Correction - DM 17

A rendre le Vendredi 21 Mars

Exercice 1 (EML 2014)

1. (a) $(X_3 = 4)$: "les 3 premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante", donc ici forcément (3,2,1), et $N_4 \geq N_3$.
Comme $N_3 = 1$ implique $N_4 \geq N_3$, il nous reste juste
$$(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)$$
et donc, puisque les tirages se font sans remise dans l'urne où il y a 3 boules,
$$P(X_3 = 4) = P(3, 2, 1) = (\frac{1}{3})^3.$$
(b) $(X_3 = 2)$ signifie que, dès le deuxième tirage, on a obtenu un résultat supérieur ou égal au premier. On a donc, en notant $(1, 3)$ l'évènement $(N_1 = 1) \cap (N_2 = 3)$:
$$P(X_3 = 2) = P((1,1) \cup (1,2) \cup (1,3) \cup (2,2) \cup (2,3) \cup (3,3)) = 6.(\frac{1}{3})^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$
X_3 prend ses valeurs dans $\{2; 3; 4\}$, donc :
$$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{27 - 18 - 1}{27} = \frac{8}{27}.$$

2. $E(X_3) = 2.P(X_3 = 2) + 3.P(X_3 = 3) + 4.P(X_3 = 4) = 2.\frac{2}{3} + 3.\frac{8}{27} + 4.\frac{1}{27} = \frac{36 + 24 + 4}{27} = \frac{64}{27}.$

3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, N_k peut prendre les valeurs de 1 à n et si $j \in [\![1, n]\!]$, $P(N_k = j) = \frac{1}{n}$.
On reconnait une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et $E(N_k) = \frac{n+1}{2}$ et $V(N_k) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

4. Comme à la question 1, $(X_n = n + 1)$: "les n premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante", donc ici forcément $(n, n - 1, .., 1)$, et $N_{n+1} \geq N_n$.
Il nous reste alors : $(X_n = n + 1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n - 1) \cap ... \cap (N_n = 1)$ et donc, grâce à l'indépendance des tirages :
$$P(X_n = n + 1) = P(N_1 = n).P(N_2 = n - 1)...P(N_n = 1) = (\frac{1}{n})^n.$$

5. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, sachant $(N_1 = i)$, l'évènement $(X_n = 2)$ sera réalisé si et seulement si on a $N_2 \geq i$, c'est à dire si on ne tire pas un des numéros $1, 2..., i - 1$.
Par conséquent, $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - (i - 1)}{n}$.

6. La formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements $\{(N_1 = i)\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ nous donne alors
$$\begin{aligned}P(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^{n} P(N_1 = i)\, P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.\frac{n - (i - 1)}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} n - (i - 1) \\ &= \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\ ) = \frac{1}{n^2}(n.n - \frac{n(n+1)}{2} + n) = \frac{1}{n}(n - \frac{(n+1)}{2} + 1) \\ &= \frac{1}{n}(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

7. $X_n > k$ lorsque les k premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante, c'est à dire si $N_1 > N_2 > .... > N_k$. Parmi les cas possibles (qui sont des suites de $n+1$ éléments de $[\![1,n]\!]$), les cas favorables à $(X_n > k)$ sont constitués d'une suite strictement décroissante de k numéros et d'une suite de $n+1-k$ éléments de $[\![1,n]\!]$.

   Par exemple pour $n = 10$ et $k = 4$, $(9,8,5,4,4,3,7,7,5,6,10)$ est un des cas favorables à $(X_{10} > 4)$.

   Le nombre des cas possibles est bien entendu n^{n+1}. Et comme il y a autant de suites strictement décroissantes de k numéros de $[\![1,n]\!]$ que de parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$, c'est à dire $\binom{n}{k}$, le nombre des cas favorables à $(X_n > k)$ est $\binom{n}{k}.n^{n+1-k}$.

