Correction - DM 2

A rendre le Vendredi 27 Septembre

Exercice 1 (ECRICOME 1994)

1. `A= -1*np.ones((4,4)) + 3*np.eye(4,4)`

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

3. $2A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A^2$ donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ conviennent.

4. Comme $A^2 = 2A + 3I$, alors $I = \left(A^2 - 2A\right)/3 = A\left(A - 2I\right)/3 = \frac{1}{3}\left(A - 2I\right)A$ donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\left(A - 2I\right)$

5. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ pour tout entier naturel n.

   Initialisation : $A^0 = I = 0 \cdot A + 1 \cdot I$ donc $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$ conviennent et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ où α_n et β_n sont des réels. Alors :
   $$A^{n+1} = A^n A = \left(\alpha_n A + \beta_n I\right) A = \alpha_n A^2 + \beta_n A = \alpha_n \left(2A + 3I\right) + \beta_n A = \left(2\alpha_n + \beta_n\right) A + 3\alpha_n I.$$
   Donc $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$ conviennent. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$, avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$.

6. Voici la fonction demandée :

```python
def suites(n):
    alpha = 0
    beta = 1
    for k in range(1,n+1):
        mem = alpha  # on mémorise l'ancienne valeur alpha(k-1)
        alpha = 2*alpha+beta  # on calcule alpha(k)
        beta = 3*mem  # on calcule beta(k)
    return alpha, beta
```

7. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+2} = 2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n$.
   Donc $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   Son équation caractéristique est : $r^2 - 2r - 3 = 0$ qui a pour racines -1 et 3. Donc pour tout entier naturel n, $\alpha_n = \lambda\left(-1\right)^n + \mu 3^n$ avec λ et μ qui vérifient :
   $$\begin{cases} \alpha_0 = \lambda\left(-1\right)^0 + \mu 3^0 \\ \alpha_1 = \lambda\left(-1\right)^1 + \mu 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 1 = -\lambda + 3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4\mu \\ \lambda = 3\mu - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1/4 \\ \lambda = -1/4 \end{cases}$$
   Donc pour tout entier naturel n, $\alpha_n = \dfrac{\left(3^n - (-1)^n\right)}{4}$.

(b) $\beta_n = 3\alpha_{n-1} = 3\frac{\left(-(-1)^{n-1}+3^{n-1}\right)}{4} = \frac{(3(-1)^n+3^n)}{4}$ pour $n \geq 1$. Cette formule est également vraie pour $n = 0$.

8. (a) On aurait :

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= \frac{\left(3^{-1}-(-1)^{-1}\right)}{4} = \frac{(1/3+1)}{4} = \frac{1}{3} \\ \beta_{-1} &= \frac{\left(3(-1)^{-1}+3^{-1}\right)}{4} = \frac{(-3+1/3)}{4} = -2/3, \end{aligned}$$

ce qui correspond aux coefficients trouvés à la question 4. Donc les expressions sont encore valables pour $n = -1$.

