = 0$ et $k = 1$, la formule reste valable puisque $P(X_n > 0) = P(X_n > 1) = 1$ alors que $\frac{\binom{n}{0}}{n^0} = \frac{1}{1}$ et $\frac{\binom{n}{1}}{n^1} = \frac{n}{n} = 1$.

8. De façon classique, $(X_n > k - 1) = (X_n = k) \cup (X_n > k)$.

Donc par incompatibilité $P(X_n = k) = P(X_n > k - 1) - P(X_n > k)$.

9. On a :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot P(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot P(X_n > k - 1) - k \cdot P(X_n > k) \\ &= \sum_{h=1}^n (h + 1) \cdot P(X_n > h) - \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot P(X_n > k) \\ &= [2 \cdot P(X_n > 1) + \sum_{h=2}^n (h + 1) \cdot P(X_n > h)] \\ &\quad - [\sum_{k=2}^n k \cdot P(X_n > k) - (n + 1) \cdot P(X_n > n + 1)] \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n (k + 1 - k) \cdot P(X_n > k) - (n + 1) \cdot 0 \\ &= P(X_n > 0) + P(X_n > 1) + \sum_{k=2}^n P(X_n > k) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k) \end{aligned}$$

On a donc

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n.$$

10. On a :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n > k - 1) - P(X_n > k) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \\ &= \frac{n!}{n^{k-1}(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{n^k k!(n-k)!} \\ &= n! \left(\frac{nk - (n-k+1)}{n^k (k)!(n-k+1)!} \right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} &= \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1) \cdot n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n! (n+1) \cdot (k-1)}{n^k k!(n+1-k)!} = \frac{n! (nk + k - n - 1)}{n^k k!(n+1-k)!}. \end{aligned}$$

$$11. P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} = \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1)n \dots (n-(k-2))}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k-1}{n^k} \frac{n^k}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k-1}{k!}.$$

12. Ce sont des séries exponentielles donc convergentes, et on a :

$$\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k \geq 2} \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} - \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} = (e-1) - (e-2) = 1.$$

On a vérifié ainsi que la suite $(\frac{k-1}{k!})_{k \geq 2}$ définit bien une loi de probabilité.

13. On a d'une part :

$$E(Z) = \sum_{k \geq 2} k.P(Z = k) = \sum_{k \geq 2} k \frac{k-1}{k!} = \sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = e$$

D'autre part, $E(X_n) = (1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n}))$. Or $n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = e$.

La suite $(X_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers la variable Z et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(Z)$.

Exercice 2 (EML 2010)

1. X_1 suit la loi géométrique de paramètre p , donc admet une espérance et une variance et

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, P(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p, E(X_1) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. $(X_1 = k)_{k \geq 1}$ est un système complet d'évènements donc par formule des probabilités totales puis par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$P(\Delta = 0) = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$$

puis avec la loi géométrique :

$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} [(1-p)^2]^{k-1} p^2 = p^2 \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2-p}.$$

3. (a) On a $(X_1 - X_2 = n) = (X_1 = X_2 + n)$ et avec le système complet d'évènements $(X_2 = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les probabilités totales donnent :

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_2 = k) \cap (X_1 = n + k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k)$$

par indépendance de X_1 et X_2 .

(b) Par symétrie, on a $P(X_2 - X_1 = n) = P(X_1 - X_2 = n)$. De plus

$$(\Delta = n) = (X_1 - X_2 = n) \cup (X_2 - X_1 = n)$$

évènements incompatibles car $n \neq 0$ donc

$$P(\Delta = n) = P(X_1 - X_2 = n) + P(X_2 - X_1 = n) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k)$$

$$P(\Delta = n) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{n+k-1} p = 2p^2 (1-p)^{n-2} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k}$$

et enfin

$$P(\Delta = n) = 2p^2 (1-p)^{n-2} (1-p)^2 \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{2p^2 q^n}{(1-q)(1+q)} = \frac{2pq^n}{1+q}.$$

4. (a) Sous réserve de convergence absolue,

$$E(\Delta) = 0 \times \frac{p}{2-p} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{2pq^n}{1+q} = 2 \frac{pq}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée qui converge absolument, donc Δ admet une espérance et

$$E(\Delta) = 2 \frac{pq}{1+q} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2pq}{(1+q)p^2} = \frac{2q}{p(1+q)} = \frac{2q}{(1-q)(1+q)} = \frac{2q}{1-q^2}.$$

