Correction - DM 4

A rendre le Vendredi 18 Octobre

Exercice 1 (ECRICOME 2015)

1. On demande ici de simuler, à l'intérieur de la boucle réalisant 10 000 simulations, une expérience.

   La ligne `M = N` doit permettre de comprendre que M représente le nombre de boules dans l'urne. A chaque passage dans la boucle, on tire une boule donc on enlève une boule, il faut donc faire `M = M-1`.

   Ensuite, on remplit la ligne `while ..... :`. Il faut simuler la condition qui fait continuer les tirages, donc le fait de tirer une boule blanche, de probabilité $\frac{M-1}{M}$. Pour cela on effectue un tirage aléatoire avec M résultats équiprobables, puis choisir toutes les valeurs sauf une, par exemple : `np.floor(M*rd.rand()) != 0` :

```python
N = int(input('Donner un entier naturel non nul'))
x = list(range(1,N+1))
S = [0. for k in range(N)]
for k in range(1000) :
    i = 1
    M = N
    while np.floor(M*rd.rand()) != 0 :
        i = i+1
        M = M-1
    S[i-1] = S[i-1]+1/1000
plt.bar(x,S)
plt.show()
```

   Il y a bien sûr d'autres manière de traiter la condition de la boucle `while`, par exemple avec l'instruction `np.rand() >= 1/M`.

2. On peut conjecturer que la variable X suit une loi uniforme (toutes les fréquence de la loi empirique, qui approximent les probabilités de la loi de X, semblent être égales).

3. On remarque facilement que :

$$(X = 1) = N_1 \quad , \quad (X = 2) = B_1 \cap N_2 \quad , \quad (X = 3) = B_1 \cap B_2 \cap N_3$$

   et comme les tirages ne sont pas indépendants, par probabilités composées :

$$P(X = 1) = \frac{1}{N} \quad , \quad P(X = 2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N} \quad \text{et}$$

$$P(X = 3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(N_3) = \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}.$$

4. La boule noire peut sortir à l'un quelconque des N tirages, donc

$$X(\Omega) = [\![1, N]\!].$$

   On généralise les calculs précédents : pour tout $k \geq 4$,

$$(X = k) = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

   et par probabilités composées,

$$P(X = k) = \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \frac{N-(k-2)-1}{N-(k-2)} \times \frac{1}{N-(k-1)}$$

$$= \frac{(N-1)(N-2) \times \cdots \times (N-k+1) \times 1}{N(N-1) \times \cdots \times (N-k+2) \times (N-k+1)} = \frac{1}{N}.$$

Finalement avec les probabilités déjà trouvées, X suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, ce qui confirme la conjecture précédente.

5. Ce nombre moyen est l'espérance de X : puisque c'est une loi uniforme, on obtient :
$$E(X) = \frac{n+1}{2}.$$

6. Sachant qu'on tire sans l'urne 1, on reconnaîtra l'urne lorsqu'on tirera la boule noire. On en déduit que :
$$P_{C_1}(Y = j) = P_{C_1}(X = j) = \frac{1}{N}$$
car sachant C_1, on tire dans l'urne 1, comme dans la partie I.

7. Sachant C_2, on tirera uniquement des boules blanches. Or, dans C_2, on peut tirer jusqu'à $N-1$ boules blanches : c'est donc en tirant la N-ième boule blanche qu'on saura qu'on tire dans l'urne 2. On en déduit que la loi de Y sachant C_2 est certaine égale à N, donc :
$$P_{C_2}(Y = N) = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, N-1]\!], P_{C_2}(Y = j) = 0.$$

8. D'après les probabilités totales avec le système complet d'évènements (C_1, C_2) on a :
$$(Y = j) = [C_1 \cap (Y = j)] \cup [C_2 \cap (Y = j)].$$
Par incompatibilité de la réunion et probabilités composées et avec la question précédente :
$$\forall j \in [\![1, N-1]\!], \quad P(Y = j) = P(C_1)P_{C_1}(Y = j) + P(C_2)P_{C_2}(Y = j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2N}.$$
De même, pour $j = N$:
$$P(Y = N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}.$$

