

Correction - DM 2

A rendre le Lundi 20 Septembre

Exercice 1 (ECRICOME 2005)

1. f est continue sur \mathbb{R}_+^* comme produit et sommes de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* .

D'autre part, d'après les croissances comparées on a

$$x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

donc

$$f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1 = f(0).$$

Donc f est continue à droite en 0 et donc sur \mathbb{R}_+ .

2. On calcule le taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x - \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

Comme le taux d'accroissement a une limite infinie, la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale en 0.

3. f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* comme produit et sommes de fonctions usuelles de classe \mathcal{C}^2 . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = 2x - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - \ln x - 1,$$

puis

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}$$

qui est du signe de $2x - 1$ car $x > 0$. Or $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ donc $f''(x) \leq 0$ sur $]0, \frac{1}{2}]$ et f y est concave, et $f''(x) \geq 0$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et f y est convexe. On a un point d'inflexion en $x = \frac{1}{2}$.

On en déduit que f' est décroissante puis croissante donc admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$, valant

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln 2 > 0$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

Enfin, on cherche la limite de f en $+\infty$:

$$f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, puis par somme et produit de limites.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$			
$f(x)$	-		
$f(x)$	-1	$\rightarrow +\infty$	

4. Comme f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-1, +\infty[= J$.
5. On échange le rôle de x et y dans le tableau de variation de f , on obtient :

x	-1	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$+\infty$

Ainsi, f^{-1} est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , $\lim_{x \rightarrow -1} f^{-1}(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

6. (a) La commande `x=linspace(0.01,4,400)` crée un vecteur ligne de 400 valeurs régulièrement espacées entre 0.01 et 4.
Le programme trace un graphe approché de la courbe de f sur l'intervalle $[0.01, 4]$ à l'aide de 400 points.
- (b) On remarque que la courbe tend bien vers $-1 = f(0)$ lorsque x tend vers 0 : f est bien continue en 0.
On remarque que la pente de la courbe est verticale au voisinage de 0 (c'est pas forcément évident sur le graphique...) : il y a bien une demi-tangente verticale à droite en 0.
On remarque que la courbe de f est au dessus de ses cordes (et au dessous de ses tangentes) sur $[0, 1/2]$: f est donc concave sur $[0, 1/2]$ et sa courbe est au dessous de ses cordes (et au dessus de ses tangentes) sur $[1/2, +\infty[$: f est donc convexe sur $[1/2, +\infty[$.
- (c) L'instruction `plot(y,x)` renverse l'ordre des abscisses et des ordonnées : à chaque valeur $y = f(x)$ en abscisse, on associe en ordonnée l'unique antécédent x de y par f : c'est la définition de la bijection réciproque de f . Cette instruction trace donc la courbe de f^{-1} .
- (d) La courbe obtenue est bien symétrique à la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
7. (a) Pour tout entier naturel k , $k \in]-1, +\infty[= J$ donc il existe un unique $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_k) = k$ (car f réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur $]-1, +\infty[$).
Comme de plus $f(0) = -1 \neq k$, ce x_k est unique sur \mathbb{R}_+ (car le seul point supplémentaire, 0, n'est pas une solution de l'équation $f(x) = k$).
- (b) x_0 est l'unique solution de $f(x) = 0$. Comme $f(1) = 0$ alors $x_0 = 1$.
- (c) Comme

$$f(1,5) < 1 = f(x_1) < f(2) < 2 = f(x_2) < f(2,5)$$

(avec le tableau de valeurs de f) et que f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et que tous les termes en sont éléments alors :

$$1,5 < x_1 < 2 < x_2 < 2,5$$

- (d) Comme f est bijective de \mathbb{R}_+^* dans J , $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in J$ alors :

$$f(x_k) = k \iff x_k = f^{-1}(k).$$

Et comme f^{-1} est croissante sur J , pour tout entier k , comme $k < k+1$ alors :

$$f^{-1}(k) < f^{-1}(k+1) \quad \text{et} \quad x_k < x_{k+1}$$

Donc la suite (x_k) est croissante.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ alors :

$$x_k = f^{-1}(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

8. (a) φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2+x}{x^2}.$$

qui est du signe de $-2+x$, donc strictement négative sur $]0, 2[$, nulle en 2 et strictement positive sur $]2, +\infty[$ donc φ est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur $]2, +\infty[$:

x	0	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
$\varphi(x)$			

- (b) Comme φ est strictement décroissante et continue sur $[\frac{3}{2}; 2]$, alors :

$$\varphi\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) = \left[\varphi(2); \varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right] \simeq [1, 69; 1, 73] \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

- (c) φ' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{4-x}{x^3}$$

donc $\varphi''(x) \geq 0$ sur $[\frac{3}{2}, 2]$.

