Correction - DM 17

A rendre le Vendredi 29 Mars

Exercice 1 (EML 2014)

1. La fonction inverse est de classe C^3 sur $\mathbb{R}_+^*$; en composant avec l'exponentielle de classe C^3 sur $\mathbb{R}_+^*$, en multipliant par l'identité de classe C^3 sur $\mathbb{R}_+^*$ et en sommant, on obtient que φ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus on a pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = e^x - \left(e^{\frac{1}{x}} + x \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) = e^x + e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Ensuite on a :

$$\varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} - 1\right) + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{-1}{x^2} = e^x - e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^3}.$$

Enfin :

$$\varphi'''(x) = e^x - \left[-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^3} + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{-3}{x^4}\right] = e^x + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1+3x}{x^5} = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Pour tout $x > 0$, $\varphi'''(x) > 0$ comme somme et produit de quantités strictement positives. On en déduit que φ'' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus

$$\varphi''(1) = e - e \times \frac{1}{1^3} = 0.$$

On en déduit que $\varphi''(x) < 0$ sur $]0;1[$ et $\varphi''(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$, puis que φ' est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Enfin φ' admet donc un minimum strict en $x = 1$, et on calcule :

$$\varphi'(1) = e + e\left(\frac{1}{1} - 1\right) = e$$

donc on obtient bien : pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) \geq \varphi'(1) = e.$$

3. Tout d'abord lorsque x tend vers 0, e^x converge vers 1.

On s'occupe de la deuxième partie : x tend vers 0, et par composée, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$ donc on a une forme indéterminée. Deux possibilités pour la lever :

- tout passer dans l'exponentielle :

$$xe^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x + \frac{1}{x}} = e^{\frac{x \ln x + 1}{x}}$$

Or $x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées donc $x \ln x + 1 \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, $\frac{x \ln x + 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ et enfin :

$$xe^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x \ln x + 1}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty.$$

- le changement de variable $y = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

par croissances comparées.

Dans tous les cas on obtient finalement par somme :

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

4. Au voisinage de $+\infty$ on a :
$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
car $\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées et $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ par composée de limites.
On en déduit que :
$$\varphi(x) = x \times \frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
comme produit de deux facteurs dont la limite est $+\infty$.

5. On passe tout à gauche :
$$\varphi(x) \geq ex \iff \varphi(x) - ex \geq 0.$$
Or la fonction $f(x) = \varphi(x) - ex$ est dérivable sur $[3;+\infty[$, et sa dérivée vaut :
$$f'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0 \quad \text{car} \quad \varphi'(x) \geq e.$$
La fonction f est donc croissante sur $[3;+\infty[$, et $f(3) = \varphi(3) - 3e$. Or :
$$15 < \varphi(3) < 16 \quad \text{et} \quad 6 < 3e < 9 \quad \text{donc} \quad -9 < -3e < -6$$
et enfin
$$15 - 9 = 6 < f(3) < 16 - 6 = 10$$
donc $f(3) > 0$, et par croissance de f, pour tout $x \geq 3$, $f(x) \geq 3$ et enfin :
$$\varphi(x) \geq ex.$$

6. φ est de classe C^2 (question 1), on étudie alors le signe de $\varphi''(x)$: on a vu précédemment qu'elle est strictement négative avant 1, nulle en 1 et strictement positive après 1 : on en déduit que le seul point où φ'' s'annule et change de signe, donc le seul point d'inflexion de φ, est le point :
$$(1;\varphi(1)) = (1;0).$$
La tangente en ce point a alors pour équation (φ y est dérivable) :
$$y = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) = 0 + e(x-1) = ex - e.$$

7. On a vu que $\varphi'(x) \geq e > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ au voisinage de 0 et une branche parabolique verticale en $+\infty$. Enfin on a le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Il reste à tracer la tangente en 1 en prenant deux points et à faire attention de traverser cette tangente (changement de concave à convexe) pour représenter la courbe de f. Enfin on finit avec une branche parabolique verticale (type exponentielle).

8. On remarque que la surface représentative de f semble avoir un point selle, ce qui est confirmé par les courbes de niveaux: C'est un maximum local quand on ne fait varier que x (dans la direction horizontale) donc $\partial_1 f = 0$ en ce point, c'est un minimum local dans la direction vertical donc $\partial_2 f = 0$ en ce point.

