Correction - DM 6

A rendre le Vendredi 15 Novembre

Exercice 1 (EDHEC 1998)

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = e^{-x} > 0$..
De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ par composée et somme de limites. Donc :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	1

(b) On étudie les variations de la différence : soit $g(x) = x - f(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = 1 - e^{-x} = f(x)$. Donc :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0 $+$	
$g(x)$	0 $\nearrow$	

et on a donc par stricte croissance de g, $g(x) > g(0) = 0$ sur $]0, +\infty[$ et $g(0) = 0$. Donc pour tout $x > 0$, $f(x) < x$ et $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$.

2. (a) Voici le programme demandé :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

U = np.zeros(101)
U[0] = 1
for k in range(1,101):
    U[k] = 1-np.exp(-U[k-1])

N = np.arange(101)
plt.plot(N,U,'+')
```

La suite (u_n) semble décroissante et semble converger vers 0.

(b) On procède par récurrence

Ini. $u_0 = 1 \in]0,1]$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0,1]$.
Alors $0 < u_n \leq 1$ et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$, c'est-à-dire $0 < f(u_n) \leq 1 - e^{-1} \leq 1$ d'où $u_{n+1} \in]0,1]$.

Ccl. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \leq x$.
Comme $u_n \geq 0$, $f(u_n) \leq u_n$ donc $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

(d) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 ($u_n > 0$) donc par théorème des suites monotones, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$ (les inégalité s'élargissent en passant à la limite).
Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\ell \in \mathbb{R}^+$ alors $f(\ell) = \ell$. La seule solution étant $\ell = 0$ d'après la première question.
Finalement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. (a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$ par télescopage.
Pour montrer que la série est convergente, il suffit de montrer que la somme partielle a une limite finie :
$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = 1 - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Donc la série est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = 1$.

(b) On a $u_n - u_{n+1} = u_n - f(u_n) = u_n - 1 + e^{-u_n}$.
On pose $x = -u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question 2.(c) donc on peut utiliser le développement limité de exp en 0 :
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ donc } e^{-u_n} = 1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$
D'où :
$$u_n - u_{n+1} = u_n - 1 + e^{-u_n} = u_n - 1 + 1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \sim \frac{u_n^2}{2}.$$

(c) Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$ est convergente et que $u_n^2 \geq 0$, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n^2}{2}$ est une série convergente donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2 = 2\sum_{n\geq 0}\frac{u_n^2}{2}$ est convergente.

(d) La matrice ligne `V` contient les 100 premiers termes de la suite $v_n = 2(u_n - u_{n+1})$ donc `S1 = np.cumsum(V)` contient les 100 premiers termes de la série de terme général $v_n = 2(u_n - u_{n+1})$, qui converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2(u_n - u_{n+1}) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - u_{n+1}) = 2$ d'après la question 3.(a).
`S2 = np.cumsum(U[0:99]**2)` contient les 100 premiers termes de la série de terme général u_n^2. Le graphique indique que cette série semble bien converger également comme prouvé à la question 3.(b).
En revanche, même si les termes généraux sont équivalents, les séries ne sont pas équivalentes puisqu'elles ne convergent pas vers la même limite (les théorèmes de comparaisons indiquent que si l'une des séries converge, l'autre aussi mais pas qu'elles ont même limite, encore moins qu'elles sont équivalentes).

Exercice 2 (EDHEC 2009)

