Correction - DM 7

A rendre le Mercredi 1 Décembre

Exercice 1 (EDHEC 2004)

1. (a) On étudie la limite par opérations élémentaires :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{-n}{x} = -\infty$$

puis en composant par l'exponentielle,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

donc par produit,

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$$

donc f_n est continue à droite en 0.

(b) On étudie le taux d'accroissement pour $x > 0$:

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-\frac{n}{x}}}{x} = e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

(vu à la question précédente) donc f_n est dérivable à droite en 0, et $(f_n)'_d(0) = 0$.

2. (a) La fonction $x \to -\frac{n}{x}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $x \to e^{-\frac{n}{x}}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
De plus, la fonction $x \to x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par produit f_n est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
On obtient pour tout $x \neq 0$,

$$f'_n(x) = e^{-\frac{n}{x}} + x \times \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}} = \frac{x+n}{x} e^{-\frac{n}{x}}.$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$e^{-\frac{n}{x}}$	||	$+$		$+$	||	$+$	||
$x+n$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	||
x	||	$-$	|	$-$	0	$+$	||
$f'_n(x)$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	||

(b) En $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{n}{x} = 0$$

donc par composition par l'exponentielle continue,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$

En $-\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{n}{x} = 0$$

donc par composition par l'exponentielle continue,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty.$$

En 0^-, on pose $X = -\frac{1}{x} \to +\infty$, et on obtient par croissances comparées que

$$\lim_{x\to0^-} f_n(x) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{e^{nX}}{X} = -\infty$$

enfin en 0^+ on a vu que f_n continue à droite en 0 donc

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = f_n(0) = 0.$$

On obtient alors :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	$-ne$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

3. (a) Le cours donne immédiatement : $e^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

   (b) On pose alors $u = -\frac{n}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ donc on peut appliquer le DL précédent :

$$e^{-\frac{n}{x}} = 1 + \left(-\frac{n}{x}\right) + \frac{\left(-\frac{n}{x}\right)^2}{2} + o\left[\left(-\frac{n}{x}\right)^2\right] = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

   puis on multiplie par x :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

   (c) On en déduit que :

$$f_n(x) - (x-n) = \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

   donc la droite d'équation $y = x - n$ est asymptote à $\mathscr{C}_n$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   Au voisinage de $-\infty$ on a

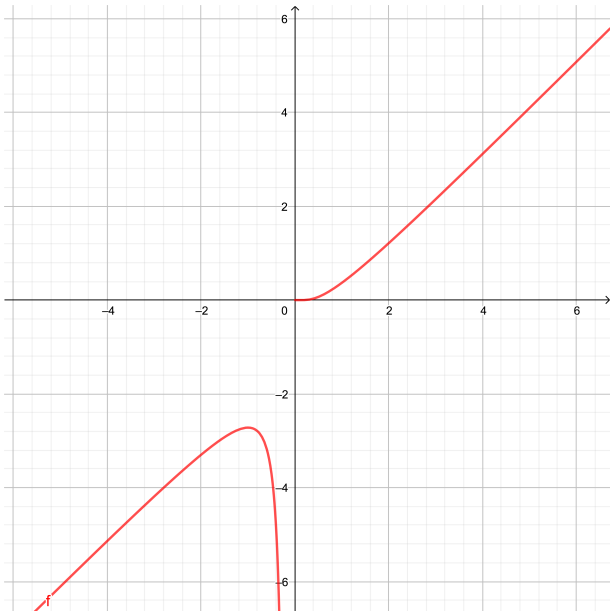
$$f_n(x) - (x-n) \sim \frac{n^2}{2x} < 0$$

   donc $\mathscr{C}_n$ se trouve en dessous de son asymptote.
   Au voisinage de $+\infty$ on a

$$f_n(x) - (x-n) \sim \frac{n^2}{2x} > 0$$

   donc $\mathscr{C}_n$ se trouve au-dessus de son asymptote.

   (d) On rassemble toutes les informations précédentes : asymptote en $\pm\infty$, variations correctes, limites en 0^- et 0^+, maximum local atteint en -1 et de valeur $-e \simeq -2,7$.