Donc φ' est croissante sur l'intervalle et si

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \text{alors} \quad \varphi'\left(\frac{3}{2}\right) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(2) \quad \text{soit} \quad -\frac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0 \leq \frac{2}{9}$$

et donc :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}.$$

- (d) Tout d'abord, remarquons que 0 n'est solution ni pour l'une ni pour l'autre. Et pour tout $x > 0$:

$$x = \varphi(x) \iff \frac{2}{x} + \ln(x) = x \iff 2 + x \ln(x) = x^2 \iff x^2 - x \ln(x) - 1 = 1 \iff f(x) = 1.$$

Or $f(x) = 1$ a pour unique solution x_1 donc $x = \varphi(x)$ également.

- (e) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ ". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$ donc $\varphi(u_n) \in [\frac{3}{2}, 2]$ d'après 8.(b) et $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

- (f) On vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis :

- φ est dérivable sur $[\frac{3}{2}; 2]$ car de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$ pour tout $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.

On en déduit alors : pour tout $(a, b) \in [\frac{3}{2}; 2]^2$,

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \frac{2}{9} |b - a|$$

On choisit $a = x_1 \in [\frac{3}{2}, 2]$ (d'après 7.(c)) et on choisit $b = u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$ (d'après 8.(e)). On a alors :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|$$

et comme $\varphi(x_1) = x_1$ on a bien alors :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|.$$

- (g) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $|u_n - x_1| \leq (\frac{2}{9})^n$ ". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Comme $u_0 = \frac{3}{2} \leq x_1 \leq 2$, alors

$$0 \leq x_1 - u_0 \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad |u_0 - x_1| \leq \frac{1}{2} \leq 1 = \left(\frac{2}{9}\right)^0.$$

et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée. Par hypothèse de récurrence, $|u_n - x_1| \leq (\frac{2}{9})^n$. Alors :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1| \leq \frac{2}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$$

car $\frac{2}{9} \geq 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq |u_n - x_1| \leq (\frac{2}{9})^n$.

- (h) Comme $|\frac{2}{9}| < 1$, $(\frac{2}{9})^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et par encadrement (une valeur absolue est toujours positive) $|u_n - x_1| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_1$.
- (i) Il suffit que l'on ait $(\frac{2}{9})^n \leq 10^{-4}$ pour avoir $|u_n - x_1| \leq 10^{-4}$.

Résolvons donc l'inéquation :

$$\left(\frac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow e^{n \ln(2/9)} \leq e^{-4 \ln(10)} \Leftrightarrow n \ln(2/9) \leq -4 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-4 \ln(10)}{\ln(2/9)},$$

car $\ln(2/9) < 0$.

Comme $\frac{-4 \ln(10)}{\ln(2/9)} \notin \mathbb{N}$, l'inéquation est vérifiée à partir de l'entier $N = \lfloor \frac{-4 \ln(10)}{\ln(2/9)} \rfloor + 1$.

- (j) `function y=phi(x)`
`y= 2/x+log(x)`
`endfunction`

`N= floor(-4*log(10)/log(2/9))+1`

`U=3/2`

`for n=1:N do`

`U=phi(U)`

`end`

`disp(U, "U=")`

Le programme donne le résultat suivant :

U=

1.70644

On sait d'après la question 8.(i) que :

$$|u_N - x_1| \leq 10^{-4} = 0,0001 \text{ c'est-à-dire } u_N - 0,0001 \leq x_1 \leq u_N + 0,0001.$$

Donc la valeur exacte de x_1 est comprise entre 1,70634 et 1,70654.