1. • Étude sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$:
$x \to 1 - x$ est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$ et ln est continue sur $]0;+\infty[$ donc $x \to \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$.

De plus, $x \to 1-x$ est continue et strictement positive sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, et $x \to -x$ est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, donc f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Étude en 0 :
Au voisinage de 0, on a : $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$. Donc pour $x \neq 0$:
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{(1-x)(-x)} = \frac{1}{(1-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f(0)$$
donc f est continue en 0.

On obtient enfin que f est continue sur $]-\infty;1[$.

2. (a) Au voisinage de 0, on a :
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
(b) On a alors, pour tout x au voisinage de 0 et $x \neq 0$:
$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\
&= \frac{-x-(1-x)\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x(1-x)[-x+o(x)]} = \frac{-x+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} \\
&= \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{(1-x)[-1+o(1)]} \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\frac{1}{2}}{1\times(-1)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$
Comme le taux d'accroissement admet une limite non nulle lorsque x tend vers 0, on en déduit que f est dérivable en 0 et que
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} T_0(x) = \frac{1}{2}.$$

3. (a) f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;1[$ on a :
$$f'(x) = \frac{-1\times(1-x)\ln(1-x) - (-x)\times\left(-\ln(1-x)+(1-x)\times(-1)\times\frac{1}{1-x}\right)}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$$
qu'on simplifie :
$$f'(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x)+x[-\ln(1-x)-1]}{[(1-x)\ln(1-x)]^2} = \frac{-\ln(1-x)(1-x+x)-x}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$$
et enfin
$$f'(x) = \frac{-[\ln(1-x)+x]}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}.$$
(b) On pose $g : x \mapsto \ln(1-x)+x$ sur $]-1;+\infty[$. g est dérivable sur $]-\infty;1[$ comme somme de fonctions définies (car $1-x>0$) et dérivables sur $]-\infty;1[$.
$$g'(x) = -\frac{1}{1-x}+1 = \frac{-1+1-x}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$$
Or $1-x>0$ sur $]-\infty;1[$ donc $g'(x)$ est strictement positive sur $]-\infty;0[$, nulle en 0 et strictement négative sur $[0;+\infty[$. D'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $[0;1[$ donc admet un maximum strict en 0, égal à $\ln(1)+0=0$. Ainsi, $g(x)<0$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, et nulle en 0.
On en déduit que $f'(x)$ est strictement positive sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$.

(c) En factorisant $(1-x)$ par son terme prépondérant, on a :

$$f(x)=\frac{-x}{(1-x)\times\ln(1-x)}=\frac{-x}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)}\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$$

par quotient de limites.

Au voisinage de 1 on pose $X=1-x$ qui tend vers 0 et on a :

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{X\to0^+}\frac{X-1}{X\ln(X)}=+\infty$$

car $X\ln X\xrightarrow[X\to0^+]{}0^-$ par croissances comparées et $X-1\xrightarrow[X\to0^+]{}-1$.

4. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1[$ donc elle réalise une bijection de $[0;1[$ dans $\left[f(0);\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\right[=[1;+\infty[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n\in[1;+\infty[$. Donc l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution (qu'on note u_n) sur $[0;1[$.

Comme $f(0)=1$, on a $u_1=0$.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a par stricte décroissance de f :

$$f(u_n)=n<n+1=f(u_{n+1})\Leftrightarrow u_n<u_{n+1}$$