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$(A^{-1})^n = \alpha_{-n}A+\beta_{-n}I = \frac{\left(3^{-n}-(-1)^{-n}\right)}{4}A+\frac{\left(3(-1)^{-n}+3^{-n}\right)}{4}I$".
Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée d'après la question 8.(a).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} & (A^{-1})^{n+1} \\ = \; & (A^{-1})^n \times A^{-1} \\ \underset{\text{par H.R.}}{=} \; & \left(\frac{\left(3^{-n}-(-1)^{-n}\right)}{4}A + \frac{\left(3(-1)^{-n}+3^{-n}\right)}{4}I\right) \times A^{-1} \\ \underset{\text{en développant}}{=} \; & \frac{\left(3^{-n}-(-1)^{-n}\right)}{4}I + \frac{\left(3(-1)^{-n}+3^{-n}\right)}{4}A^{-1} \\ \underset{\text{d'après 4.}}{=} \; & \frac{\left(3^{-n}-(-1)^{-n}\right)}{4}I + \frac{\left(3(-1)^{-n}+3^{-n}\right)}{4} \times \frac{1}{3}(A-2I) \\ = \; & \frac{1}{3}\frac{\left(3(-1)^{-n}+3^{-n}\right)}{4}A + \frac{\left(3^{-n}-(-1)^{-n}-2(-1)^n-\frac{2}{3}3^{-n}\right)}{4}I \\ \underset{\text{car } \frac{1}{3}\times 3^{-n}=3^{-(n+1)}}{=} \; & \frac{\left((-1)^{-n}+3^{-(n+1)}\right)}{4}A + \frac{\left(3^{-(n+1)}-3(-1)^{-n}\right)}{4}I \\ \underset{\text{car } (-1)^{-n}=-(-1)^{-(n+1)}}{=} \; & \frac{\left(-(-1)^{-(n+1)}+3^{-(n+1)}\right)}{4}A + \frac{\left(3^{-(n+1)}+3(-1)^{-(n+1)}\right)}{4}I \\ = \; & \alpha_{-(n+1)}A + \beta_{-(n+1)}I. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^{-n} = \alpha_{-n}A+\beta_{-n}I$.

Exercice 2 (ECRICOME 2011)

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A, on liste les critères :

- Δ est une matrice diagonale donc diagonalisable ; en effet $\Delta = I\Delta I = I\Delta I^{-1}$ (l'inverse de l'identité est l'identité car $I \times I = I$).

- $N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- $\Delta N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta N = N\Delta$.
- $N + \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

2. (a) $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Donc : $(A-I)^2(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Ainsi,
   $$(A-I)^2(A-2I) = 0$$

   (b) La question précédente nous donne que le polynôme $P(X) = (X-1)^2(X-2)$ est annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.

   De plus, $A - 1I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a une ligne nulle donc n'est pas inversible donc 1 est bien valeur propre de A.

   De même, $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a deux colonnes égales donc n'est pas inversible donc 2 est bien valeur propre de A.

   (c) On développe l'égalité $(A-I)^2(A-2I) = 0$, en sachant que $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I$ par formule du binôme car A et I commutent, et on obtient $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$.

   Puis on isole l'identité : $\frac{1}{2}(A^3 - 4A^2 + 5A) = I$.

   Et on factorise par A : $A \times \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) \times A = I$.

   Donc A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible avec les pivots suivants :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad , \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + (3-\lambda)L_1$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda(3-\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

On obtient une réduite triangulaire qui n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul ce qui donne :

$$1 - \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } 2 - \lambda(3-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

qui a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$ donc admet deux solutions :

$$\lambda_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

En rassemblant toutes les solutions, on obtient : $Sp(A) = \{1, 2\}$.

4. (a) On sait que $dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = 3\times 1 = 3$. (X_1, X_2, X_3) est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc il suffit de montrer qu'elle est libre pour que ce soit une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation suivante d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$xX_1 + yX_2 + zX_3 = 0 \iff \begin{cases} x+z=0 \\ -x-2z=0 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3z=0 \\ x=-2z \\ y=0 \end{cases} \iff x=y=z=0$$

Cette famille est bien une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) On a :

$$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1$$

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_2$$

$$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_3.$$

Donc X_1 est vecteur propre de Δ associé à la valeur propre 2, X_2 est vecteur propre de Δ associé à la valeur propre 1 et X_3 est vecteur propre de Δ associé à la valeur propre 1.

(c) On a démontré aux deux questions précédentes que (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de Δ. Donc Δ est diagonalisable.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, P est constituée d'une base de vecteurs propres de Δ respectivement associés aux valeurs propres 2, 1 et 1 donc $\Delta = PDP^{-1}$.

