Correction - DM 3

A rendre le Mercredi 9 Octobre

Exercice 1 (ECRICOME 2001)

I. Puissances successives d'une matrice.

1. On effectue le produit des matrices et on obtient :

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha = (1-2a)\times(1-2b) + ab + ab = 1 - 2a - 2b + 6ab = 1 - 2(a+b-3ab)$$

$$\beta = (1-2a)\times b + a \times (1-2b) + ab = b - 2ab + a - 2ab + ab = a + b - 3ab$$

et on en déduit bien que :

$$M(a)M(b) = M(a+b-3ab).$$

2. On remarque que $I = M(0)$ et on va chercher l'inverse de $M(a)$ sous la forme $M(b)$, et pour cela on va chercher la bonne valeur de b en résolvant :

$$a + b - 3ab = 0 \Longleftrightarrow b(1-3a) = -a \Longleftrightarrow b = \frac{-a}{1-3a} = \frac{a}{3a-1} \quad \text{si} \quad 1 - 3a \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq \frac{1}{3}.$$

On en déduit que pour $a \neq \frac{1}{3}$,

$$M(a)M\left(\frac{a}{3a-1}\right) = M(0) = I$$

donc $M(a)$ est inversible et son inverse est $M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$.

De plus si $a = \frac{1}{3}$, on a

$$M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible car toutes ses colonnes (ou ses lignes) sont égales.

On en déduit que $M(a)$ est inversible si et seulement si $a \neq \frac{1}{3}$, et dans ce cas

$$[M(a)]^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right).$$

3. La première question donne :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0 + a_0 - 3a_0^2)$$

donc les 9 équations données par l'équation matricielle donneront toutes l'équation suivante :

$$M(a_0^2) = M(a_0) \Leftrightarrow -3a_0^2 + 2a_0 = a_0 \Leftrightarrow a_0(-3a_0+1) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad 3a_0 = 1 \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{3}$$

Or on impose $a_0 \neq 0$ ce qui donne :

$$a_0 = \frac{1}{3}.$$

4. On considère les matrices :
$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$
où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.

   (a) On résout le système de 9 équations qui donnera 2 équations (les autres sont identiques) :
$$P + \alpha Q = M(a) \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+2\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 1+2\alpha = 3-6a \\ 1-\alpha = 3a \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1-3a \\ \alpha = 1-3a \end{cases}$$
   et on obtient $\alpha = 1 - 3a$ donc :
$$M(a) = P + \alpha Q = M(a) = P + (1-3a)Q.$$

   (b) $P = M(a_0)$ est solution par définition de l'équation $M(a_0)^2 = M(a_0)$ donc :
$$P^2 = P$$
   puis
$$QP = (I-P)P = P - P^2 = P - P = 0$$
$$PQ = P(I-P) = P - P^2 = P - P = 0$$
   et enfin
$$Q^2 = (I-P)(I-P) = I - P - P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q.$$
   Remarque : si on développe $Q^2 = (I-P)^2$ avec une identité remarquable, il faut justifier précédemment que les matrices P et Q commutent (car les identités remarquables sont des cas particuliers de la formule du binôme de Newton).

   (c) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété "il existe u_n et v_n tels que $[M(a)]^n = u_nP + v_nQ$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   <u>Initialisation</u> : $M(a)^0 = I = P + Q = u_0P + v_0Q$ avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, $[M(a)]^n = u_nP + v_nQ$. Alors :
$$\begin{aligned} [M(a)]^{n+1} &= (u_nP + v_nQ)(P + \alpha Q) = u_nP^2 + u_n\alpha PQ + v_nQP + v_n\alpha Q^2 \\ &= u_nP + v_n\alpha Q = u_{n+1}P + v_{n+1}Q \end{aligned}$$
   avec $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \alpha v_n$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   <u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe u_n et v_n tels que $[M(a)]^n = u_nP + v_nQ$.

   (d) On a obtenu précédemment que
$$M(a)^n = u_nP + v_nQ$$
   avec des suites (u_n) et (v_n) qui vérifient :
$$u_1 = 1, \quad v_1 = \alpha \quad \text{et pour tout } n \geq 0, \quad u_{n+1} = u_n \quad \text{et } v_{n+1} = \alpha v_n$$
   donc les deux suites sont géométriques et on obtient pour tout $n \geq 1$:
$$u_n = 1^{n-1}u_1 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad v_n = \alpha^{n-1}v_1 = \alpha^n$$

et on obtient finalement :

$$M(a)^n = P + \alpha^n Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n \end{pmatrix}$$