(u_n) est donc croissante et majorée par 1 donc elle converge.

De plus, en posant f^{-1} la bijection réciproque de f sur $[0;1[$, on a

$$f^{-1}(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$$

donc :

$$f(u_n)=n\Leftrightarrow u_n=f^{-1}(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

Exercice 3 (EDHEC 1998)

1. Pour avoir $X=2$, il faut avoir obtenu la séquence PF au bout de deux lancers donc :

$$(X=2)=P_1\cap F_2$$

et par indépendance des lancers,

$$P(X=2)=P(P_1)P(F_2)=\frac{1}{4}.$$

2. (a) Pour avoir $(X=3)$, il faut P_2F_3 impérativement, et les deux possibilités P_1 et F_1 conviennent pour donner $X=3$ donc :

$$(X=3)=(P_1\cap P_2\cap F_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3)$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers,

$$P(X=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}.$$

(b) Dès qu'on obtient un pile, on doit impérativement obtenir des piles jusqu'au $k-1$-ième lancer (sinon l'enchaînement pile -face sera réalisé trop tôt) puis face au k-ième, ce qui donne :

$$(X=k)=(P_1\dots P_{k-1}F_k)\bigcup(F_1P_2\dots P_{k-1}F_k)\bigcup\cdots\bigcup(F_1\dots F_{k-2}P_{k-1}F_k)$$

évènements qui sont bien 2 à 2 incompatibles.

(c) Par indépendance des lancers, chacun des évènements de la réunion est de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc par incompatibilité 2 à 2 de la réunion :

$$P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

(d) $(X = 0)$ est très pénible à décomposer selon les lancers (c'est possible mais il faut manipuler correctement les réunions et intersections infinies) donc on passe par son contraire :

$$\overline{(X = 0)} = (X \geq 2) = \bigcup_{k=2}^{+\infty} (X = k)$$

car la valeur $X = 1$ est impossible. On en déduit par incompatibilité que

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - P(X \geq 2) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \times 4 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

3. (a) C'est ce qu'on a déjà vu avant : s'il y avait un face plus tôt, X prendrait la valeur du lancer en question.
Il faut et il suffit donc que $P_2 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise.

(b) On applique les probabilités totales sur le système complet (P_1, F_1) : pour tout $k \geq 3$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(P_1) P_{P_1}(X = k) + P(F_1) P_{F_1}(X = k) \\ &= \frac{1}{2} P_{P_1}(P_2 \dots P_{k-1} F_k) + \frac{1}{2} P_{F_1}(X = k) \end{aligned}$$

en appliquant le résultat de la question 3.(a). De plus P_1 est indépendant de tous les lancers suivants donc :

$$P_{P_1}(P_2 \dots P_{k-1} F_k) = P(P_2 \dots P_{k-1} F_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

De plus si F_1 est réalisé, on se retrouve dans une situation identique au début, mais avec un lancer de moins restant. On en déduit que

$$P_{F_1}(X = k) = P(X = k - 1).$$

On obtient finalement :

$$P(X = k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2} P(X = k - 1) = \frac{1}{2} P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}.$$

(c) Pour tout $k \geq 2$, on a :

$$u_{k+1} = 2^{k+1} P(X = k + 1) = 2^{k+1} \left(\frac{1}{2} P(X = k) + \frac{1}{2^{k+1}}\right) = 2^k P(X = k) + 1 = u_k + 1.$$

La suite $(u_k)_{k \geq 2}$ est donc arithmétique de raison 1, et on a pour tout $k \geq 2$,

$$u_k = u_2 + (k - 2) \times 1 = 2^2 P(X = 2) + k - 2 = 1 + k - 2 = k - 1.$$

Enfin, on obtient à nouveau :

$$P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}.$$

4. On considère la série
$$\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k) = 0 + \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$
On reconnaît une série géométrique dérivée d'ordre 2 qui converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et qui est à termes positifs, donc elle converge absolument.

On en déduit que X admet une espérance, et :
$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{4}\times(2\times 8) = 4.$$

5. (a) Voici la fonction demandée :