   Ce point serait donc un point critique de f mais pas un extremum local de f car quelle que soit la boule autour de ce point, il y aura toujours des valeurs au dessus et en dessous de son image.

   Ce point critique serait atteint aux coordonnées $(1; 2,7)$ environ.

   On note $U = \mathbb{R}\times]0;+\infty[$ et on considère l'application: $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$.

9. On hachure la partie du plan au-dessus de l'axe des abscisses (en excluant l'axe lui-même).

10. f est un produit et une somme de fonctions de classe C^2 sur U (fonctions d'une variable de classe C^2 sur leurs intervalles de définitions) donc elle est de classe C^2 sur U. On a de plus pour tout $(x,y) \in U$:

$$\partial_1(f)(x,y) = y - e^x \ln(y) \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = x - \frac{e^x}{y}$$

   puis

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -e^x \ln(y) \quad , \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 1 - \frac{e^x}{y} \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \frac{e^x}{y^2}.$$

11. (x,y) est un point critique de f si et seulement si il annule les deux dérivées partielles premières. On voit tout de suite que $y \neq 1$ donc $\ln(y) \neq 0$ (sinon la première dérivée partielle donne 1), et que $x > 0$ car $x = \frac{e^x}{y}$ est un quotient de deux facteurs strictement positifs. On peut alors résoudre rigoureusement :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - e^x \ln(y) = 0 \\ x - \frac{e^x}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = \frac{y}{\ln y} \\ x - \frac{e^x}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x = \frac{y}{\ln y} \\ x - \frac{\frac{y}{\ln y}}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = \frac{y}{\ln y} \\ x - \frac{1}{\ln y} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x = \frac{y}{\ln y} \\ x = \frac{1}{\ln y} \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = \frac{y}{\ln y} \\ \ln y = \frac{1}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = \frac{y}{\ln y} \\ y = e^{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ y = e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \iff \begin{cases} e^x - xe^{\frac{1}{x}} \\ y = e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = e^{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

12. On a vu que φ est strictement croissante et $\varphi(1) = 0$, donc l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ est $x = 1$.

    On obtient donc que (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = e^{\frac{1}{x}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = e \end{cases}$$

    donc l'unique point critique de f est le point $(1,e)$.

13. En ce point critique, on calcule la Hessienne puis on cherche ses valeurs propres :

$$\nabla^2(f)(1,e) = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}$$

qui est diagonale donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales, $-e$ et $1/e$; elles sont de signes opposés donc f n'admet pas d'extremum local en $(1, e)$.

14. Les seuls extrema locaux possibles sur un ouvert sont les points critiques. Aucun autre point ne peut être extremum local, donc il n'y a aucun extremum local sur U.

15. Montrons par récurrence sur n que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$.

Ini. u_0 existe et vaut 3 par hypothèses; or $3e^0 = 3$ donc $u_0 \geq 3e^0$, et la propriété est vraie au rang 0.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n existe et $u_n \geq 3e^n$.
Alors $u_n \geq 3e^n > 0$, donc u_n appartient à l'ensemble de définition de φ; on en déduit que $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ existe bien.
De plus on a vu que pour tout $x \geq 3$, $\varphi(x) \geq ex$. Or on sait que $u_n \geq 3e^n \geq 3e^0 = 3$, donc on peut l'appliquer en u_n et :

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq e \times u_n \geq e \times 3e^n = 3e^{n+1}$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et : $u_n \geq 3e^n$.

16. Montrons par récurrence sur n que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Ini. $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(3) > 15 > 3 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. (L'énoncé donnait $\varphi(3) > 15$ un peut plus tôt).

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_{n+1} > u_n$, alors en composant par φ strictement croissante on obtient :

$$\varphi(u_{n+1}) > \varphi(u_n) \quad \text{donc} \quad u_{n+2} > u_{n+1}$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est donc strictement croissante.

Enfin on a vu que $u_n \geq 3e^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3e^n = +\infty$ donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

17. Voici le programme demandé :

```
u = 3
n = 0
while u <= 10**3 :
    u = np.exp(u)-u*np.exp(1/u)
    n = n+1
print(n)
```

18. On a vu que pour tout n, $u_n \geq 3e^n > 0$ donc par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{3e^n} = \frac{1}{3}(e^{-1})^n$$

Or $|e^{-1}| < 1$ donc le majorant est le terme général d'une série géométrique convergente; de plus les deux termes généraux sont à termes positifs, donc le théorème de comparaison s'applique, et la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente.