Remarque : On aurait pu utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir ce résultat. Les matrices P et Q commutent car $PQ = QP = 0$, et avec $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \geq 1, \quad P^n = P \quad \text{et} \quad Q^n = Q$$

Par formule du binôme de Newton, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$M(a)^n = (P + \alpha Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k Q^k P^{n-k}$$

qui donne d'une part :

$$M(a)^1 = P + \alpha Q$$

et pour tout $n \geq 2$,

$$M(a)^n = P^n + PQ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k Q^{k-1} P^{n-k-1} + \alpha^n Q^n = P + 0 + \alpha^n Q$$

Cette formule est encore valable pour $n = 1$ et $n = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(a)^n = P + \alpha^n Q$$

qu'on explicite comme ci-dessus.

5. (a) Voici le programme complété :

```python
def mat(a) :
    P = 1/3*np.ones((3,3))
    Q = np.eye(3,3)-P
    M = P+(1-3*a)*Q
    return(M)
```

   (b) On entre dans la console : `>>> mat(2)`

II. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

1. (a) On remarque qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a :

$$X_{n+1} = M(a) X_n$$

donc une récurrence classique donne

$$\begin{aligned} X_n &= M(a)^{n-1} X_1 = \Big[P + (1-3a)^{n-1} Q \Big] \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} p_1 + q_1 + r_1 \\ p_1 + q_1 + r_1 \\ p_1 + q_1 + r_1 \end{pmatrix} + (1-3a)^{n-1} \begin{pmatrix} 2p_1 - q_1 - r_1 \\ -p_1 + 2q_1 - r_1 \\ -p_1 - q_1 + 2r_1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

On en déduit en effectuant le produit matriciel que

$$p_n = \frac{1}{3}\left(\left[1+2(1-3a)^{n-1}\right]p_1 + \left[1-(1-3a)\right]^{n-1}(q_1+r_1)\right).$$

et de même :

$$q_n = \frac{1}{3}\left(\left[1+2(1-3a)^{n-1}\right]q_1 + \left[1-(1-3a)\right]^{n-1}(p_1+r_1)\right).$$

$$r_n = \frac{1}{3}\left(\left[1+2(1-3a)^{n-1}\right]r_1 + \left[1-(1-3a)\right]^{n-1}(p_1+q_1)\right).$$

(b) Comme $a \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$, on a :

$$0 < a < 2/3 \quad \text{donc} \quad 0 < 3a < 2 \quad \text{donc} \quad -2 < -3a < 0 \quad \text{et enfin} \quad -1 < 1-3a < 1$$

donc $1-3a \in]-1,1[$ donne

$$(1-3a)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis on en déduit par opérations élémentaires sur les limites que p_n, q_n et r_n admettent pour même limite :

$$\ell = \frac{p_1+q_1+r_1}{3}.$$

2. (a) Avec le système complet d'évènements (M_n, S_n, B_n), on a :

$$M_{n+1} = (M_n \cap M_{n+1}) \cup (S_n \cap M_{n+1}) \cup (B_n \cap M_{n+1})$$

Par incompatibilité des événements puis avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(M_{n+1}) &= P((M_n \cap M_{n+1}) \cup (S_n \cap M_{n+1}) \cup (B_n \cap M_{n+1})) \\ &= P(M_n \cap M_{n+1}) + P(S_n \cap M_{n+1}) + P(B_n \cap M_{n+1}) \\ &= P(M_n)P_{M_n}(M_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(M_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(M_{n+1}) \\ &= \frac{2}{3}P(M_n) + \frac{1}{6}P(S_n) + \frac{1}{6}P(B_n). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1}) &= P_{M_n}(S_{n+1})P(M_n) + P_{S_n}(S_{n+1})P(S_n) + P_{B_n}(S_{n+1})P(B_n) \\ &= \frac{1}{6}P(M_n) + \frac{2}{3}P(S_n) + \frac{1}{6}P(B_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P_{M_n}(B_{n+1})P(M_n) + P_{S_n}(B_{n+1})P(S_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) \\ &= \frac{1}{6}P(M_n) + \frac{1}{6}P(S_n) + \frac{2}{3}P(B_n). \end{aligned}$$

(b) On remarque qu'en posant

$$a = \frac{1}{6} \in \left]0; \frac{2}{3}\right[\quad , \quad p_n = P(M_n) \quad , \quad q_n = P(S_n) \quad \text{et} \quad r_n = P(B_n),$$

on retrouve les hypothèses de la question 1, dont on va appliquer le résultat :

$$P(M_n) = p_n = \frac{1}{3}\left(\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times 0 + \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times 1\right) = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right].$$

car l'énoncé donne (le premier jour le titre est stable) :

$$p_1 = 0 \quad , \quad q_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_1 = 0$$

et avec des calculs identiques :

$$\begin{aligned} P(M_n) &= \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right], \\ P(S_n) &= q_n = \frac{1}{3}\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right], \\ P(B_n) &= r_n = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