- (b) On développe :

$$E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1)E(X_2)$$

par indépendance de X_1 et X_2 et par suite :

$$E((X_1 - X_2)^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 + V(X_1) + E(X_1)^2 - 2E(X_1)^2$$

car X_1 et X_2 suivent la même loi. Enfin

$$E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1).$$

D'où $\Delta^2 = (X_1 - X_2)^2$ admet une espérance et

$$E(\Delta^2) = 2V(X_1)$$

donc Δ admet une variance, qui vaut

$$V(\Delta) = \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{(1-q^2)^2}.$$

5. $|X_2 - X_1|$, valeur absolue de la différence, est égale à la différence de la plus grande et de la plus petite des deux donc :

$$\Delta = |X_1 - X_2| = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$$

et par suite :

$$(X_3 > \Delta) = [X_3 + \min(X_1, X_2) > \max(X_1, X_2)] = A.$$

6. (a) Avec le système complet d'évènements $(\Delta = k)_{k \in \mathbb{N}}$ la formule des probabilités totales donne alors :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((\Delta = k) \cap (X_3 > k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k)$$

car $\Delta = |X_1 - X_2|$ et X_3 sont indépendantes avec les variables X_1, X_2, X_3 mutuellement indépendantes.

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_3 > k) = q^k$ car cela correspond au fait que le premier succès de la loi géométrique soit rencontré après la k -ème épreuve, c'est-à-dire que les k premières épreuves ont donné des échecs (on peut aussi le calculer par une somme). Donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{p}{2-p} \times q^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2pq^k}{1+q} \times q^k = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \times q^2 \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} \left(1 + \frac{2q^2}{1-q^2} \right) \\ &= \frac{p}{1+q} \times \frac{1-q^2+2q^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}. \end{aligned}$$

7. (a) Première méthode de calcul de f :

```

1 | p = float(input('Entrer p : '))
2 | q = 1-p
3 |
4 | X1 = rd.geometric(p , 10000)
5 | X2 = rd.geometric(p , 10000)
6 | X3 = rd.geometric(p , 10000)
7 |
8 | N = 0
9 | for k in range(10000):
10 |     if X3[k] > np.abs(X2[k]-X1[k]) :
11 |         N = N+1
12 |
13 | f = N/10000
14 | P = (1+q**2)/((1+q)**2)
15 |
16 | print(f) #fréquence de A
17 | print(P) #proba de A

```

(b) Deuxième méthode de calcul de f :

```

1 | p = float(input('Entrer p : '))
2 | q = 1-p
3 |
4 | X1 = rd.geometric(p , 10000)
5 | X2 = rd.geometric(p , 10000)
6 | X3 = rd.geometric(p , 10000)
7 |
8 | f = np.sum(X3>np.abs(X2-X1))/10000
9 | P = (1+q**2)/((1+q)**2)
10 |
11 | print(f) #fréquence de A
12 | print(P) #proba de A

```

8. Une densité de Y est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus Y admet une espérance et une variance et

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

9. On définit la variable aléatoire $Z = \frac{Y}{X}$.

(a) On utilise le système complet d'évènements $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

La formule des probabilités totales, donne pour $t \geq 0$ (on se ramène aux variables X et Y dont on connaît l'indépendance) :

$$\begin{aligned} P(Z \geq t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P \left[\left(\frac{Y}{X} \geq t \right) \cap (X = k) \right] = \sum_{k=1}^{+\infty} P \left[\left(\frac{Y}{k} \geq t \right) \cap (X = k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P [(Y \geq kt) \cap (X = k)] \end{aligned}$$

et par indépendance

$$P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y \geq kt)P(X = k).$$

(b) Calculons avec les lois connues :

$$P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[1 - P(Y \leq kt) \right] \times q^{k-1}p = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda kt} q^{k-1}p = pe^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(qe^{-\lambda t} \right)^{k-1}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique convergente avec $0 < qe^{-\lambda t} < 1$:

$$P(Z \geq t) = pe^{-\lambda t} \frac{1}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}.$$

(c) On ne donne rien sur F_Z pour les valeurs négatives; on va alors d'abord chercher la valeur en 0 et essayer de conclure avec les propriétés de la fonction de répartition.

Comme X ne prend que des valeurs strictement positives,

$$P(Z \leq 0) = P\left(\frac{Y}{X} \leq 0\right) = P(Y \leq 0) = 0$$

donc par croissance et positivité de F_Z , pour tout $x < 0$,

$$0 \leq P(Z \leq x) \leq P(Z \leq 0) = 0 \quad \text{donc} \quad F_Z(x) = 0$$

Pour $x \geq 0$ on a $F_Z(x) = 1 - P(Z > t)$.

Grosse erreur d'énoncé ici (on aurait du faire calculer depuis le début $P(Z > t)$) : la variable n'est pas encore à densité donc on ne peut pas affirmer que $P(Z > t) = P(Z \geq t)$.