19. Voici le programme demandé :

```python
def phi(x):
    return np.exp(x)-x*np.exp(1/x)

U = np.zeros(10)
U[0] = 3
for k in range(9):
    U[k+1] = phi(U[k])

S = np.cumsum(np.ones(10)/U)
n = np.arange(0, 10)
plt.plot(n, S, '+')
plt.show()
```

On remarque que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{u_n}$ semble converger très rapidement vers $l \simeq 0,4$.

Exercice 2 (EDHEC 2013)

1. (a) On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Passons par le noyau de A :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff AX = 0 \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

qu'on résout avec les pivots : $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\iff \begin{cases} -x - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x - z = 0 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $Ker(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ et $Ker(f) = Vect\big[(-1,0,1)\big]$.

On en déduit que la famille (a) avec $a = (-1,0,1)$ est génératrice de $Ker(f)$. Or elle est libre car composée d'un seul vecteur, non nul. C'est donc une base de $Ker(f)$.

Calculons à présent l'image de f. En se servant de la matrice A on obtient :

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect\big[f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big] = Vect\big[(2,-1,-1); (1,-1,0); (2,-1,-1)\big] \\ &= Vect\big[(2,-1,-1); (1,-1,0)\big] \end{aligned}$$

En posant

$$b = (2,-1,-1) \qquad \text{et} \qquad c = (1,-1,0)$$

la famille (b,c) est donc génératrice de $\Im f$ et libre car elle comporte deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $Im(f)$.

Remarque : on pouvait aussi obtenir $\dim(Im(f)) = 2$ avec le théorème du rang ce qui permet de conclure sans la liberté.

(c) On connaît déjà $Ker(f)$, déterminons $Im(f^2)$. On utilise A^2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} Im(f^2) &= Vect\big[f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)\big] = Vect\big[(1,0,-1), (1,0,-1), (1,0,-1)\big] \\ &= Vect\big[(1,0,-1)\big] \end{aligned}$$

et on reconnaît $(1,0,-1) = -a$ donc :

$$Im(f^2) = Vect(-a) = Vect(a) = Ker(f)$$

2. (a) Le polynôme $P(x) = x^3$ est annulateur de M, et admet pour unique racine 0.
   On en déduit que la seule valeur propre possible de M est 0.

   (b) Supposons que 0 ne soit pas valeur propre de M, alors M est inversible et admet un inverse M^{-1}.
   On multiplie alors par M^{-1} l'égalité $M^3 = 0$:
   $$M^{-1} \circ M^3 = 0 \Longleftrightarrow M^2 = 0$$
   ce qui est absurde puisque $M^2 \neq 0$ par hypothèses.
   On en déduit que 0 est bien valeur propre de M.

   (c) M admet 0 pour unique valeur propre. Supposons qu'elle soit diagonalisable. Alors M est semblable à une matrice diagonale dont la diagonale ne comporte que des valeurs propres de M, c'est donc la matrice nulle.
   D'où il existe P inversible telle que :
   $$M = P0P^{-1} = 0$$
   donc $M = 0$ ce qui est absurde (on aurait alors $M^2 = 0$).
   On en déduit que M n'est pas diagonalisable.

3. (a) g^2 est une application non nulle donc il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