   On obtient enfin le résultat proposé : $P(X_n > k) = \dfrac{\binom{n}{k}.n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

   Pour $k = 0$ et $k = 1$, la formule reste valable puisque $P(X_n > 0) = P(X_n > 1) = 1$ alors que $\dfrac{\binom{n}{0}}{n^0} = \dfrac{1}{1}$ et $\dfrac{\binom{n}{1}}{n^1} = \dfrac{n}{n} = 1$.

8. De façon classique, $(X_n > k-1) = (X_n = k) \cup (X_n > k)$.

   Donc par incompatibilité $P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)$.

9. On a :

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k.P\left(X_n = k\right) = \sum_{k=2}^{n+1} k.P(X_n > k-1) - k.P(X_n > k) \\
&= \sum_{h=1}^{n} (h+1).P(X_n > h) - \sum_{k=2}^{n+1} k.P(X_n > k) \\
&= [2.P(X_n > 1) + \sum_{h=2}^{n} (h+1).P(X_n > h)] \\
&\quad -[\sum_{k=2}^{n} k.P(X_n > k) - (n+1).P(X_n > n+1)] \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} (k+1-k).P(X_n > k) - (n+1).0) \\
&= P(X_n > 0) + P(X_n > 1) + \sum_{k=2}^{n} P(X_n > k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n > k)
\end{aligned}$$

   On a donc

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} P\left(X_n > k\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k.1^{n-k} = (\tfrac{1}{n}+1)^n.$$

10. On a :

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \\
&= \frac{n!}{n^{k-1}(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{n^k k!(n-k)!} \\
&= n!(\frac{nk-(n-k+1)}{n^k(k)!(n-k+1)!})
\end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned}
\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \frac{k-1}{n^k}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{k-1}{n^k}\frac{(n+1).n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!}{n^k}\frac{(n+1).(k-1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{n^k}\frac{(nk+k-n-1)}{k!(n+1-k)!}.
\end{aligned}$$

11. $P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} = \dfrac{k-1}{n^k}\dfrac{(n+1)n\dots(n-(k-2))}{k!} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{k-1}{n^k}\dfrac{n^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{k-1}{k!}$.

12. Ce sont des séries exponentielles donc convergentes, et on a :
$$\sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{k!} = \sum_{k\geq 2}\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} = \sum_{k\geq 2}\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \sum_{j\geq 1}\frac{1}{j!} - \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k!} = (e-1)-(e-2) = 1.$$
On a vérifié ainsi que la suite $(\frac{k-1}{k!})_{k\geq 2}$ définit bien une loi de probabilité.

13. On a d'une part :
$$E(Z) = \sum_{k\geq 2} k.P\left(Z=k\right) = \sum_{k\geq 2} k\frac{k-1}{k!} = \sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k\geq 2}\frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!} = e$$
D'autre part, $E(X_n) = (\frac{1}{n}+1)^n = \exp(n.\ln(1+\frac{1}{n}))$. Or $n.\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} n.\frac{1}{n} = 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = e$.
La suite $(X_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers la variable Z et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(Z)$.

Exercice 2 (EML 2010)

1. X_1 suit la loi géométrique de paramètre p, donc admet une espérance et une variance et
$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ P(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p,\ E(X_1) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. $(X_1 = k)_{k\geq 1}$ est un système complet d'évènements donc par formule des probabilités totales puis par indépendance de X_1 et X_2,
$$P(\Delta = 0) = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k]\cap[X_2 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$$
puis avec la loi géométrique :
$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty}[(1-p)^2]^{k-1}p^2 = p^2\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{2p-p^2} = \frac{p}{2-p}.$$

3. (a) On a $(X_1 - X_2 = n) = (X_1 = X_2 + n)$ et avec le système complet d'évènements $(X_2 = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les probabilités totales donnent :
$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_2 = k)\cap(X_1 = n+k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n+k)$$
par indépendance de X_1 et X_2.