(d) Pour isoler D, on multiplie l'égalité ci-dessus par P^{-1} à gauche :

$$P^{-1}\Delta = P^{-1}PDP^{-1} = IDP^{-1} = DP^{-1},$$

puis par P à droite :

$$P^{-1}\Delta P = DP^{-1}P = DI = D.$$

(e) En appliquant la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow -L_3 \; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et on vérifie au brouillon que $PP^{-1} = I$ (ou bien $P^{-1}P = I$).

(f) i. Si une matrice M est bien diagonalisable alors l'instruction `Sp, VP = al.eig(M)` diagonalise la matrice M, c'est-à-dire qu'elle calcule une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

ii. On remarque que la première colonne obtenue $\begin{pmatrix} 0,70710678 \\ -0,70710678 \\ 0 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur X_1 donc il appartient bien à $E_2(\Delta) = Vect(X_1)$ et c'est bien un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre 2.
De même, la deuxième colonne est bien colinéaire à X_3 donc c'est bien un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre 2, de même que la dernière colonne qui est égale à X_2.
On a bien 3 vecteurs propres de Δ qui sont linéairement indépendants car (X_1, X_2, X_3) l'étaient donc on a bien une base de vecteurs propres de Δ.

5. (a)
$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
donc N est une matrice nilpotente.

(b) On vérifie les critères :
- Δ est diagonalisable.
- N est nilpotente.
- $\Delta N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$
  et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$ donc $\Delta N = N\Delta$.
- $\Delta + N = A$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.

(c) Comme Δ et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme pour tout $n \geq 2$:
$$\begin{aligned} A^n &= (N+\Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} \\ &= \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \end{aligned}$$
Ensuite, pour $n = 1$, on a $A^1 = A = \Delta + N$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.
Enfin, pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $\Delta^0 + 0N\Delta^{0-1} = I$ donc la formule reste vraie (avec Δ^{-1} qui existe puisque Δ est semblable à une matrice diagonale inversible, car D n'a pas de 0 sur la diagonale).

(d) Notons $\mathscr{P}(k)$ la propriété : "$\Delta^k N = N$". Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

<u>Initialisation</u> : On a $\Delta^0 N = IN = N$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(k+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $\Delta^k N = N$. Alors $\Delta^{k+1} N = \Delta(\Delta^k N) = \Delta N = N$ en utilisant la question 4.(b) à la dernière égalité. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k N = N$.

(e) Pour $n-1 \geq 0$ donc pour $n \geq 1$, on a : $\Delta^{n-1}N = N = N\Delta^{n-1}$ puisqu'elles commutent. Donc, avec la question 5.(c), on obtient :

$$A^n = \Delta^n + nN$$

avec :

- Δ^n diagonalisable car $\Delta^n = PD^nP^{-1}$, où P est inversible et D^n est diagonale.
- nN nilpotente puisque $(nN)^2 = n^2N^2 = 0$ et $nN \neq 0$.
- Δ^n et nN commutent puisque Δ et N commutent.

D'où (Δ^n, nN) sera une décomposition de Dunford de A^n pour $n \geq 1$.
Enfin, $(\Delta^0, 0N) = (I, 0)$ l'est aussi pour $A^0 = I$ (trivial).

Exercice 3 (ECRICOME 1996)

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions usuelles dérivables et

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

car $1 + x > 1 > 0$ et $x > 0$ sur cet intervalle. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue puisqu'elle est dérivable, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]\lim\limits_{x\to 0} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

Or par somme de limites immédiates on obtient :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

De plus $n \in \mathbb{R}$, donc n admet un unique antécédent par f, et l'équation (E_n) a donc une unique solution, que l'on note x_n.

2. Montrons à présent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$: ces deux quantités sont implicites donc on se ramène à des quantités explicites : par stricte croissance de f,

$$x_n < x_{n+1} \iff f(x_n) < f(x_{n+1}) \iff n < n+1.$$

Puisque $n < n+1$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $x_n < x_{n+1}$ l'est aussi, et la suite (x_n) est bien strictement croissante.

