DM6

Correction du devoir maison du 12/11/19

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \ln(a_{n+1}) = \ln(a_n^{3/5}b_n^{2/5}) = \ln(a_n^{3/5}) + \ln(b_n^{2/5}) = \frac{3}{5}\ln(a_n) + \frac{2}{5}\ln(b_n) = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \\ v_{n+1} &= \ln(b_{n+1}) = \ln(a_n^{2/5}b_n^{3/5}) = \ln(a_n^{2/5}) + \ln(b_n^{3/5}) = \frac{2}{5}\ln(a_n) + \frac{3}{5}\ln(b_n) = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n \end{aligned}$$

2. (a) On a, pour tout entier naturel n,

$$t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \left(\frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n\right) - \left(\frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n\right) = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}v_n = \frac{1}{5}t_n.$$

Donc $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

(b) D'après la formule explicite sur les suites géométriques, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times t_0$.

(c) On a $t_0 = u_0 - v_0 = \ln(a_0) - \ln(b_0) = \ln\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$. Par hypothèse, $b_0 > a_0 > 0$ donc, en divisant par $b_0 > 0$, $1 > \frac{a_0}{b_0} > 0$. Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\ln(1) > \ln\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$, c'est-à-dire $0 > \ln\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$. Donc $t_0 \leq 0$.

On a montré à la question précédente que $t_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times t_0$. Comme $t_0 \leq 0$, on en déduit que $t_n \leq 0$, c'est-à-dire $u_n - v_n \leq 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.

(d) $u_n - v_n = t_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times t_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Rappelons qu'on a démontré à la question 2.(c) que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n - u_n = \frac{2}{5}(v_n - u_n) \geq 0.$$

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n - v_n = \frac{2}{5}(u_n - v_n) \leq 0$$

4. (a) On a démontré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question 3.), que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (question 3.) et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ (question 2.(d)). Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ.

(b) On a posé $u_n = \ln(a_n)$ et $v_n = \ln(b_n)$, donc $a_n = e^{u_n}$ et $b_n = e^{v_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ (question 4.(a)), on a par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = e^\ell$. Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite commune $L = e^\ell > 0$.

5. (a) Pour tout entier naturel n,

$$w_{n+1} = a_{n+1} \times b_{n+1} = a_n^{2/5} \times b_n^{3/5} \times a_n^{3/5} \times b_n^{2/5} = a_n \times b_n = w_n.$$

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $w_0 = a_0 \times b_0$.

(b) On a donc, pour tout entier naturel n, $w_n = a_0 \times b_0$, c'est-à-dire $a_n \times b_n = a_0 \times b_0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$ (question 4.(b)), on a par passage à la limite dans l'égalité $a_n \times b_n = a_0 \times b_0$, $L \times L = a_0 \times b_0$ donc $L^2 = a_0 b_0$ donc $L = \sqrt{a_0 b_0}$.

(c) Voici le programme pour calculer une approximation de $L = \sqrt{2}$ à ε près :

```
epsilon=input('Donner une valeur pour epsilon')
a=1
b=2
while abs(b-a)>epsilon do
    x=a
    y=b
    a=x^(3/5)*y^(2/5)
    b=x^(2/5)*y^(3/5)
end
disp(b,a)
```

Exercice 2

1. $P(-1) = 4(-1)^4 + 7(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 4 - 7 + 3 - 3 + 1 = 0$ donc -1 est racine et on effectue la division euclidienne de P par $x+1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 6x^4 & + & 7x^3 & - & 3x^2 & - & 3x & + & 1 & x+1 \\ \cline{11-11}
- & (6x^4 & + & 6x^3) & & & & & & & 6x^3+x^2-4x+1 \\ \cline{1-10}
 & & & x^3 & - & 3x^2 & - & 3x & + & 1 & \\
 & & - & (x^3 & + & x^2) & & & & & \\ \cline{2-10}
 & & & & - & 4x^2 & - & 3x & + & 1 & \\
 & & & & - & (-4x^2 & - & 4x) & & & \\ \cline{4-10}
 & & & & & & & x & + & 1 & \\
 & & & & & & - & (x & + & 1) & \\ \cline{7-10}
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $P(x) = (x+1)Q(x)$ avec $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 1$.

2. $Q(-1) = 6(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) + 1 = -6 + 1 + 4 + 1 = 0$ donc -1 est racine et on effectue la division euclidienne de Q par $x+1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 6x^3 & + & x^2 & - & 4x & + & 1 & x+1 \\ \cline{9-9}
- & (6x^3 & + & 6x^2) & & & & & 6x^2-5x+1 \\ \cline{1-8}
 & & - & 5x^2 & - & 4x & + & 1 & \\
 & & - & (-5x^2 & - & 5x) & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & x & + & 1 & \\
 & & & & - & (x & + & 1) & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $Q(x) = (x+1)R(x)$ avec $R(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

3. Pour factoriser R, on commence par calculer son discriminant. $\Delta = 1 > 0$ donc R admet deux racines :

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{12} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit la factorisation de R : $R(x) = 6(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) = (3x-1)(2x-1)$.