   (b) Par symétrie, on a $P(X_2 - X_1 = n) = P(X_1 - X_2 = n)$. De plus
$$(\Delta = n) = (X_1 - X_2 = n)\cup(X_2 - X_1 = n)$$
évènements incompatibles car $n \neq 0$ donc
$$P(\Delta = n) = P(X_1 - X_2 = n) + P(X_2 - X_1 = n) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n+k)$$
$$P(\Delta = n) = 2\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n+k-1}p = 2p^2(1-p)^{n-2}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k}$$
et enfin
$$P(\Delta = n) = 2p^2(1-p)^{n-2}(1-p)^2\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{2p^2q^n}{(1-q)(1+q)} = \frac{2pq^n}{1+q}.$$

4. (a) Sous réserve de convergence absolue,

$$E(\Delta) = 0 \times \frac{p}{2-p} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{2pq^n}{1+q} = 2\frac{pq}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$$

On reconnait une série géométrique dérivée qui converge absolument, donc Δ admet une espérance et

$$E(\Delta) = 2\frac{pq}{1+q} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2pq}{(1+q)p^2} = \frac{2q}{p(1+q)} = \frac{2q}{(1-q)(1+q)} = \frac{2q}{1-q^2}.$$

(b) On développe :

$$E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1)E(X_2)$$

par indépendance de X_1 et X_2 et par suite :

$$E((X_1 - X_2)^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 + V(X_1) + E(X_1)^2 - 2E(X_1)^2$$

car X_1 et X_2 suivent la même loi. Enfin

$$E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1).$$

D'où $\Delta^2 = (X_1 - X_2)^2$ admet une espérance et

$$E(\Delta^2) = 2V(X_1)$$

donc Δ admet une variance, qui vaut

$$V(\Delta) = \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{(1-q^2)^2}.$$

5. $|X_2 - X_1|$, valeur absolue de la différence, est égale à la différence de la plus grande et de la plus petite des deux donc :

$$\Delta = |X_1 - X_2| = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$$

et par suite :

$$(X_3 > \Delta) = [X_3 + \min(X_1, X_2) > \max(X_1, X_2)] = A.$$

6. (a) Avec le système complet d'évènements $(\Delta = k)_{k\in\mathbb{N}}$ la formule des probabilités totales donne alors :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((\Delta = k) \cap (X_3 > k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k)$$

car $\Delta = |X_1 - X_2|$ et X_3 sont indépendantes avec les variables X_1, X_2, X_3 mutuellement indépendantes.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_3 > k) = q^k$ car cela correspond au fait que le premier succès de la loi géométrique soit rencontré après la k-ème épreuve, c'est-à-dire que les k premières épreuves ont donné des échecs (on peut aussi le calculer par une somme). Donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{p}{2-p} \times q^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2pq^k}{1+q} \times q^k = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^k \\ &= \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \times q^2 \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}\left(1 + \frac{2q^2}{1-q^2}\right) \\ &= \frac{p}{1+q} \times \frac{1-q^2+2q^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}. \end{aligned}$$

7. (a) Première méthode de calcul de f :

```python
p = float(input('Entrer p : '))
q = 1-p

X1 = rd.geometric(p , 10000)
X2 = rd.geometric(p , 10000)
X3 = rd.geometric(p , 10000)

N = 0
for k in range(10000):
    if X3[k] > np.abs(X2[k]-X1[k]) :
        N = N+1

f = N/10000
P = (1+q**2)/((1+q)**2)

print(f) #fréquence de A
print(P) #proba de A
```

(b) Deuxième méthode de calcul de f :

```python
p = float(input('Entrer p : '))
q = 1-p

X1 = rd.geometric(p , 10000)
X2 = rd.geometric(p , 10000)
X3 = rd.geometric(p , 10000)

f = np.sum(X3>np.abs(X2-X1))/10000
P = (1+q**2)/((1+q)**2)

print(f) #fréquence de A
print(P) #proba de A
```