   (b) Cette famille admet trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc il suffit de prouver qu'elle est libre pour que ce soit une base.
   Soient a, b, c des réels tels que $au + bg(u) + cg^2(u) = 0$.
   Il nous faut au moins trois équations pour obtenir les valeurs de a, b et c, on va les obtenir en composant par g :
   $$g(au + bg(u) + cg^2(u)) = 0 \quad \text{donc} \quad ag(u) + bg^2(u) + c \times 0 = 0$$
   puis (on recommence) :
   $$g(ag(u) + bg^2(u)) = g(0) \quad \text{donc} \quad ag^2(u) = 0$$
   Or $g^2(u) \neq 0$, on a donc :
   $$\left\{\begin{array}{r} au + bg(u) + cg^2(u) = 0 \\ ag(u) + bg^2(u) = 0 \\ ag^2(u) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} +bg(u) + cg^2(u) = 0 \\ bg^2(u) = 0 \\ a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} cg^2(u) = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} +c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{array}\right.$$
   La famille $(u, g(u), g^2(u))$ est donc libre et admet 3 vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) On a $g(u) = 0u + 1g(u) + 0g^2(u)$, $g[g(u)] = g^2(u) = 0u + 0g(u) + 1g^2(u)$ et $g[g^2(u)] = g^3(u) = 0$ donc :
   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) On a en utilisant la base $\mathcal{B}'$:
   $$Im(g) = Vect\big(g[u]; g[g(u)]; g[g^2(u)]\big) = Vect\big[g(u); g^2(u); 0\big] = Vect\big[g(u); g^2(u)\big]$$
   et la famille $\big[g(u); g^2(u)\big]$ est donc génératrice de $Im(g)$.
   De plus elle est libre car c'est une sous-famille de la base (donc famille libre) $\mathcal{B}'$, donc c'est une base de $Im(g)$ qui est de dimension 2.
   On en déduit par théorème du rang que $Ker(g)$ est de dimension 1, donc de la forme $Vect(a')$ où a' est un vecteur quelconque non nul de $Ker(g)$.

Or on connaît un tel vecteur : $g[g^2(u)] = g^3(u) = 0$ donc $g^2(u) \in Ker(g)$ et $g^2(u) \neq 0$ par question a).
On en déduit que $Ker(g) = Vect\big[g^2(u)\big]$.
Déterminons enfin $Im(g^2)$:

$$Im(g^2) = Vect\big(g^2[u]; g^2[g(u)]; g^2[g^2(u)]\big) = Vect\big[g^2(u); g^3(u); g^4(u)\big] = Vect\big[g^2(u)\big]$$

car $g^3(u) = 0$ et $g^4(u) = g(g^3(u)) = g(0) = 0$.
On en déduit bien le résultat cherché :

$$Im(g^2) = Vect\big[g^2(u)\big] = Ker(g).$$

Exercice 3 (EDHEC 2012)

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \lambda\,|-x|\,e^{-\lambda(-x)^2} = f(x)$. Donc f est paire.

   (b) On passe par l'intégrale partielle, avec $M \to +\infty$:

   $$\int_0^M \lambda\,|x|\,e^{-\lambda x^2}dx = \int_0^M \lambda x e^{-\lambda x^2}dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-\lambda x^2}\right]_0^M = -\frac{1}{2}e^{-\lambda M^2} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, impropre en $+\infty$, converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

   (c) Par parité, on a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive. Donc f est une densité de probabilité.

2. (a) Sans passer par l'intégral partielle puisque l'on ne nous demande pas de calculer l'intégrale, on passe par comparaison :

   $$\frac{x\lambda x e^{-\lambda x^2}}{1/x^2} = \lambda x^4 e^{-\lambda x^2} = \frac{\left(x^2\right)^2}{e^{\lambda x^2}} \to 0$$

   car $X^2 = o\left(e^{\lambda X}\right)$ et donc $\lambda x^2 e^{-\lambda x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge (Riemann).
   Donc par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$, impropre en $+\infty$ est convergente.

   (b) Comme la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est elle impaire alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge et est nulle.
   Ainsi, X a une espérance et $E(X) = 0$.

3. (a) Sur l'intégrale partielle $\displaystyle\int_0^M x^2\lambda x e^{-\lambda x^2}dx$ avec
   $u'(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$ que l'on a déjà primitivé $u(x) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}$ et $v(x) = x^2 : v'(x) = 2x$
   Les fonction u et v étant C^1 :

   $$\begin{aligned}\int_0^M x^2\lambda x e^{-\lambda x^2}dx &= \left[-x^2\frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}\right]_0^M - \int_0^M -2x\frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}dx \\ &= \frac{M^2}{2}e^{-\lambda M^2} - 0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^M \lambda x e^{-\lambda x^2}dx \\ &\to \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{2\lambda}$.

(b) Par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$.
Donc $E\left(X^2\right)=\frac{1}{\lambda}$ et X a une variance $V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{1}{\lambda}$.