Exercice 2 (EDHEC 2001)

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k; k+1]$, par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^+* :

$$k \leq t \leq k+1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

On intègre l'inégalité de gauche avec des bornes rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$$

et enfin comme $\frac{1}{k+1}$ est une constante,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$$

2. On somme ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^n = \ln(n)$$

Enfin on effectue un changement d'indice dans la somme et on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = v_n - \frac{1}{1} \leq \ln(n) \quad \text{donc} \quad v_n \leq \ln(n) + 1.$$

3. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " u_n est bien défini et $u_n > 0$ ". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : u_0 est définie et $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$. Alors $\frac{1}{u_n}$ existe donc u_{n+1} également et par quotient de signes,

$$\frac{1}{u_n} > 0 \quad \text{et} \quad u_n > 0 \quad \text{donc par somme} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0.$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et $u_n > 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0 \quad \text{car} \quad u_n > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante (strictement).

4. (a) On a (on pouvait aussi développer le carré et simplifier) :

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k} + u_k\right) \times \left(u_k + \frac{1}{u_k} - u_k\right) \\ &= \frac{1}{u_k} \times \left(2u_k + \frac{1}{u_k}\right) = 2 + \frac{1}{u_k^2}. \end{aligned}$$

- (b) On somme les égalités de la question 2)a) pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{u_k^2}\right)$$

On remarque le télescopage pour calculer la somme de gauche, et à droite on sépare en deux sommes et on calcule la première, évidente :

$$u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

et enfin on ajoute 1 des deux côtés, et comme $u_0 = 1$:

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$

- (c) Un carré est toujours positif, et la somme de termes positifs est toujours positive donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 0$$

puis on ajoute $2n + 1$:

$$2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = u_n^2 > 2n + 1.$$

Par comparaison puis en composant par la racine carrée avec $u_n > 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty \quad \text{puis} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

5. (a) L'astuce est d'utiliser la majoration de u_n^2 pour minorer $\frac{1}{u_n^2}$ et donc minorer la somme dans l'expression de u_n^2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ (on part de $k = 1$ comme dans v_{n+1}), on a par décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+^* :

$$u_k^2 \geq 2k + 1 \geq 2k \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k + 1} \leq \frac{1}{2k}$$

donc en sommant ces inégalités, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} v_{n-1}$$

puis en rajoutant $\frac{1}{u_0^2} = 1$ et $2n + 1$, on obtient :

$$u_n^2 = 2n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

(b) Pour tout $n \geq 2$, $n - 1 \geq 1$ donc en appliquant la partie I on a :

$$v_{n-1} \leq \ln(n-1) + 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2}v_{n-1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

On ajoute $2n + 2$ et on obtient :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1} \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1).$$

(c) On a obtenu l'encadrement suivant de u_n^2 pour tout $n \geq 2$:

$$2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

et pour obtenir l'équivalent souhaité de u_n , on compose par la racine carrée (tous les termes sont strictement positifs et $|u_n| = u_n$) puis on divise par $\sqrt{2n}$:

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \frac{\sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)}}{\sqrt{2n}}.$$

On cherche alors les limites des deux côtés de l'encadrement :

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{2n(1 + \frac{1}{2n})}{2n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+0} = 1.$$

et de l'autre côté, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)}}{\sqrt{2n}} &= \sqrt{\frac{2n \left(1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{2n}\right)}{2n}} = \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n[1 - \frac{1}{n}])}{2n}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n) + \ln(1 - \frac{1}{n})}{2n}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n) \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)}{2n}} \end{aligned}$$

Or par quotient de limites

$$\frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et par croissances comparées

$$\frac{\ln(n)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc par produit, puis somme, composée de limites :

$$\frac{\ln(n) \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

puis

$$1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n) \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et enfin

$$\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n) \left(1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et donc les deux côtés de l'encadrement ont pour limite 1 en $+\infty$, donc le terme du milieu aussi par encadrement, ce qui donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1 \quad \text{donc} \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

6. On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel n .

On affecte la valeur u_n à u . On calcule les termes de u_1 à u_n (for k = 1 to n).

```
n = input("Donner n : ")
u = 1
for k = 1 to n do
    u = u + 1/u
end
disp(u)
```

7. (a) On calcule u_n et n tant que $u_n < 100$.

```
n = 0
u = 1
while u < 100 do
    n = n + 1
    u = u + 1/u
end
disp(n)
```

- (b) Avec les propriétés du logarithme, on a :

$$\ln(5000) = \ln(5^4 2^3) = 4 \ln(5) + 3 \ln(2) < 4 \times 1,61 + 3 \times 0,70 = 8,54.$$

Donc $\ln(5000) < 8,54$.