8. Une densité de Y est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus Y admet une espérance et une variance et

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

9. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

(a) On utilise le système complet d'évènements $(X = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
La formule des probabilités totales, donne pour $t \geq 0$ (on se ramène aux variables X et Y dont on connaît l'indépendance) :

$$\begin{aligned} P(Z \geq t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left[\left(\frac{Y}{X} \geq t\right) \cap (X = k)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left[\left(\frac{Y}{k} \geq t\right) \cap (X = k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left[(Y \geq kt) \cap (X = k)\right] \end{aligned}$$

et par indépendance

$$P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y \geq kt)P(X = k).$$

(b) Calculons avec les lois connues :

$$P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[1 - P(Y \leq kt)\Big] \times q^{k-1}p = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda kt} q^{k-1} p = pe^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(qe^{-\lambda t}\right)^{k-1}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique convergente avec $0 < qe^{-\lambda t} < 1$:

$$P(Z \geq t) = pe^{-\lambda t} \frac{1}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}.$$

(c) On ne donne rien sur F_Z pour les valeurs négatives; on va alors d'abord chercher la valeur en 0 et essayer de conclure avec les propriétés de la fonction de répartition.
Comme X ne prend que des valeurs strictement positives,

$$P(Z \leq 0) = P\left(\frac{Y}{X} \leq 0\right) = P(Y \leq 0) = 0$$

donc par croissance et positivité de F_Z, pour tout $x < 0$,

$$0 \leq P(Z \leq x) \leq P(Z \leq 0) = 0 \qquad \text{donc} \qquad F_Z(x) = 0$$

Pour $x \geq 0$ on a $F_Z(x) = 1 - P(Z > t)$.
Grosse erreur d'énoncé ici (on aurait du faire calculer depuis le début $P(Z > t)$) : la variable n'est pas encore à densité donc on ne peut pas affirmer que $P(Z > t) = P(Z \geq t)$.
En toute rigueur il faut calculer :

$$P(Z = t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = kt)P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

(sur le modèle des questions précédentes).
On en déduit bien que

$$P(Z > t) = P(Z \geq t) \;\text{ et }\; F_Z(t) = \frac{1 - qe^{-\lambda t} - pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}.$$

Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et 0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ donc F_Z est de classe C^1 sauf peut-être en 0, donc continue sauf peut-être en 0.
On vérifie la continuité en 0 :

$$\lim_{t \to 0^+} F_Z(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{1 - 1}{1 - q} = 0 = F_Z(0)$$

et

$$\lim_{t \to 0^-} F_Z(t) = \lim_{t \to 0} 0 = 0 = F_Z(0)$$

donc F_Z et continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.
La variable Z est donc à densité, et on obtient une densité en dérivant $_Z$ sauf au point 0 où elle n'est pas de classe C^1, et où on donne une valeur arbitraire :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda pe^{-\lambda t}}{\left(1 - qe^{-\lambda t}\right)^2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

car pour tout $t > 0$,

$$F_Z'(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - qe^{-\lambda t}\right) - \lambda qe^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{\left(1 - qe^{-\lambda t}\right)^2} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(1 - q)}{\left(1 - qe^{-\lambda t}\right)^2} = \frac{\lambda pe^{-\lambda t}}{\left(1 - qe^{-\lambda t}\right)^2}.$$

10. Dans cette question on choisit $p = 1/3$ et $\lambda = 1$.

    (a) Voici le programme demandé :

```python
p = 1/3
lambda = 1
X = rd.geometric(p, 10000)
Y = rd.exponential(1/lambda, 10000)
Z = Y/X

x = np.arrange(0, 10.1, 0.1)
plt.hist(Z, x, density='True')
plt.plot(x, lambda*p*np.exp(-lambda*x)/((1-(1-p)*np.exp(-lambda*x))**2))
plt.show()
```