```
def simulX():
    p1 = np.floor(rd.random()*2)
    p2 = np.floor(rd.random()*2)
    x = 2
    while p1<=p2 :
        p1 = p2
        p2 = np.floor(rd.random()*2)
        x = x+1
    return(x)
```

(b) On définit un vecteur ligne `C` dont les cases sont toutes nulles avant simulations. Puis on effectue 1000 simulations indépendantes de la variable X et, pour chacune de ces simulations, on rajoute 1 à la case de C dont le numéro est la valeur prise par la simulation.

A la fin des 1000 expériences, pour tout $n \in [\![0, 19]\!]$, la case numéro n de C (`C[n]`) contient donc l'effectif de la modalité n, c'est-à-dire le nombre de fois où la fonction `simulX()` a renvoyé la valeur n au cours des 1000 simulations.

Autrement dit, la case numéro n de C est le compteur de la modalité n.

(c) Le vecteur ligne `C` contenant les effectifs des modalités 0 à 19, alors `C/1000` est la liste des fréquences des modalités 0 à 19 après 1000 simulations.

L'instruction `plt.bar(N,C/1000)` construit donc le diagramme en bâton des fréquences des modalités 0 à 19 après 1000 simulations.

On remarque que la variable puissances contient les valeurs de la suite (s_k) définie par $s_1 = 1/2$ et $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $s_{k+1} = \dfrac{1}{2}s_k$.

On reconnait ainsi une suite géométrique de forme explicite $s_k = \dfrac{1}{2^k}$.

Ainsi, la case numéro k du tableau `L` contient la valeur $\dfrac{k-1}{2^k} = P(X = k)$. : c'est le tableau de la loi théorique de X restreint à l'ensemble $[\![0, 19]\!]$.

On sait que la fréquence d'une valeur k converge, lorsque le nombre de simulations tend vers $+\infty$, vers la probabilité théorique $P(X = k)$.

Ainsi, il est logique que pour 1000 simulations, le diagramme en bâton des fréquences soit proche du diagramme en bâton de la loi théorique, avec une certaine marge d'erreurs car on n'a pas fait une infinité de simulations!

(d) • Première version : on ne garde pas en mémoire les valeurs des anciennes simulations et on calcule "à la main" la moyenne des valeurs :