3. On considère la fonction $g(x) = \ln x - x$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

qui est du signe de $1-x$ car $x > 0$, donc on obtient les variations suivantes :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\Vert$
$g(x)$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$

Comme g atteint un maximum en $x = 1$, égal à -1, elle est donc strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\ln(x) - x < 0 \quad \text{donc} \quad \ln(x) < x.$$

4. Comme x_n est implicite, on compose cet encadrement par f pour "désimpliciter" : par stricte croissance de f,
$$\frac{n}{2} \leq x_n \leq n \iff f\left(\frac{n}{2}\right) \leq f(x_n) = n \leq f(n).$$
On calcule alors :
$$f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}$$
donc l'inégalité de gauche revient à prouver que
$$\ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \frac{n}{2}$$
ce que la question précédente assure. En effet $\frac{n}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ donc la question précédente donne :
$$\ln\left(\frac{n}{2}\right) < \frac{n}{2} \quad \text{donc} \quad f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$
De l'autre côté on calcule :
$$f(n) = n + \ln n$$
donc l'inégalité de droite revient à prouver que $\ln n \geq 0$. Or on sait que $n \geq 1$, donc par stricte croissance du logarithme,
$$\ln(n) \geq 0 \quad \text{donc} \quad f(x) = \ln n + n \geq n.$$
On ne déduit finalement que
$$f\left(\frac{n}{2}\right) \leq f(x_n) \leq f(n) \quad \text{donc} \quad \frac{n}{2} \leq x_n \leq n.$$

5. Par passage à la limite dans l'inégalité $\frac{n}{2} \leq x_n$, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

6. Comme (x_n) est implicite, il faut encadrer la quantité pour obtenir sa limite. Or on a un encadrement de (x_n), on compose par ln strictement croissante :
$$\frac{n}{2} \leq x_n \leq n \quad \text{donc} \quad \ln\left(\frac{n}{2}\right) = \ln n - \ln 2 \leq \ln(x_n) \leq \ln n.$$
On divise enfin par $n > 0$:
$$\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln n}{n}.$$
Par croissances comparées $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc les termes de gauche et droite tendent tous deux vers 0. On en déduit par encadrement que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0.$$
Pour l'équivalent, il faut la limite du quotient qui doit valoir 1. Cette fois-ci l'encadrement de x_n ne permet pas de conclure, et on revient à la définition de x_n, qui nous dit que :
$$f(x_n) = n \iff \ln(x_n) + x_n = n.$$

On isole x_n et on divise par n :

$$x_n = n - \ln(x_n) \quad \text{donc} \quad \frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

d'après la limite précédente, donc on en déduit bien que :

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} n.$$

7. A nouveau l'encadrement précédent de x_n (et donc de x_{n+1} ne permet pas de conclure (il permet d'encadrer x_n entre une quantité qui tend vers $-\infty$ et une autre vers $+\infty$, ce qui ne dit absolument rien sur sa limite). On revient encore à la définition :

$$f(x_n) = n \Longleftrightarrow \ln(x_n) + x_n = n \quad , \quad f(x_{n+1}) = n+1 \Longleftrightarrow \ln(x_{n+1}) + x_{n+1} = n+1$$

On en déduit que :

$$x_{n+1} - x_n = n+1 - \ln(x_{n+1}) - [n - \ln(x_n)] = 1 + \ln(x_n) - \ln(x_{n+1}) = 1 - \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right).$$

Enfin on cherche la limite du quotient à l'intérieur du logarithme : comme on a un quotient on peut utiliser l'équivalent précédent, qui donne par changement de variable $n' = n+1$:

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} n \quad \text{et} \quad x_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} n+1$$

donc

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

car $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1 en $+\infty$. On en déduit que ce quotient tend vers 1, puis par somme et composée immédiates :

$$x_{n+1} - x_n = 1 - \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \ln(1) = 1.$$