    (b) La fréquence de chaque classe est très proche de l'aire sous la courbe de la densité sur cette classe ce qui illustre la converge des fréquences d'un évènement E vers la probabilité de E lorsque le nombre de simulations tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (EML 2015)

1. φ est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x)$$

ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	$4e^{-2} - 1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

avec, par opérations élémentaires,

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \quad , \quad \varphi(0) = 0 - 1 = -1 \quad , \quad \varphi(-2) = (-2)^2e^{-1} - 1 = 4e^{-2} - 1$$

et enfin, par croissances comparées,

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0 - 1 = -1.$$

2. Pour $x \in]0; +\infty[$, on a

$$e^x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2e^x = 1 \Leftrightarrow x^2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0.$$

Or φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue (puisque dérivable), donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]\varphi(0); \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[=]-1;+\infty[$.

Enfin $0 \in]-1;+\infty[$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, et par équivalence l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$ également.

Enfin, comme α est défini par $\varphi(\alpha) = 0$, on compose par φ pour le comparer à $1/2$ et 1 :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{1/2} - 1 = \frac{e^{1/2}}{4} - 1 = \frac{e^{1/2} - 4}{4}.$$

Or on sait que l'exponentielle est croissante, donc $e^{1/2} \leq e^1 = e < 4$, donc $e^{1/2} - 4 < 0$ et $\varphi(1/2) < 0$. D'autre part :

$$\varphi(1) = 1^2e^1 - 1 = e - 1 > 0$$

donc par stricte croissance de φ,

$$\varphi(1/2) < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(1) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

et on a bien $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

3. On montre cette inégalité par récurrence sur $n \geq 1$:

Ini. $u_0 = 1 \geq 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geq 1$. Alors par croissance de la fonction cube et de l'exponentielle puis par produit :

$$u_n^3 \geq 1 \quad \text{et} \quad e^{u_n} \geq e \quad \text{donc} \quad u_{n+1} = u_n^3e^{u_n} \geq 1 \times e = e \geq 1$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

4. Pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^3e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2e^{u_n} - 1) = u_n\varphi(u_n).$$

Or on sait que $u_n \geq 1 \geq \alpha \geq 0$, donc $u_n \geq 0$ et par croissance de φ,

$$\varphi(u_n) \geq \varphi(\alpha) = 0$$

et enfin par produit, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

5. On cherche les limites possibles de (u_n) : si (u_n) converge vers ℓ, par continuité de f, ℓ est solution de l'équation :

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell^3e^\ell = \ell \Leftrightarrow \ell(\ell^2e^\ell - 1) = 0 \Leftrightarrow \ell\varphi(\ell) = 0$$

qui donne $\ell = 0$ ou $\varphi(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \alpha$. Or on sait que $u_n \geq 1 > \alpha > 0$, donc la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0 ni vers α : elle est donc divergente.

Enfin puisque (u_n) est croissante, elle diverge forcément vers $+\infty$, et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. La série est à termes positifs donc le théorème de comparaison s'applique. On n'a pas d'équivalent plus simple possible, on teste la négligeabilité :

$$\frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{ne^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\frac{1}{f(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc par théorème de comparaison, la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$ converge (absolument).

7. On remarque que les sommes se simplifient (un peu) :

$$\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right|=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{f(k)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{f(k)}\right|$$

La somme est à termes positifs, donc elle est positive et la valeur absolue peut être retirée :

$$\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right|=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3e^k}.$$

Il faut maintenant majorer cette série par une série dont on sait calculer la somme : pour cela il faut retirer le k^3 pour obtenir une série géométrique. On sait que

$$k\geq n+1\quad\text{donc}\quad k^3\geq(n+1)^3\quad\text{puis}\quad\frac{1}{k^3}\leq\frac{1}{(n+1)^3}$$

par croissance de la fonction cube et décroissante de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. On multiplie par $\frac{1}{e^k}W0$ et on somme :

$$\begin{aligned}\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right| &\leq \frac{1}{(n+1)^3}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k\\ &= \frac{1}{(n+1)^3}\times\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{(n+1)^3e^{n+1}\left(1-\frac{1}{e}\right)}\\ &= \frac{1}{(n+1)^3e^n(e-1)}.\end{aligned}$$