(c) La question 1. montre que les trois suites ont la même limite

$$\ell = \frac{p_1+q_1+r_1}{3} = \frac{1}{3}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (ECRICOME 2018)

1. (a) La relation matricielle B^3-5B^2+6B permet de voir que $X^3-5X^2+6X = X(X-2)(X-3)$ est un polynôme annulateur de B. Par conséquent, les valeurs propres de B sont à chercher parmi les racines de ce dernier, c'est-à-dire 0, 2 et 3.

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non-inversible ($C_1 = -C_2$), donc 0 est valeur propre de B.

$B - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ non-inversible ($C_1 = C_3$), donc 2 est valeur propre de B.

$B - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ non-inversible ($C_1 = C_2 + C_3$), donc 3 est valeur propre de B.

Ainsi, $Sp(B) = \{0, 2, 3\}$.

(b) Pour $E_0(B)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(B) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-z &=& 0 \\ -3x+3y-3z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x-y-z &=& 0 & (L_1) \\ -6z &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2+3L_1) \\ 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x &=& y & (L_1) \\ z &=& 0 & \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $E_0(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Pour $E_2(B)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(B) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x-y-z &=& 0 \\ -3x+y-3z &=& 0 \\ -x+y-z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -x-y-z &=& 0 & (L_1) \\ 4y &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2-3L_1) \\ 2y &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x &=& -z & (L_1) \\ y &=& 0 & \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $E_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \text{ et } y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour $E_3(B)$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(B) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x-y-z &=& 0 \\ -3x-3z &=& 0 \\ -x+y-2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -2x-y-z &=& 0 & (L_1) \\ 3y-3z &=& 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1) \\ 3y-3z &=& 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1) \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x &=& -z & (L_1) \\ y &=& z & \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_3(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \text{ et } y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ (en multipliant le vecteur obtenu par -1 pour anticiper la question suivante).

(c) Montrons que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Cette famille contient $3 = dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

$$\begin{aligned}
a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+b-c &=& 0 \\ -a+b &=& 0 \\ -a+c &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a+b-c &=& 0 & (L_1) \\ 2b-c &=& 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ b &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow a = b = c = 0.
\end{aligned}$$

C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de B. Donc B est diagonalisable et en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a bien $B = PD_2P^{-1}$ donc $D_2 = P^{-1}BP$ et P inversible avec les coefficients demandés pour sa première ligne.

2. (a) On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$AV_1 = 3V_1$ et $V_1 \neq 0$ donc V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.
$AV_2 = 3V_2$ et $V_2 \neq 0$ donc V_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.
$AV_3 = 4V_3$ et $V_3 \neq 0$ donc V_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

(b) On a prouvé à la question 1.(c) que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, elle est composée de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable et $A = PD_1P^{-1} \Leftrightarrow D_1 = P^{-1}AP$ avec P la matrice inversible de la question 1.(c) et

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Comme clairement

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

la matrice introduite comme P^{-1} est bien l'inverse de P (par unicité de celle-ci). Ensuite, on obtient

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

(b) Remarquons qu'avec la question 1, $P^{-1}A = D_2P^{-1}$ et $P^{-1}B = D_1P^{-1}$.On a alors :

$$\begin{aligned}
Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2}\\
&= P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1}+\frac{1}{6}BX_n\right)\\
&= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1}+\frac{1}{6}P^{-1}BX_n\\
&= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1}+\frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n\\
&= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1}+\frac{1}{6}D_2Y_n.
\end{aligned}$$

(c) Comme

$$D_1 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_2 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

la relation précédente donne immédiatement

$$Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1}+\frac{1}{6}D_2Y_n \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+2} &=& \frac{1}{6}\times 3a_{n+1}+\frac{1}{6}\times 3a_n\\ b_{n+2} &=& \frac{1}{6}\times 3b_{n+1}+0\\ c_{n+2} &=& \frac{1}{6}\times 4c_{n+1}+\frac{1}{6}\times 2c_n\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+2} &=& \frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\\ b_{n+2} &=& \frac{1}{2}b_{n+1}\\ c_{n+2} &=& \frac{2}{3}c_{n+1}+\frac{1}{3}c_n\end{array}\right.$$

(d) On reconnait deux suites à récurrence linéaire d'ordre 2 ((a_n) et (c_n)) et une suite géométrique (b_n) de raison 1/2. On commence par celle-ci car c'est la plus immédiate à exprimer