9. Y est finie donc admet une espérance, qui vaut :
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} jP(Y = j) = \sum_{j=1}^{N-1} j \times \frac{1}{2N} + N\left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \\ &= \frac{1}{2N} \times \frac{(N-1)N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N-1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2N}{4} = \frac{3N+1}{4}. \end{aligned}$$

10. Il faut au moins deux tirages pour obtenir une boule noire et une boule blanche. D'autre part comme les tirages sont avec remise, ils sont illimités et à chaque tirage on peut tirer une boule blanche ou une boule noire : on peut donc obtenir n'importe quel nombre de boules de la même couleur avant d'obtenir l'autre, ce qui donne
$$T(\Omega) = [\![2, +\infty[\![.$$

11. Selon la boule tirée au départ, pour avoir $(T = k)$, il faut tirer la même couleur pendant $k-1$ tirages et l'autre couleur au tirage k, donc
$$(T = k) = [B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k] \cup [N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k]$$
Par incompatibilité de la réunion et indépendance des tirages (ils sont cette fois sans remise), on en déduit que :
$$P(T = k) = \frac{N-1}{N} \times \cdots \times \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \times \cdots \times \frac{1}{N} \times \frac{N-1}{N} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \frac{N-1}{N}.$$

12. On considère la série :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kP(T=k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\left[\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}\right]$$

On reconnait deux séries géométriques dérivées absolument convergentes, car $\left|\frac{N-1}{N}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{N}\right| < 1$. T admet donc une espérance et on a :

$$\begin{aligned}
E(T) &= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{N-1}{N})^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^2} - 1\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{(\frac{1}{N})^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{(\frac{N-1}{N})^2} - 1\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(N^2-1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1\right)\\
&= N - \frac{1}{N} + \frac{N}{N-1} - \frac{N-1}{N} = N - \frac{N}{N-1} - \frac{N}{N}\\
&= \frac{N(N-1) - N - (N-1)}{N-1} = \frac{N^2-3N+1}{N-1}.
\end{aligned}$$

13. (a) $(U=1)\cap(T=2)$ signifie qu'on a fait deux tirages pour obtenir au moins une boule blanche et une noire, et qu'on a obtenu exactement une boule blanche. Il y a donc eu une boule noire, et

$$(U=1)\cap(T=2) = [B_1\cap N_2]\cup[N_1\cap B_2]$$

Par incompatibilité de la réunion et indépendance des tirages,

$$P[(U=1)\cap(T=2)] = \frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\frac{N-1}{N} = \frac{2(N-1)}{N^2}.$$

(b) Pour $k\geq 3$, $(U=1)\cap(T=k)$ signifie qu'on a obtenu les deux couleurs pour la première fois au k-e tirage, avec $k-1$ boules de la premières couleur ($k-1\geq 2$) et une de l'autre. Comme on a obtenu exactement une boule blanche, on a forcément obtenu $k-1$ boules noires et elles doivent avoir été obtenues avant donc :

$$(U=1)\cap(T=k) = N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k$$

et par indépendance des tirages,

$$P[(U=1)\cap(T=k)] = \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}.$$

14. (a) $(U=j)\cap(T=j+1)$ signifie qu'on a obtenu pour la première fois les 2 couleurs après $j+1$ tirages dont j ont donné une boule blanche. On a donc obtenu 1 boule noire, et comme $j\geq 2$, les boules blanches arrivent avant donc