4. (a) D'après ses variations, f_n admet un maximum sur $]-\infty;0[$ qui est strictement négatif donc f_n est strictement négative sur $]-\infty;0[$ et il n'y a pas de solution sur $]-\infty;0[$.
De plus f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[f(0);\lim\limits_{+\infty} f[=[0;+\infty[=\mathbb{R}^+$.
Or $1\in\mathbb{R}^+$ donc il existe un unique $u_n\in\mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n)=1$.
Il y a donc une unique solution sur $\mathbb{R}$, et elle est positive (strictement car $f_n(0)=0\neq 1$).

(b) Comme u_n est implicite, on compare $f_n(u_n)$ et $f_n(1)$: on calcule

$$f_n(1)=1\times e^{-n}=e^{-n}<e^0=1$$

car $-n<0$ et exp est strictement croissante.
On en déduit que $f_n(1)<f_n(u_n)$ et par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$,

$$1<u_n.$$

On veut ensuite prouver que $u_n\ln(u_n)=n$, et pour prouver une égalité sur une quantité implicite, on revient à sa définition en explicitant la fonction :

$$f_n(u_n)=1 \quad \text{donc} \quad u_n\times e^{-\frac{n}{u_n}}=1.$$

On transforme alors : on compose par ln (les deux quantités valent 1 donc sont bien strictement positives) et on obtient :

$$\ln(u_n)-\frac{n}{u_n}=0 \quad \text{donc} \quad u_n\ln(u_n)-n=0 \quad \text{et enfin} \quad u_n\ln(u_n)=n.$$

donc u_n est bien solution de l'équation $x\ln(x)=n$.

(c) g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1;+\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$g'(x)=\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)+1>0 \quad \text{sur } [1;+\infty[.$$

On en déduit que g est continue et strictement croissante sur cet intervalle donc réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers son image $[g(1);\lim\limits_{+\infty} g[$.
Avec

$$g(1)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

comme produit de limites valant $+\infty$, on obtient que g est une bijection de $[1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$.

Comme $1 \in \mathbb{R}^+$, l'équation $g(x) = n$ admet bien une solution, et celle-ci est unique donc c'est forcément u_n.
De plus on a

$$g(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = g^{-1}(n)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$, et on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty.$$

(d) On a obtenu précédemment que

$$u_n \ln(u_n) = n.$$

On compose par ln (les deux termes valent n donc sont strictement positifs) et comme $u_n > 1$, $\ln(u_n) > 0$ et $\ln(\ln(u_n))$ existe bien donc :

$$\ln(u_n \ln(u_n)) = \ln n \quad \text{puis} \quad \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln n.$$

On factorise la somme par son terme prépondérant $\ln(u_n)$:

$$\ln(u_n)\left(1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right) = \ln(n)$$

Enfin en posant $X = \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on obtient par croissances comparées que :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 1 + \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 1 + 0 = 1$$

ce qui donne bien :

$$\ln u_n \sim \ln n$$

Attention, on ne peut pas composer l'équivalent par exp !
On utilise à nouveau $u_n \ln(u_n) = n$, qui donne

$$u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}.$$

5. (a) On a $u_n = g^{-1}(n)$; or la fonction g est strictement croissante donc g^{-1} aussi, ce qui donne

$$u_{n+1} = g^{-1}(n+1) > g^{-1}(n) = u_n$$

pour tout n, donc (u_n) est strictement croissante.