```
n = int(input('Entrer n :'))
S = 0
for k in range(n):
    S = S + simulX()
m = S/n
print(m)
```

- Seconde version : on garde en mémoire toutes les simulations dans un vecteur ligne et on utilise la fonction `np.sum` ou la fonction `np.mean` pour calculer la moyenne à la fin :

```
n = int(input('Entrer n :'))
U = np.zeros(1,n)
for k in range(n):
   U[k] = simulX()
m = np.mean(U)     # ou m = np.sum(U)/n
print(m)
```

La moyenne empirique m de n simulations indépendantes de la même variable converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers $E(X) = 4$.
On devrait donc avoir $m \simeq 4$.

Exercice 4 (EDHEC 2006)

1. Comme les valeurs de X sont entières, $\overline{(X \geq 1)} = (X = 0)$. Donc

$$P\left(X \geq 1\right) = 1 - P\left(X = 0\right) = 1 - p = q$$

et $P(X \geq 1) > 0$ par hypothèses, donc $q > 0$.

Et comme $q = 1 - p$ et que $p > 0$, alors $q < 1$.

En rassemblant, on a bien $0 < q < 1$.

2. On revient à la définition de la probabilité conditionnelle, et on sait que $n \geq 0$ donc $n + m \geq m$ et enfin :

$$(X \geq n + m) \subset (X \geq m)$$

donc

$$P_{(X \geq m)}(X \geq n + m) = \frac{P([X \geq n + m] \cap [X \geq m])}{P(X \geq m)} = \frac{P(X \geq n + m)}{P(X \geq m)}$$

Or l'énoncé donne

$$P_{(X \geq m)}(X \geq n + m) = P(X \geq n) \quad \text{donc on obtient} \quad \frac{P(X \geq n + m)}{P(X \geq m)} = P(X \geq n).$$

On en déduit (on multiplie par une probabilité qui est donc positive) que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ P(X \geq n + m) = P(X \geq m)P(X \geq n).$$

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = P(X \geq n)$.

   (a) On cherche à exprimer $u_{n+1} = P(X \geq n + 1)$ en fonction de $u_n = P(X \geq n)$ donc on applique la relation précédente avec $m = 1$:

$$u_{n+1} = P(X \geq n + 1) = P(X \geq n)P(X \geq 1) = qu_n$$

   et la suite (u_n) est géométrique de raison q.

(b) On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X \geq n) = u_n = q^n u_0 = q^n P(X \geq 0)$$

et comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, l'évènement $(X \geq 0)$ est certain et enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X \geq n) = q^n.$$

(c) Comme X ne prend que des valeurs entières,

$$(X \geq n) = (X = n) \cup (X > n) = (X = n) \cup (X \geq n+1)$$

et comme l'union est incompatible,

$$P(X \geq n) = P(X = n) + P(X \geq n+1)$$

qui donne :

$$P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1).$$

(d) On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = u_n - u_{n+1} = q^n - q^{n+1} = q^n(1-q) = q^n p.$$

4. (a) La loi de $X+1$ est donnée par :

$$(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \ P(X+1 = n) = P(X = n-1) = q^{n-1}p$$

donc $X+1$ suit bien une loi géométrique, de paramètre p.

(b) On en déduit que $X+1$ admet une espérance et une variance et :

$$E(X+1) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X+1) = \frac{1-p}{p^2}$$

puis par linéarité de l'espérance et propriétés de la variance, X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = E(X+1) - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = V(X+1) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

5. (a) Par définition de la probabilité conditionnelle et comme $(Y = n) \subset (Y \geq n)$, on a :

$$\lambda_n = \frac{P([Y = n] \cap [Y \geq n])}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}.$$

(b) On a alors

$$1 - \lambda_n = 1 - \frac{P\,(Y = n)}{P\,(Y \geq n)} = \frac{P\,(Y \geq n) - P\,(Y = n)}{P\,(Y \geq n)} = \frac{P\,(Y \geq n+1)}{P\,(Y \geq n)}$$

car Y ne prend que des valeurs entières donc la question 3.(c) est valable pour Y.

(c) Comme $P(Y \geq n) > 0$ pour tout entier n alors $1 - \lambda_n > 0$ et $\lambda_n < 1$.
D'autre part λ_n est définie comme une probabilité (conditionnelle) donc $\lambda_n \geq 0$.
Finalement, $0 \leq \lambda_n < 1$.

(d) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$, $P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \lambda_k)$:

Ini. Pour $n = 1$,

$$\prod_{k=0}^{1-1}(1 - \lambda_k) = 1 - \lambda_0 = \frac{P(Y \geq 1)}{P(Y \geq 0)} = P(Y \geq 1)$$

car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $P(Y \geq 0) = 1$, et la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$. Alors :

$$\prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\right) \times (1-\lambda_n) = P(Y \geq n) \times \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)} = P(Y \geq n+1).$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ccl. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.

6. (a) On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(Y=k) = P(Y \leq n-1) = P(\overline{Y > n-1}) = 1 - P(Y > n-1) = 1 - P(Y \geq n)$$

car Y ne prend que des valeurs entières.

(b) Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} P(Y=k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = 1$$

donc

$$P(Y \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(Y=k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - 1 = 0.$$

(c) On en déduit que

$$P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On passe au logarithme :

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty.$$

Or

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\lambda_k)$$

donc en passant à l'opposé :

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

7. On avait $P(X \geq n) = q^n$ et $P(X=n) = q^n p$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \frac{P(X=n)}{P(X \geq n)} = \frac{q^n p}{q^n} = p.$$

8. (a) Comme on est dans les hypothèses de la partie 2, on a :

$$0 \leq \lambda < 1 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{P(Z=n)}{P(Z \geq n)}.$$

D'où si $\lambda = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(Z=n) = 0$, ce qui est absurde (la somme des probabilités de la variable aléatoire vaut alors 0).

Donc on obtient : $0 < \lambda < 1$.

(b) On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Z \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\lambda) = (1-\lambda)^n$$

ce qui se généralise à $n = 0$ car $(1-\lambda)^0 = 1$ et $P(Z \geq 0) = 1$.
D'où on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z \geq n) = (1-\lambda)^n.$$

(c) On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = (1-\lambda)^n - (1-\lambda)^{n+1} = (1-\lambda)^n \lambda$$

et la loi de Z est bien du type de X (il suffit de poser $p = \lambda$ qui est bien compris strictement entre 0 et 1 pour obtenir la même loi).