En toute rigueur il faut calculer :

$$P(Z = t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = kt)P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

(sur le modèle des questions précédentes).

On en déduit bien que

$$P(Z > t) = P(Z \geq t) \quad \text{et} \quad F_Z(t) = \frac{1 - qe^{-\lambda t} - pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}.$$

Cette fonction est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et 0 est de classe C^1 sur \mathbb{R}_* donc F_Z est de classe C^1 sauf peut-être en 0, donc continue sauf peut-être en 0.

On vérifie la continuité en 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F_Z(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{1 - 1}{1 - q} = 0 = F_Z(0)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} F_Z(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0 = F_Z(0)$$

donc F_Z est continue en 0, et donc sur \mathbb{R} .

La variable Z est donc à densité, et on obtient une densité en dérivant F_Z sauf au point 0 où elle n'est pas de classe C^1 , et où on donne une valeur arbitraire :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda pe^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

car pour tout $t > 0$,

$$F'_Z(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t} (1 - qe^{-\lambda t}) - \lambda qe^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} = \frac{\lambda e^{-\lambda t} (1 - q)}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} = \frac{\lambda pe^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2}.$$

10. Dans cette question on choisit $p = 1/3$ et $\lambda = 1$.

(a) Voici le programme demandé :

```

1 | p = 1/3
2 | lambda = 1
3 | X = rd.geometric(p, 10000)
4 | Y = rd.exponential(1/lambda, 10000)
5 | Z = Y/X
6 |
7 | x = np.arrange(0, 10.1, 0.1)
8 | plt.hist(Z, x, density='True')
9 | plt.plot(x, lambda*p*np.exp(-lambda*x)/((1-(1-p)*np.exp
   | (-lambda*x)**2))
10| plt.show()
    
```

(b) La fréquence de chaque classe est très proche de l'aire sous la courbe de la densité sur cette classe ce qui illustre la convergence des fréquences d'un événement E vers la probabilité de E lorsque le nombre de simulations tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (EML 2015)

1. φ est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x)$$

ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	-	0	-	+
$x + 2$	-	0	+	+
$\varphi'(x)$	+	0	-	+
$\varphi(x)$	-1	$4e^{-2} - 1$	-1	$+\infty$

avec, par opérations élémentaires,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty, \quad \varphi(0) = 0 - 1 = -1, \quad \varphi(-2) = (-2)^2e^{-1} - 1 = 4e^{-2} - 1$$

et enfin, par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0 - 1 = -1.$$

2. Pour $x \in]0; +\infty[$, on a

$$e^x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2e^x = 1 \Leftrightarrow x^2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0.$$

Or φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et continue (puisque dérivable), donc elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $\left] \varphi(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right[=] - 1; +\infty[$.

Enfin $0 \in] - 1; +\infty[$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* , et par équivalence l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$ également.

Enfin, comme α est défini par $\varphi(\alpha) = 0$, on compose par φ pour le comparer à $1/2$ et 1 :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{1/2} - 1 = \frac{e^{1/2}}{4} - 1 = \frac{e^{1/2} - 4}{4}.$$

Or on sait que l'exponentielle est croissante, donc $e^{1/2} \leq e^1 = e < 4$, donc $e^{1/2} - 4 < 0$ et $\varphi(1/2) < 0$. D'autre part :

$$\varphi(1) = 1^2e^1 - 1 = e - 1 > 0$$

donc par stricte croissance de φ ,

$$\varphi(1/2) < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(1) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

et on a bien $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

3. On montre cette inégalité par récurrence sur $n \geq 1$:

Ini. $u_0 = 1 \geq 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geq 1$. Alors par croissance de la fonction cube et de l'exponentielle puis par produit :

$$u_n^3 \geq 1 \quad \text{et} \quad e^{u_n} \geq e \quad \text{donc} \quad u_{n+1} = u_n^3 e^{u_n} \geq 1 \times e = e \geq 1$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

4. Pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^3 e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2 e^{u_n} - 1) = u_n \varphi(u_n).$$

Or on sait que $u_n \geq 1 \geq \alpha \geq 0$, donc $u_n \geq 0$ et par croissance de φ ,

$$\varphi(u_n) \geq \varphi(\alpha) = 0$$

et enfin par produit, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

5. On cherche les limites possibles de (u_n) : si (u_n) converge vers ℓ , par continuité de f , ℓ est solution de l'équation :

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell^3 e^\ell = \ell \Leftrightarrow \ell(\ell^2 e^\ell - 1) = 0 \Leftrightarrow \ell \varphi(\ell) = 0$$

qui donne $\ell = 0$ ou $\varphi(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \alpha$. Or on sait que $u_n \geq 1 > \alpha > 0$, donc la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0 ni vers α : elle est donc divergente.