On a alors : $P(x) = (x+1)Q(x) = (x+1)(x+1)R(x) = (x+1)^2(3x-1)(2x-1)$.

4. On commence par multiplier (I) par $e^x > 0$: $(I) \Leftrightarrow 6e^{4x} + 7e^{3x} - 3e^{2x} - 3e^x + 1 \leq 0$.
   On pose $X = e^x$. Alors :
$$(I) \Leftrightarrow 6X^4 + 7X^3 - 3X^2 - 3X + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (X+1)^2(3X-1)(2X-1) \leq 0,$$
   en utilisant la factorisation de P obtenue à la question 3. On fait le tableau de signe :

X	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(X+1)^2$		$+$	0			$+$			
$3X-1$			$-$		0		$+$		
$2X-1$				$-$			0	$+$	
$P(X)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $X = -1$ ou $X \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Comme $X = e^x > 0$, $X = -1$ est impossible. Donc $e^x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow x \in [\ln(\frac{1}{3}), \ln(\frac{1}{2})]$ (par croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi, $\mathcal{S}_{(I)} = [\ln(\frac{1}{3}), \ln(\frac{1}{2})]$.

Exercice 3

1. $f(x)$ est définie si $x > 0$ et si $x^2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
   f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. (a) $P(1) = 3 - 1 - 2 = 0$ donc 1 est racine de P et P se factorise par $(x-1)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors :
$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$
   Alors $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ si et seulement si, par identification,
$$\begin{cases} a &= 3 \\ b-a &= 0 \\ c-b &= -1 \\ -c &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 3 \\ c &= 2 \end{cases}$$
   Donc $P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$.
   On cherche ensuite à factoriser $3x^2 + 3x + 2$. Comme son discriminant est $\Delta = 9 - 24 = -16 < 0$, $3x^2 + 3x + 2$ ne se factorise pas.
   Ainsi, la forme factorisée de P est $P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$.

   (b) On a alors:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2+3x+2$			$+$		
$P(x)$		$-$	0	$+$	

(c) g est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{P(x)}{x}.$$

On dresse le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	3	↗	

(d) D'après le tableau de variation de g, g admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint en 1 et égal à $g(1) = 3$. Donc, pour tout $x > 0$, $g(x) \geq g(1) = 3 > 0$.

3. (a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{(1+\frac{1}{x}) \times x^2 - (x - 1 + \ln(x)) \times 2x}{x^4} = 1 + \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= 1 + \frac{-x + 3 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) On en déduit les variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

(c) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Donc 0 admet un unique antécédent $\alpha \in]0,+\infty[$ par f. Calculons $f(\frac{1}{2})$ et $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{\frac{1}{2} - 1 + \ln(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2} + 2 - 4 - 4\ln(2) = -\frac{1}{2} - 4\ln(2) < 0, \\ f(1) &= 1 + 1 + \frac{1 - 1 + \ln(1)}{1^2} = 2 > 0. \end{aligned}$$

Comme f est croissante sur $]0,+\infty[$, on a donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4. (a) h est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

On dresse le tableau de variation de h :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$
$h(x)$	‖	$\nearrow$

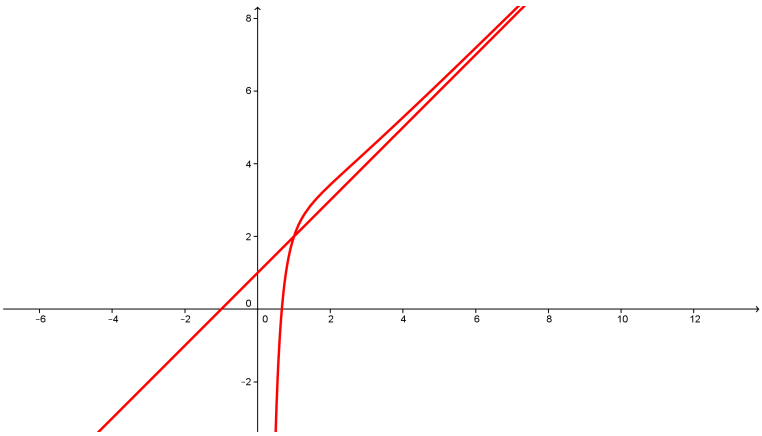
(b) $h(1) = 0$ donc, d'après les variations de h, $h(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$ et $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

(c) Pour tout $x > 0$,

$$f(x) - (x+1) = \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

Donc, d'après la question précédente, $f(x) - (x+1) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ sur $]0, 1]$) et $f(x) - (x+1) \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ sur $[1, +\infty[$).

5. (a) Voici les instructions pour tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ :

```
function y=f(x)
    y=x+1+(x-1+ln(x))/x^2
endfunction
function y=delta(x)
    y=x+1
endfunction
x=1/2:0.01:5
plot(x,f,x,delta)
```

(b) Voici l'allure de $\mathcal{C}_f$ et de Δ :