- (c) Comme la suite (u_n) est croissante (question 3.(b)), il faut déterminer n tel que $u_n \geq 100$ et $u_{n-1} < 100$.

Or, on a l'encadrement : $2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$. Alors :

- Pour $n = 4994$: On a $\ln(n-1) < \ln(5000)$ (par croissance du logarithme) donc $2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2} < 9988 + 2,5 + 8,54 < 10000$.
Donc $(u_{4994})^2 < 10000$ et $u_{4994} < 100$ (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). Donc la valeur recherchée est strictement supérieure à 4994.
- Pour $n = 5000$, on a $2n + 1 = 10001 > 10000$ donc $(u_{5000})^2 > 10000$ et $u_{5000} > 100$ (toujours par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). Donc la valeur recherchée est inférieure ou égale à 5000.

Ainsi, n est compris entre 4995 et 5000.

Exercice 3 (EDHEC 2007)

1. (a) On pose $g : x \mapsto x - \ln(x)$ qui est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

qui est négative pour $x \leq 1$ et positive pour $x \geq 1$ et ne s'annule qu'en $x = 1$.

g est donc strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et admet un minimum en 1, égal à

$$g(1) = 1 - \ln 1 = 1$$

et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) \geq g(1) = 1 > 0$$

- (b) On en déduit que le dénominateur $x - \ln(x)$ ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* , donc la fonction est bien définie sur \mathbb{R}_+^* et en 0, donc le domaine de définition de f est \mathbb{R}_+ .
2. (a) f est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

En 0 on a :

$$f(x) = \frac{\ln x}{-\ln(x) \left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0 - 1} = -1 = f(0)$$

par opérations élémentaires sur les limites, et f est continue en 0.

f est donc continue sur $D = \mathbb{R}_+$.

- (b) On a calculé pour $x > 0$,

$$T_0 = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \frac{\frac{\ln x + x - \ln x}{x - \ln x}}{x} = \frac{1}{x - \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3. (a) f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \ln x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

- (b) On factorise le numérateur par le terme prépondérant :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{0}{1 - 0} = 0$$

car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

- (c) On étudie le signe de f' sur $]0; +\infty[$; comme le dénominateur est un carré, il est positif et f' est du signe de $1 - \ln x$, donc strictement positive pour $0 < x < e$, strictement négative pour $x > e$ et nulle pour $x = e$. :

x	0	1	e	$+\infty$		
$f'(x)$	0	+	+	0	-	
$f(x)$	-1	0	$\frac{1}{e-1}$	0		
$f(x)$		-	0	+	+	

4. On cherche les valeurs où f s'annule pour conclure avec le tableau de variation : on résout l'équation $f(x) = 0$.

- Pour $x = 0$, on a $f(0) = -1 \neq 0$.

- pour $x \neq 0$ on a

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$$

On le rajoute dans le tableau de variation et on en déduit que $f(x) < 0$ pour $x < 1$, $f(x) = 0$ pour $x = 1$ et $f(x) > 0$ pour $x > 1$.

5. (a) `function y=f(x)`
`if x==0 then`
`y=-1`
`else`
`y=log(x)/(x-log(x))`
`end`
`endfunction`

`x=0:0.1:10`
`fplot2d(0:0.1:10,f)`

(b) L'instruction `x=0:0.1:10` renvoie un vecteur ligne x contenant la liste des réels de 0 à 10 avec un pas de 0,1. C'est-à-dire : $x = (0 \ 0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ \dots \ 10)$. On remarque que ce vecteur contient 101 coefficients.

Ainsi, si on voulait créer ce vecteur avec la commande `linspace`, il aurait fallu taper :

`x=linspace(0,10,101)`

car la commande `linspace(a,b,n)` crée un vecteur ligne contenant n nombre régulièrement espacés dans l'intervalle $[a, b]$.

(c) Ces instructions tracent la représentation graphique de la suite d_k définie par $d_k = f(1/k)$. Or on sait d'après la question 2.(a) que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. En posant $x = 1/k \rightarrow 0$ on a bien $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(1/k) = f(0) = -1$ par continuité de f .