Enfin puisque (u_n) est croissante, elle diverge forcément vers $+\infty$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. La série est à termes positifs donc le théorème de comparaison s'applique. On n'a pas d'équivalent plus simple possible, on teste la négligeabilité :

$$\frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{ne^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{0}$$

donc $\frac{1}{f(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc par théorème de comparaison, la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$ converge (absolument).

7. On remarque que les sommes se simplifient (un peu) :

$$\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} \right|$$

La somme est à termes positifs, donc elle est positive et la valeur absolue peut être retirée :

$$\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k}$$

Il faut maintenant majorer cette série par une série dont on sait calculer la somme : pour cela il faut retirer le k^3 pour obtenir une série géométrique. On sait que

$$k \geq n + 1 \quad \text{donc} \quad k^3 \geq (n + 1)^3 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{(n + 1)^3}$$

par croissance de la fonction cube et décroissante de l'inverse sur \mathbb{R}_+^* . On multiplie par $\frac{1}{e^k}$ et on somme :

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| &\leq \frac{1}{(n + 1)^3} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= \frac{1}{(n + 1)^3} \times \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{(n + 1)^3 e^{n+1} \left(1 - \frac{1}{e}\right)} \\ &= \frac{1}{(n + 1)^3 e^n (e - 1)}. \end{aligned}$$

Enfin comme $n \geq 1$, alors $n + 1 \geq 2$ et $(n + 1)^3 \geq 8 \geq 1$, et $\frac{1}{(n+1)^3} \leq 1$ donc :

$$\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{e^n (e - 1)}.$$

8. On veut que l'écart entre S et la somme partielle soit inférieur à 10^{-4} , il faut alors vérifier que :

$$\frac{1}{(e - 1)e^n} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow e^n \geq \frac{10^4}{e - 1} \Leftrightarrow n \geq 4 \ln(10) - \ln(e - 1)$$

et comme n est un entier, il faut que :

$$n \geq \lceil 4 \ln(10) - \ln(e - 1) \rceil + 1.$$

Enfin on calcule la somme partielle jusqu'à ce terme, en ajoutant un par un les termes de la somme :

```

1 | n = np.floor(4*np.log(10)-np.log(np.exp(1)-1))+1
2 | S = 0
3 | for k in range(1, n+1):
4 |     S = S+(1/(k**3*np.exp(k)))
5 | print(S)

```

9. On trace un repère, et on hachure la partie du plan à droite de l'axe des ordonnées (tels que $x > 0$).

10. g est de classe C^2 sur U , et on a :

$$\partial_1(g)(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = -2ye^y - y^2e^y = -ye^y(2 + y).$$

11. On résout le système :

$$\begin{cases} \partial_1(g)(x, y) = 0 \\ \partial_2(g)(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + e^x = 0 \\ -ye^y(2+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

en se servant de la première partie pour la première équation. On en déduit que g admet deux points critiques sur U : $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$.

12. On cherche les dérivées partielles secondes de g :

$$\partial_{1,1}^2(g)(x, y) = \frac{2}{x^3} + e^x, \quad \partial_{1,2}^2(g)(x, y) = \partial_{2,1}^2(g)(x, y) = 0$$

et

$$\partial_{2,2}^2(g)(x, y) = -2e^y - 2ye^y - 2ye^y - y^2e^y = -(y^2 + 4y + 2)e^y.$$

On cherche alors la matrice Hessienne au point $(\alpha, 0)$:

$$\nabla^2(g)(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales,

$$\lambda_1 = \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -2 < 0$$

donc elles sont de signes (stricts) opposés, et $(\alpha, 0)$ est un point-selle, g n'admet pas d'extremum local en ce point.

13. Au point $(\alpha, -2)$, on a :

$$\nabla^2(g)(\alpha, -2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales,

$$\lambda_1 = \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2e^{-2} > 0$$

donc elles sont de même signe (strict), et g admet un extremum local en ce point (c'est un minimum puisque les valeurs propres sont positives).

14. Si g admet un extremum global, ce serait également un extremum local, donc d'après les questions précédentes, ce ne peut être qu'un minimum, et il ne peut être atteint qu'en $(\alpha, -2)$.

Cependant on peut remarquer que lorsque y tend vers $+\infty$ (avec x fixé), la fonction $y \mapsto g(x, y)$ a pour limite $-\infty$: elle ne peut donc être minorée, et la fonction g ne l'est pas : elle n'admet donc aucun minimum global, donc aucun extremum global.