$$(U=j)\cap(T=j+1) = B_1\cap\cdots\cap B_j\cap N_{j+1}$$

et par indépendance des tirages,

$$P[(U=j)\cap(T=j+1)] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}.$$

(b) Si $k \neq j+1$, $(U=j)\cap(T=k)$ signifie qu'on a obtenu pour la première fois les deux couleurs avec j boules blanches, donc $k-j$ boules noires. Or $k-j\neq 1$, donc aucune des deux boules n'est obtenu une fois : c'est impossible puisque la 2e couleur obtenue réalise l'évènement dès son arrivée, donc on obtient obligatoirement une seule boule de cette couleur. On en déduit que :

$$\forall k \neq j+1,\ P[(U=j)\cap(T=k)] = 0.$$

15. D'après les probabilités totales avec le système complet d'évènements $(T=k)_{k\geq 2}$, on a

$$(U=1) = \bigcup_{k=2}^{+\infty}[(U=1)\cap(T=k)]$$

Par incompatibilité de la réunion et avec la question 13, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(U=1) &= \frac{2(N-1)}{N^2} + \sum_{k=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N} = \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{N-1}{N}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^n \\ &= \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{N}} - 1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{N}{N-1} - 1 - \frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{2(N-1)}{N^2} + 1 - \frac{N-1}{N} - \frac{N-1}{N^2} = \frac{N-1}{N^2} + \frac{N-N+1}{N} = \frac{N-1+N}{N^2} = \frac{2N-1}{N^2}. \end{aligned}$$

Enfin l'obtention des deux couleurs nécessite au minimum une boule blanche, et peut être obtenu avec autant de boules blanches qu'on veut suivies d'une boule noire, donc

$$U(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

On vient de voir que $P(U=1) = \dfrac{2N-1}{N^2}$, et enfin pour $j\geq 2$, on a vu que $(U=j)$ n'est possible que si, en même temps, $T=j+1$ donc on obtient :

$$(U=j) = [(U=j)\cap(T=j+1)] \quad \text{donc} \quad P(U=j) = P[(U=j)\cap(T=j+1)] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}.$$

Exercice 2 (EDHEC 2000)

1. Au deuxième lancer, on a eu au plus un changement donc $X_2(\Omega)=\{0;1\}$ et X_2 suit une loi de Bernouilli. De plus

$$(X_2=1) = P_1F_2 \cup F_1P_2$$

car il faut avoir obtenu deux résultats différents, donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_2=1) = pq+pq = 2pq$$

et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq)$.

2. (a) On a $X_3(\Omega)=\{0;1;2\}$ puis :

$$(X_3=0) = P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3$$

car il faut obtenir 3 fois le même résultat, donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_3=0) = p^3+q^3$$

Ensuite $(X_3=1)$ signifie qu'on a eu un changement, qui peut avoir eu lieu au 2e ou au 3e lancer, tandis qu'on peut commencer soir par Pile soit par Face donc :

$$(X_3=1) = P_1P_2F_3 \cup P_1F_2F_3 \cup F_1F_2P_3 \cup F_1P_2P_3$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_3 = 1) = p^2q + q^2p + q^2p + p^2q = pq(2p + 2q) = 2pq(p + q) = 2pq.$$

Enfin $(X_3 = 2)$ signifie qu'on a changé eu 2e puis au 3e lancer donc selon le résultat du premier lancer :

$$(X_3 = 2) = P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_3 = 2) = p^2q + q^2p = pq(p + q) = pq.$$

(b) X_3 est finie donc admet des moments de tous ordres. Pour le calcul on utilise la définition de l'espérance pour $E(x)$ puisqu'on connaît sa loi, puis le théorème de transfert pour $E(X^2)$ car on connaît la loi de X mais pas celle de X^2, et enfin la formule de Koenig-Huyghens :

$$E(X_3) = 0 \times (p^3 + q^3) + 1 \times 2pq + 2 \times pq = 4pq$$

puis

$$E(X_3^2) = 0^2 \times (p^3 + q^3) + 1^2 \times 2pq + 2^2 \times pq = 6pq$$

et enfin

$$V(X_3) = E(X_3^2) - [E(X_3)]^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq).$$