4. On pose $Y=X^2$ et on admet que Y est à densité.

(a) Pur tout $x\in\mathbb{R}$:

$$(Y\leq x)=\left(X^2\leq x\right) \text{ si } x\geq 0=\left(|X|\leq\sqrt{x}\right)=\left(-\sqrt{x}\leq X\leq\sqrt{x}\right)$$

donc $F_Y(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ F_X(\sqrt{x})-F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

(b) F_X est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_Y est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ ($x>0$ pour la racine) et une densité est $f_Y(x)=F_Y'(x)$ si $x>0$ et si $x<0$ (problème de dérivabilité en 0) et pour $x>0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_X'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}+F_X'(-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})\right)\\ &= \frac{2}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda\sqrt{x}^2}=\lambda\exp(-\lambda x).\end{aligned}$$

Ainsi, $f_Y(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ \lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x>0\end{cases}$ et $Y\hookrightarrow\varepsilon(\lambda)$.

(c) On a donc $E\left(X^2\right)=E(Y)=\frac{1}{\lambda}$ d'où $V(X)=E\left(X^2\right)=\frac{1}{\lambda}$ puisque $E(X)=0$.

5. Soit $U\hookrightarrow\mathcal{U}_{[0,1[}$

(a) On pose $W=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$(W\leq x)=\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)\leq x\right)=(1-U\geq\exp(-\lambda x))=(U\leq 1-\exp(-\lambda x))$$

et donc

$$P(W\leq x)=P(U\leq 1-\exp(-\lambda x))=F_U(1-\exp(-\lambda x))$$

La fonction de répartition de U est définie par : $F_U(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ Or, pour tout $x>0$ on a $0<\exp(-\lambda x)<1$ et $1>1-\exp(-\lambda x)>0$ donc $P(W\leq x)=1-\exp(-\lambda x)$.
Et si $x\leq 0$ alors $\exp(-\lambda x)\geq 1$ et $1-\exp(-\lambda x)\leq 0$ donc $P(W\leq x)=0$ et on reconnaît bien la fonction de répartition de $\varepsilon(\lambda)$.
Ainsi, $W\hookrightarrow\varepsilon(\lambda)$.

(b) Soit $U\hookrightarrow U_{[0,1[}$ alors $W\hookrightarrow\varepsilon(\lambda)$ et comme $\sqrt{Y}=|X|$ alors $\sqrt{W}$ suivra la même loi que $|X|$.

```
def simul|X|(lambda):
    u = rd.random()
    w = -np.log(1-u)/lambda
    return np.sqrt(w)
```

(c) $P(X\geq 0)=\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ et par parité $=\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx=P(X\leq 0)$.
Connaissant $|X|$, reste à simuler $X=\pm|X|$ avec équiprobabilté des valeur $\pm$

```python
def simulX(lambda):
    xabs = simul|X|(lambda)
    if rd.random()<1/2:
        return xabs
    else:
        return -xabs
```

6. (a) Une densité de Y est : $f_Y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

   On a
$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda x_k) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$
   Donc :
$$\ln(L(\lambda)) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$$

   (b) On considère la fonction φ définie pour tout réel de $]0, +\infty[$ par :
$$\varphi(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$$

   φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
$$\varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k}{\lambda}$$

   donc

λ	0		$n/\sum x_k$		$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(\lambda)$		$\nearrow$		$\searrow$	

   et φ a un maximum unique en $z = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$.

   Comme $\varphi(\lambda) = \ln(L(\lambda))$, et que ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors z sera aussi un maximum pour la fonction L.

7. (a) Par le théorème de transfert, Z_n a une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\, dt$ converge absolument (ce qui équivaut ici à la convergence simple, tout étant positif).

   Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f_n(t)\, dt = 0$ et
$$\frac{n}{t} f_n(t) = \frac{n}{t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \lambda \frac{n}{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} e^{-\lambda t} = \lambda \frac{n}{n-1} f_{n-1}(t)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} t f_n(t)\, dt = \lambda \frac{n}{n-1} \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt = \lambda \frac{n}{n-1}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\, dt$ converge et vaut $\lambda \dfrac{n}{n-1}$ donc Z_n a une espérance et $E(Z_n) = \lambda \dfrac{n}{n-1}$.

(b) Z_n' est un estimateur sans biais de λ si $E(Z_n') = \lambda$.

Soit $Z_n' = \dfrac{n-1}{n} Z_n$ alors $E(Z_n') = \dfrac{n-1}{n} E\left(\dfrac{n-1}{n} Z_n\right) = \lambda$.

Ainsi, $Z_n' = \dfrac{n-1}{n} Z_n$ sera un estimateur sans biais de λ.