8. (a) On calcule :

$$u_n - 1 = \frac{n - x_n}{\ln n} - 1 = \frac{n - x_n - \ln n}{\ln n}.$$

Pour faire disparaître x_n et apparaître $\ln(x_n)$, on revient une fois de plus à la définition de x_n :

$$x_n + \ln(x_n) = n \quad \text{donc} \quad n - x_n = \ln(x_n)$$

et on termine :

$$u_n - 1 = \frac{\ln(x_n) - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}.$$

(b) On va chercher à utiliser la question précédente, on écrit donc

$$u_n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$$

Or on a vu que

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} n \quad \text{donc} \quad \frac{x_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Par composée on en déduit que le numérateur de la fraction tend vers $\ln(1) = 0$, donc par quotient de limites la fraction tend vers 0, et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

(c) Il faut prouver que
$$\frac{1-u_n}{\frac{1}{n}} = n(1-u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
Or on a vu que
$$u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \quad \text{donc} \quad 1-u_n = -\frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$$
et enfin
$$n(1-u_n) = -n\frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}.$$
On remarque que comme $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut l'écrire sous la forme :
$$\frac{x_n}{n} = 1 + \frac{x_n}{n} - 1$$
avec $X_n = \frac{x_n}{n} - 1$ qui tend vers 0, donc par équivalent usuel $\ln(1+X_n) \underset{+\infty}{\sim} X_n$:
$$\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} - 1.$$
D'où on en déduit que :
$$n(1-u_n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n\left(\frac{x_n}{n}-1\right)}{\ln(n)} = -\frac{x_n - n}{\ln n} = \frac{n-x_n}{\ln(n)} = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
et on conclut finalement que :
$$1-u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

9. Première méthode : on isole le o ( ) dans cette égalité pour savoir quelle limite considérer :
$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \Longleftrightarrow x_n - n + \ln n - \frac{\ln(n)}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$
On cherche donc la limite en $+\infty$ de :
$$\begin{aligned}\frac{x_n - n + \ln n - \frac{\ln(n)}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} &= \left(x_n - n + \ln n - \frac{\ln(n)}{n}\right) \times \frac{n}{\ln(n)} = n\left(\frac{x_n-n}{\ln(n)} + 1 - \frac{1}{n}\right)\\ &= n\left(-u_n + 1 - \frac{1}{n}\right) = n(1-u_n) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-1=0\end{aligned}$$
d'après l'équivalent précédent. On en déduit bien que
$$x_n - n + \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad \text{donc} \quad x_n = n - \ln n + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$
Deuxième méthode : puisqu'on doit le déduire de la question précédente, on réécrit l'équivalent avec un o ( ) en revenant à la définition :
$$1-u_n \sim \frac{1}{n} \Longleftrightarrow 1-u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc en revenant à la définition de u_n :
$$1 - \frac{n-x_n}{\ln(n)} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
puis en multipliant par $\ln(n)$ et en isolant x_n :
$$\ln(n) - n + x_n = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \qquad \text{donc} \qquad x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + +o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

10. Voici le programme demandé :

```python
def f(x):
    return(x+np.log(x))

x = np.arange(1,101)
y = np.zeros(101)
for n in range(1,101) :
    a = n/2
    b = n
    while np.abs(b-a) >10**(-6) :
        m = (a+b)/2
        if f(m) < n :
            a = m
        else :
            b = m
    y[k-1] = (a+b)/2

plt.plot(x,y,'+')

n = list(range(1,101))
plt.plot(n,n-np.log(n)+np.log(n)/n)
plt.show()
```

On remarque que la suite (x_n) tend bien vers $+\infty$ en ayant "le même comportement" que n au voisinage de $+\infty$.

De plus, les représentations graphiques de (x_n) et de la suite $(n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n})$ se superposent au voisinage de $+\infty$ ce qui est cohérent avec le développement asymptotique obtenu en dernier question. En effet, $\frac{\ln(n)}{n}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc un $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ est extrêmement petit, quasi nul au voisinage de $+\infty$.