3. (a) On obtient $X_4(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ puis :

- $(X_4 = 0)$ signifie aucun changement donc on a le même résultat tout du long :

$$(X_4 = 0) = P_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3F_4$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_4 = 0) = p^4 + q^4.$$

- $(X_4 = 1)$ signifie qu'il y a un changement qui peut être au 2e, 3e ou 4e lancer, et on peut commencer par Pile ou par Face :

$$(X_4 = 1) = P_1F_2F_3F_4 \cup P_1P_2F_3F_4 \cup P_1P_2P_3F_4 \cup F_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3P_4$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_4 = 1) = pq^3 + p^2q^2 + p^3q + p^3q + p^2q^2 + pq^3 = 2pq(q^2 + p^2 + pq).$$

- $(X_4 = 2)$ signifie qu'il y a eu deux changement qui peuvent survenir au 2e et 3e, 2e et 4e ou 3e et 4e lancer, et on peut commencer par Pile ou Face :

$$(X_4 = 2) = P_1F_2P_3P_4 \cup P_1F_2F_3P_4 \cup P_1P_2F_3P_4 \cup F_1P_2F_3F_4 \cup F_1P_2P_3F_4 \cup F_1F_2P_3F_4$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_4 = 2) = p^3q + p^2q + p^3q + pq^3 + p^2q^2 + pq^3 = 2pq(p^2 + q^2 + pq).$$

- Enfin $(X_4 = 3)$ signifie qu'on change à chaque lancer, donc selon le résultat du premier lancer :

$$(X_4 = 3) = P_1F_2P_3F_4 \cup F_1P_2F_3P_4$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_4 = 3) = 2p^2q^2.$$

(b) Puisqu'on connaît la loi de X_4 on utilise la définition :

$$\begin{aligned} E(X_4) &= 0\times(p^4+q^4)+1\times 2pq(q^2+p^2+pq)+2\times 2pq(q^2+p^2+pq)+3\times 2p^2q^2 \\ &= 6pq(q^2+p^2+pq)+6p^2q^2 = 6pq(q^2+p^2+pq+pq) \\ &= 6pq(p^2+q^2+2pq) = 6pq(p+q)^2 = 6pq\times 1^2 = 6pq. \end{aligned}$$

4. $(X_n=0)$ signifie qu'on a le même résultat à tous les lancers donc selon le premier lancer :

$$(X_n=0) = P_1\dots P_n \cup F_1\dots F_n$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_n=0) = p^n+q^n.$$

5. $(X_n=1)$ signifie qu'on a eu un seul changement qui peut intervenir du 2e au n-e lancer, et on peut commencer par Pile ou par Face :

$$\begin{aligned} (X_n=1) &= P_1F_2\dots F_n\cup P_1P_2F_3\dots F_n\cup\dots\cup P_1\dots P_{n-2}F_{n-1}F_n\cup P_1\dots P_{n-1}F_n \\ &\quad \cup F_1P_2\dots P_n\cup F_1F_2P_3\dots P_n\cup\dots\cup F_1\dots F_{n-2}P_{n-1}P_n\cup F_1\dots F_{n-1}P_n \end{aligned}$$

Par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} P(X_n=1) &= \left(pq^{n-1}+p^2q^{n-2}+\dots+p^{n-2}q^2+p^{n-1}q\right) \\ &\quad +\left(qp^{n-1}+q^2p^{n-2}+\dots+q^{n-2}p+q^{n-1}p\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1}p^kq^{n-k} = 2q^n\sum_{k=1}^{n-1}(pq^{-1})^k = 2q^n\times pq^{-1}\times\frac{1-(pq^{-1})^{n-1}}{1-pq^{-1}} \\ &= 2pq^{n-1}\times\frac{1-p^{n-1}q^{1-n}}{1-pq^{-1}} = 2pq\times\frac{q^{n-2}-p^{n-1}q^{-1}}{1-\frac{p}{q}} \\ &= 2pq\times\frac{q^{n-2}-p^{n-1}q^{-1}}{\frac{q-p}{q}} = 2pq^2\times\frac{q^{n-2}-p^{n-1}q^{-1}}{q-p} = \frac{2pq}{q-p}(q^{n-1}-p^{n-1}). \end{aligned}$$