(b) On calcule cette quantité et on fait apparaître $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ pour simplifier :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = u_{n+1}e^{-\frac{(n+1)-1}{u_{n+1}}} = u_{n+1}e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}}e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = 1 \times e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

6. (a) Pour encadrer une intégrale on regarde l'ordre des bornes puis on travaille sur l'intérieur :
Par croissance stricte de la suite u_n, on sait que $u_n < u_{n+1}$ donc les bornes de I_n sont rangées dans l'ordre croissant.
Pour tout $t \in [u_n; u_{n+1}]$ par croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$ on obtient :

$$f_n(u_n) \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1}) \quad \text{donc} \quad 1 \leq f_n(t) \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

En intégrant l'encadrement avec les bornes dans l'ordre croissant on obtient

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} dt \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} dt$$

puis en calculant les intégrales de gauche et de droite :

$$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n)e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

On divise enfin l'encadrement par $u_{n+1} - u_n > 0$:

$$1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

(b) On sait que $\lim u_{n+1} = +\infty$ donc par quotient puis en composant par l'exponentielle continue on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0 \quad \text{puis} \quad \lim e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1.$$

Le théorème d'encadrement donne alors

$$\lim \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1 \quad \text{donc} \quad I_n \sim (u_{n+1} - u_n).$$

(c) I_n et $(u_{n+1} - u_n)$ sont positives et équivalentes en $+\infty$, donc le théorème de comparaison permet de dire que les séries $\sum_{n\geq 1} I_n$ et $\sum_{n\geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Étudions cette dernière à l'aide de sa somme partielle : par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{p} (u_{n+1} - u_n) = u_{p+1} - u_1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

donc les deux séries divergent.

En particulier on obtient bien que la série de terme général I_n est divergente.

Exercice 2 (EDHEC 1998)

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = e^{-x} > 0$.. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ par composée et somme de limites. Donc :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	1

(b) On étudie les variations de la différence : soit $g(x) = x - f(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = 1 - e^{-x} = f(x)$. Donc :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	↗	

et on a donc par stricte croissance de g, $g(x) > g(0) = 0$ sur $]0, +\infty[$ et $g(0) = 0$. Donc pour tout $x > 0$, $f(x) < x$ et $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$.

2. (a) Voici le programme demandé :

```
u0=1
U=zeros(1,100)
U(1)=f(u0)
for k=1:99 do
    U(k+1)=f(U(k))
end

N=1:100
plot(N,U,'+')
```

La suite (u_n) semble décroissante et semble converger vers 0.

(b) On procède par récurrence

Ini. $u_0 = 1 \in]0, 1]$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0, 1]$.
Alors $0 < u_n \leq 1$ et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$, c'est-à-dire $0 < f(u_n) \leq 1 - e^{-1} \leq 1$ d'où $u_{n+1} \in]0, 1]$.

Ccl. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \leq x$.
Comme $u_n \geq 0$, $f(u_n) \leq u_n$ donc $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

(d) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 ($u_n > 0$) donc par théorème des suites monotones, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$ (les inégalité s'élargissent en passant à la limite).
Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\ell \in \mathbb{R}^+$ alors $f(\ell) = \ell$. La seule solution étant $\ell = 0$ d'après la première question.
Finalement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. (a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$ par télescopage.
Pour montrer que la série est convergente, il suffit de montrer que la somme partielle a une limite finie :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = 1 - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc la série est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = 1$.

(b) On a $u_n - u_{n+1} = u_n - f(u_n) = u_n - 1 + e^{-u_n}$.
On pose $x = -u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question 2.(c) donc on peut utiliser le développement limité de exp en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ donc } e^{-u_n} = 1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

D'où :

$$u_n - u_{n+1} = u_n - 1 + e^{-u_n} = u_n - 1 + 1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \sim \frac{u_n^2}{2}.$$

(c) Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$ est convergente et que $u_n^2 \geq 0$, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n^2}{2}$ est une série convergente donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n^2 = 2\sum_{n\geq 0}\frac{u_n^2}{2}$ est convergente.

(d) La matrice ligne `V` contient les 100 premiers termes de la suite $v_n = 2(u_n - u_{n+1})$ donc `S1 = cumsum(V)` contient les 100 premiers termes de la série de terme général $v_n = 2(u_n - u_{n+1})$, qui converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} 2(u_n - u_{n+1}) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - u_{n+1}) = 2$ d'après la question 3.(a).
`S2=cumsum(U.^2)` contient les 100 premiers termes de la série de terme général u_n^2. Le graphique indique que cette série semble bien converger également comme prouvé à la question 3.(b).
En revanche, même si les termes généraux sont équivalents, les séries ne sont pas équivalentes puisqu'elles ne convergent pas vers la même limite (les théorèmes de comparaisons indiquent que si l'une des séries converge, l'autre aussi mais pas qu'elles ont même limite, encore moins qu'elles sont équivalentes).

