DM5

Correction du devoir maison du 04/11/16

Exercice 1

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ par croissance comparée.

2. $\lim_{n\to+\infty} n + \frac{1}{n} = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

3. $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$ par quotient.

4. $d_n = \dfrac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(2+\frac{1}{n^2})} = \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

5. $e_n = \dfrac{e^n(1+n^2e^{-n})}{e^{2n}(1-ne^{-2n})} = \dfrac{1+n^2e^{-n}}{e^n(1-ne^{-2n})}$. On a $\lim_{n\to+\infty} 1+n^2e^{-n} = 1$ (par croissance comparée), $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 1-ne^{-2n} = 0$ (par croissance comparée). Donc, par quotient et produit, $\lim_{n\to+\infty} e_n = 0$.

6. $f_n = \dfrac{n(1+\sqrt{\frac{n+1}{n^2}})}{n(\frac{1}{n}-1)} = \dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}-1}$. Or $\lim_{n\to+\infty} 1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}-1 = -1$. Par quotient, $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$.

7. $-3n^2+2n = n^2(-3+\frac{2}{n})$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} -3+\frac{2}{n} = -3$. Donc par produit, $\lim_{n\to+\infty} -3n^2+2n = -\infty$ et par composition $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$.

8. $h_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)$. $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2} = 1$, donc par quotient, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$. Par composition, $\lim_{n\to+\infty} h_n = \ln(1) = 0$.

9. $i_n = \dfrac{n^2(1+\frac{\ln(n)}{n^2}-\frac{\sqrt{n}}{n^2})}{n^2(1+\frac{\sqrt{n}}{n^2})} = \dfrac{1+\frac{\ln(n)}{n^2}-\frac{1}{n^{3/2}}}{1+\frac{1}{n^{3/2}}}$. $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{\ln(n)}{n^2}-\frac{1}{n^{3/2}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n^{3/2}} = 1$ donc par quotient, $\lim_{n\to+\infty} i_n = 1$.

10. $j_n = \dfrac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1)}{2n} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{1}-1}{2} = 0$.

11. $k_n = n(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}})$. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{1}-\sqrt{0} = 1$. Donc par produit, $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$.

12. $l_n = \dfrac{n(1+\frac{\ln(n)}{n})}{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{1+\frac{\ln(n)}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1+0}{\sqrt{2+0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (par croissance comparée et par quotient).

Exercice 2

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmético-géométrique car elle n'est pas de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux constantes.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{3u_n + 4^n}{4\times 4^n} = \frac{3}{4}\times\frac{u_n}{4^n} + \frac{1}{4}\times\frac{4^n}{4^n} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}.$$

3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On a :
$$x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1.$$
On considère alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = v_n - 1$. Alors :
$$w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{4}v_n - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(v_n - 1) - \frac{3}{4}w_n.$$
Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = \frac{u_0}{4^0} - 1 = -1$. Donc, pour tout entier naturel n,
$$w_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times (-1),\ \text{donc } v_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n,\ \text{et } u_n = 4^n \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right).$$

4. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1$ car $4 > 1$ et $-1 < \frac{3}{4} < 1$.
Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3

1. (v_n) n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à cause du $+10$.

2. $w_n = v_n + 1$ donc $v_n = w_n - 1$. Alors:
$$\begin{aligned} v_{n+2} = 5v_{n+1} + 6v_n + 10 \quad &\Leftrightarrow \quad (w_{n+2} - 1) = 5(w_{n+1} - 1) + 6(w_n - 1) + 10 \\ &\Leftrightarrow \quad w_{n+2} - 1 = 5w_{n+1} - 5 + 6w_n - 6 + 10 \\ &\Leftrightarrow \quad w_{n+2} = 5w_{n+1} + 6w_n. \end{aligned}$$

3. L'équation caractéristique associée à (w_n) est $x^2 - 5x - 6 = 0$. Cette équation admet deux racines: -1 et 6. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda(-1)^n + \mu 6^n$, avec λ et μ deux constantes à déterminer. On a:
$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{lcl} w_0 = v_0 + 1 = 3 &=& \lambda(-1)^0 + \mu 6^0 \\ w_1 = v_0 + 1 = 4 &=& \lambda(-1)^1 + \mu 6^1 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 3\ (L_1) \\ -\lambda + 6\mu &=& 4\ (L_2) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 3\ (L_1) \\ 7\mu &=& 7\ (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 2\ (L_1) \\ \mu &=& 1\ (L_2) \end{array}\right. \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout entier naturel n, $w_n = 2(-1)^n + 6^n$ et $v_n = w_n - 1 = 2(-1)^n + 6^n - 1$.

4. On a: $v_n = 2(-1)^n + 6^n - 1 = 6^n\left(2\left(\frac{-1}{6}\right)^n + 1 - \frac{1}{6^n}\right)$. Or $\lim_{n\to+\infty} 6^n = +\infty$ car $6 > 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^n = 0$ car $\frac{-1}{6} \in]-1,1[$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{-1}{6}\right)^n + 1 - \frac{1}{6^n}\right) = 1$ et par produit $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 4

1. Voici la procédure pour calculer S_n:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+ln(1+k/n^2)
end
disp(S)
```

2. (a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $1 + x > 0$). Pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. f est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

(b) La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $1 + x > 0$). Pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} + \frac{x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq g(0) = 0$. g est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a:

- d'après la question 2.(a), $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1+x)$.
- d'après la question 2.(b), $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

On a ainsi, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $x = \frac{k}{n^2}$ dans les inégalités (1) et on obtient

$$\frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2},$$

soit

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

(b) On somme les inégalités (2) pour k allant de 1 à n et on en déduit:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

Or:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  $\displaystyle=\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=S_n$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}$.

On en déduit l'encadrement demandé:

$$\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\leq S_n\leq\frac{n+1}{2n}$$

4. (a) On a:

$$\frac{n+1}{2n}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2},$$

et

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}=\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n^3}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

(b) Avec la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}=\frac{1}{2}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$. D'après le théorème d'encadrement avec les inégalités de la question 3.(b), on a donc que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

5. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\ln(P_n)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=S_n$$

Ainsi $S_n=\ln(P_n)$ et donc $P_n=e^{S_n}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}e^x=e^{1/2}$ (par continuité de la fonction exponentielle). Donc, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P_n=e^{1/2}$.