6. $X_n=n-1$ signifie qu'on a eu $n-1$ changements donc on a changé à chaque lancer du 2-ième au n-ième. Séparons comme demandé selon la parité de n :

- Si n est pair, alors n s'écrit sous la forme $n=2k$, avec $k\in\mathbb{N}^*$: on a alors :

$$(X_n=n-1) = P_1F_2P_3F_4\dots P_{2k-1}F_{2k}\cup F_1P_2F_3P_4\dots F_{2k-1}P_{2k}$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_n=n-1) = p^kq^k+q^kp^k = 2p^kq^k = 2(pq)^{\frac{n}{2}}.$$

- Si n est impair alors il s'écrit sous la forme $n=2k+1$, avec $k\in\mathbb{N}$: on a alors :

$$(X_n=n-1) = P_1F_2P_3F_4\dots P_{2k-1}F_{2k}P_{2k+1}\cup F_1P_2F_3P_4\dots F_{2k-1}P_{2k}F_{2k+1}$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_n=n-1) = p^{k+1}q^k+q^{k+1}p^k = p^kq^k(p+q) = (pq)^k\times 1 = (pq)^{\frac{n-1}{2}}.$$

7. X_n compte le nombre de changements et Z_k compte s'il y eu changement ou pas lors du k-e tirage; comme les changements peuvent avoir lieu de 2-ième au n-ième tirage, X_n est la somme :

$$X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k.$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que :

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} E(Z_k).$$

Il faut donc calculer $E(Z_k)$: puisque c'est une loi de Bernouilli, il suffit de calculer son paramètre. On cherche donc $P(Z_k = 1)$.

Or $(Z_k = 1)$ signifie qu'il y a un changement lors du $k-e$ lancer, donc que les lancers $k-1$ et k donnent des résultats différents. Comme ce cela ne dépend aucunement des lancers précédents et que les résultats des lancers $k-1$ et k non plus (les lancers sont mutuellement indépendants) on peut écrire simplement :

$$(Z_k = 1) = P_{k-1}F_k \cup F_{k-1}P_k$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(Z_k = 1) = 2pq.$$

Enfin on en déduit que pour tout k, Z_k suit la loi de Bernouilli de paramètre $2pq$ donc admet une espérance égale à $2pq$, et enfin :

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} 2pq = 2pq(n-1).$$

8. Voici le programme demandé :

```python
def nbr_changements(n,p) :
    X = 0
    L = rd.binomial(1,p,n)
    for k in range(1,n) :
        if L[k] != L[k-1] :
            X = X+1
    return(X)
```

9. Ce programme répète 10000 fois l'épreuve précédente (lancer $n = 10$ pièces et compter le nombre de changements à chaque fois); puis il calcule dans la variable S le nombre de fois où il n'y a eu qu'un seul changement au cours des n lancers.

   A la fin du programme, l'instruction `f=S/10000` calcule la fréquence de la modalité 1 pour la variable aléatoire X_n au cours des 10000 simulations de X_n.

10. La première valeur affichée est la fréquence de l'évènement $(X_n = 1)$ au cours de 10000 simulations de la variable X_n.

    La seconde valeur affichée est $\frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right) = P(X_n = 1)$ d'après la question 5.

    Or on sait que la fréquence de la modalité 1 pour X_n (de l'évènement $(X_n = 1)$) converge vers $P(X_n = 1)$ lorsqu'on simule la variable X_n un grand nombre de fois. Il est donc normal que les deux valeurs soient proches.