Exercice 3 (EDHEC 2009)

1. • Étude sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$:
$x \to 1-x$ est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$ et ln est continue sur $]0;+\infty[$ donc $x \to \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$.
De plus, $x \to 1-x$ est continue et strictement positive sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, et $x \to -x$ est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, donc f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

• Étude en 0 :
Au voisinage de 0, on a : $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$. Donc pour $x \neq 0$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{(1-x)(-x)} = \frac{1}{(1-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

On obtient enfin que f est continue sur $]-\infty;1[$.

2. (a) Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

(b) On a alors, pour tout x au voisinage de 0 et $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-x-(1-x)\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x(1-x)[-x+o(x)]} = \frac{-x+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{(1-x)[-1+o(1)]} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\frac{1}{2}}{1\times(-1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme le taux d'accroissement admet une limite non nulle lorsque x tend vers 0, on en déduit que f est dérivable en 0 et que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} T_0(x) = \frac{1}{2}.$$

3. (a) f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{-1\times(1-x)\ln(1-x) - (-x)\times\left(-\ln(1-x)+(1-x)\times(-1)\times\frac{1}{1-x}\right)}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$$

qu'on simplifie :

$$f'(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x[-\ln(1-x) - 1]}{[(1-x)\ln(1-x)]^2} = \frac{-\ln(1-x)(1-x+x) - x}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$$

et enfin

$$f'(x) = \frac{-[\ln(1-x) + x]}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}.$$

(b) On pose $g : x \mapsto \ln(1-x) + x$ sur $]-1;+\infty[$. g est dérivable sur $]-\infty;1[$ comme somme de fonctions définies (car $1-x>0$) et dérivables sur $]-\infty;1[$.

$$g'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{-1+1-x}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$$

Or $1-x>0$ sur $]-\infty;1[$ donc $g'(x)$ est strictement positive sur $]-\infty;0[$, nulle en 0 et strictement négative sur $[0;+\infty[$. D'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $[0;1[$ donc admet un maximum strict en 0, égal à $\ln(1)+0=0$. Ainsi, $g(x)<0$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, et nulle en 0.
On en déduit que $f'(x)$ est strictement positive sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$.

(c) En factorisant $(1-x)$ par son terme prépondérant, on a :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\times\ln(1-x)} = \frac{-x}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

par quotient de limites.
Au voisinage de 1 on pose $X = 1-x$ qui tend vers 0 et on a :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{X\to0^+} \frac{X-1}{X\ln(X)} = +\infty$$

car $X\ln X \xrightarrow[X\to0^+]{} 0^-$ par croissances comparées et $X-1 \xrightarrow[X\to0^+]{} -1$.

4. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1[$ donc elle réalise une bijection de $[0;1[$ dans $\left[f(0); \lim_{x\to1^-} f(x)\right[= [1;+\infty[$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n\in[1;+\infty[$. Donc l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution (qu'on note u_n) sur $[0;1[$.
Comme $f(0)=1$, on a $u_1=0$.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a par stricte décroissance de f :

$$f(u_n) = n < n+1 = f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_n < u_{n+1}$$

(u_n) est donc croissante et majorée par 1 donc elle converge.
De plus, en posant f^{-1} la bijection réciproque de f sur $[0;1[$, on a

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc :

$$f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 4 (EDHEC 1998)