Enfin comme $n\geq 1$, alors $n+1\geq 2$ et $(n+1)^3\geq 8\geq 1$, et $\frac{1}{(n+1)^3}\leq 1$ donc :

$$\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right|\leq\frac{1}{e^n(e-1)}.$$

8. On veut que l'écart entre S et la somme partielle soit inférieur à 10^{-4}, il faut alors vérifier que :

$$\frac{1}{(e-1)e^n}\leq 10^{-4}\Leftrightarrow e^n\geq\frac{10^4}{e-1}\Leftrightarrow n\geq 4\ln(10)-\ln(e-1)$$

et comme n est un entier, il faut que :

$$n\geq\lfloor 4\ln(10)-\ln(e-1)\rfloor+1.$$

Enfin on calcule la somme partielle jusqu'à ce terme, en ajoutant un par un les termes de la somme :

```
n = np.floor(4*np.log(10)-np.log(np.exp(1)-1))+1
S = 0
for k in range(1, n+1):
    S = S+(1/(k**3*np.exp(k)))
print(S)
```

9. On trace un repère, et on hachure la partie du plan à droite de l'axe des ordonnées (tels que $x>0$).

10. g est de classe C^2 sur U, et on a :

$$\partial_1(g)(x,y)=-\frac{1}{x^2}+e^x\quad\text{et}\quad\partial_2(g)(x,y)=-2ye^y-y^2e^y=-ye^y(2+y).$$

11. On résout le système :

$$\begin{cases} \partial_1(g)(x,y)=0 \\ \partial_2(g)(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{x^2}+e^x=0 \\ -ye^y(2+y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \quad \text{ou} \quad y=-2 \end{cases}$$

en se servant de la première partie pour la première équation. On en déduit que g admet deux points critiques sur U : $(\alpha,0)$ et $(\alpha,-2)$.

12. On cherche les dérivées partielles secondes de g :

$$\partial^2_{1,1}(g)(x,y)=\frac{2}{x^3}+e^x \quad , \quad \partial^2_{1,2}(g)(x,y)=\partial^2_{2,1}(g)(x,y)=0$$

et

$$\partial^2_{2,2}(g)(x,y)=-2e^y-2ye^y-2ye^y-y^2e^y=-(y^2+4y+2)e^y.$$

On cherche alors la matrice Hessienne au point $(\alpha,0)$:

$$\nabla^2(g)(\alpha,0)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3}+e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales,

$$\lambda_1=\frac{2}{\alpha^3}+e^\alpha>0 \quad \text{et} \quad \lambda_2=-2<0$$

donc elles sont de signes (stricts) opposés, et $(\alpha,0)$ est un point-selle, g n'admet pas d'extremum local en ce point.

13. Au point $(\alpha,-2)$, on a :

$$\nabla^2(g)(\alpha,-2)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3}+e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales,

$$\lambda_1=\frac{2}{\alpha^3}+e^\alpha>0 \quad \text{et} \quad \lambda_2=2e^{-2}>0$$

donc elles sont de même signe (strict), et g admet un extremum local en ce point (c'est un minimum puisque les valeurs propres sont positives).

14. Si g admet un extremum global, ce serait également un extremum local, donc d'après les question précédentes, ce ne peut être qu'un minimum, et il ne peut être atteint qu'en $(\alpha,-2)$.

    Cependant on peut remarquer que lorsque y tend vers $+\infty$ (avec x fixé), la fonction $y\mapsto g(x,y)$ a pour limite $-\infty$: elle ne peut donc être minorée, et la fonction g ne l'est pas : elle n'admet donc aucun minimum global, donc aucun extremum global.