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour les deux autres, on suit la méthode habituelle, en commençant par introduire l'équation caractéristique. Pour (a_n), celle ci est

$$q^2-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow q=1 \quad \text{ou} \quad q=-\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$a_n = \lambda\times 1^n+\mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

où λ et μ sont à déterminer avec les conditions initiales. En injectant les valeurs pour $n=0$ et $n=1$, on trouve

$$a_n = \frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Enfin, pour (c_n), l'équation caractéristique est

$$q^2 - \frac{2}{3}q - \frac{1}{3} = 0 \Longleftrightarrow q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$c_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

et on applique la même méthode pour trouver λ et μ, pour obtenir

$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(e) Par définition,

$$Y_n = P^{-1}X_n \Leftrightarrow X_n = PY_n.$$

Donc :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

4. (a) Le programme demandé reprend la structure classique d'un programme permettant le calcul des termes d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

```
def X(n) :
    Xold = np.array([[3], [0], [-1]])
    Xnew = np.array([[3], [0], [-2]])
    A = np.array([[2, 1, -2], [0, 3, 0], [1, -1, 5]])
    B = np.array([[1, -1, -1], [-3, 3, -3], [-1, 1, 1]])
    for i in range(2, n+1) :
        Aux = 1/6*A*Xold+1/6*B*Xnew
        Xold = Xnew
        Xnew = Aux
    return( Xnew )
```

(b) Pour chaque suite, le dernier terme représenté correspond à $n = 10$. Pour cette valeur de n, les termes de chaque suite sont proches de leurs limites. On voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{11}{6} \simeq 1.8, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \simeq -1.3, \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = -\frac{11}{6} \simeq -1.8.$$

Ainsi, la suite avec des croix $\times$ correspond à (α_n), celle avec des étoiles $*$ à (β_n) et celle avec des losanges $\diamond$ à (γ_n).

Exercice 3 (EDHEC 2010)

1. $u_0 = 1 + \frac{1}{2^0} = 2$

$$u_1 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right)\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right)\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}.$$

2. (a) On a $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n + \dfrac{1}{2^{n+1}} u_n \geq u_n$ car $u_n \geq 0$ donc la suite est croissante.

   (b) Comme $u_0 = 2$ et (u_n) est croissante, $u_n \geq 2$ pour tout entier naturel n.

   (c) Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   g est définie, continue et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\|\|$

   Donc $g(x) \leq 0$ et pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

   Remarque : On pouvait aussi utiliser la concavité de $x \to \ln(1+x)$ dont la courbe est donc en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

   (d) Comme produit de termes strictement positifs, $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

   Et comme $\dfrac{1}{2^k} > -1$, on a avec la question précédente : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \leq \dfrac{1}{2^k}$.

   En sommant, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2$$

   Donc $\ln(u_n) \leq 2$ pour tout entier n.

3. On a donc $u_n \leq e^2$ et comme la suite est croissante et majorée par e^2 (et minorée par 2), elle converge vers une limite $\ell \in \left[2, e^2\right]$.

4. (a) Voici le programme demandé :

```python
U = np.zeros(101)
U[0] = 2
puissances = 1
for k in range(100) :
    puissances = puissances*1/2
    U[k+1] = U[k]*(1+puissances)
plt.plot(U,'+')
plt.show()
```

   (b) La suite (u_n) est bien croissante et majorée. Elle converge bien vers $\ell \simeq 4,8 \in [2, e^2]$.

5. (a) Comme $\ell > 0$, ln est continue en ℓ donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \ln(\ell)$.

   Or $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$.

   Cela signifie que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ converge et que $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

(b) Comme u_n et ℓ sont strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \ln(\ell) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$$

(c) Et comme $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ alors :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1\frac{1}{2}}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

(d) On a vu que la suite (u_n) était croissante donc $\ell - u \geq 0$. D'autre part,

$$\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) = -u_n + \ell \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}.$$

Comme $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$, on a $\frac{\ell}{u_n} \leq e^{1/2^n}$, donc $\ell - u_n e^{1/2^n} \leq 0$.
En multipliant par $e^{-1/2^n} > 0$, on obtient : $-u_n + \ell \mathrm{e}^{-1/2^n} \leq 0$.
Finalement $\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1/2^n}\right) \leq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1/2^n}\right)$.

(e) $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-x} - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc $g(x) \leq x$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leq x$.
On obtient $1 - \mathrm{e}^{-1/2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ et finalement pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
Comme la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente, alors par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $(\ell - u_n)$ est également convergente.