1. Pour avoir $X=2$, il faut avoir obtenu la séquence PF au bout de deux lancers donc :

$$(X=2) = P_1 \cap F_2$$

et par indépendance des lancers,

$$P(X=2) = P(P_1)\Pr(F_2) = \frac{1}{4}.$$

2. (a) Pour avoir $(X=3)$, il faut P_2F_3 impérativement, et les deux possibilités P_1 et F_1 conviennent pour donner $X=3$ donc :

$$(X=3)=(P_1\cap P_2\cap F_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3)$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers,

$$P(X=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}.$$

(b) Dès qu'on obtient un pile, on doit impérativement obtenir des piles jusqu'au $k-1$-ième lancer (sinon l'enchaînement pile -face sera réalisé trop tôt) puis face au k-ième, ce qui donne :

$$(X=k)=(P_1\dots P_{k-1}F_k)\bigcup(F_1P_2\dots P_{k-1}F_k)\bigcup\dots\bigcup(F_1\dots F_{k-2}P_{k-1}F_k)$$

évènements qui sont bien 2 à 2 incompatibles.

(c) Par indépendance des lancers, chacun des évènements de la réunion est de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc par incompatibilité 2 à 2 de la réunion :

$$P(X=k)=\frac{k-1}{2^k}.$$

(d) $(X=0)$ est très pénible à décomposer selon les lancers (c'est possible mais il faut manipuler correctement les réunions et intersections infinies) donc on passe par son contraire :

$$\overline{(X=0)}=(X\geq 2)=\bigcup_{k=2}^{+\infty}(X=k)$$

car la valeur $X=1$ est impossible. On en déduit par incompatibilité que

$$\begin{aligned}P(X=0) &= 1-P(X\geq 2)=1-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{2^k}=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\ &= 1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\times 4=1-1=0.\end{aligned}$$

3. (a) C'est ce qu'on a déjà vu avant : s'il y avait un face plus tôt, X prendrait la valeur du lancer en question.
Il faut et il suffit donc que $P_2\dots P_{k-1}F_k$ se réalise.

(b) On applique les probabilités totales sur le système complet (P_1,F_1) : pour tout $k\geq 3$,

$$\begin{aligned}P(X=k) &= P(P_1)P_{P_1}(X=k)+P(F_1)P_{F_1}(X=k)\\ &= \frac{1}{2}P_{P_1}(P_2\dots P_{k-1}F_k)+\frac{1}{2}P_{F_1}(X=k)\end{aligned}$$

en appliquant le résultat de la question 3.(a). De plus P_1 est indépendant de tous les lancers suivants donc :

$$P_{P_1}(P_2\dots P_{k-1}F_k)=P(P_2\dots P_{k-1}F_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

De plus si F_1 est réalisé, on se retrouve dans une situation identique au début, mais avec un lancer de moins restant. On en déduit que

$$P_{F_1}(X=k)=P(X=k-1).$$

On obtient finalement :

$$P(X=k)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2}P(X=k-1)=\frac{1}{2}P(X=k-1)+\frac{1}{2^k}.$$

(c) Pour tout $k \geq 2$, on a :

$$u_{k+1} = 2^{k+1}P(X = k+1) = 2^{k+1}\left(\frac{1}{2}P(X = k) + \frac{1}{2^{k+1}}\right) = 2^k P(X = k) + 1 = u_k + 1.$$

La suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est donc arithmétique de raison 1, et on a pour tout $k \geq 2$,

$$u_k = u_2 + (k-2) \times 1 = 2^2 P(X = 2) + k - 2 = 1 + k - 2 = k - 1.$$

Enfin, on obtient à nouveau :

$$P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}.$$

4. On considère la série

$$\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X = k) = 0 + \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On reconnaît une série géométrique dérivée d'ordre 2 qui converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et qui est à termes positifs, donc elle converge absolument.

On en déduit que X admet une espérance, et :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{4} \times (2 \times 8) = 4.$$

5. (a)
```
function x=simulX()
    p1=floor(rand()*2)
    p2=floor(rand()*2)
    x=2
    while (p1==0)|(p2==1) do
        p1=p2
        p2=floor(rand()*2)
        x=x+1
    end
endfunction
```

(b) On définit un vecteur ligne `C` dont les cases sont toutes nulles avant simulations. Puis on effectue 1000 simulations indépendantes de la variable X et, pour chacune de ces simulations, on rajoute 1 à la case de C dont le numéro est la valeur prise par la simulation.

A la fin des 1000 expériences,pour tout $n \in [\![1, 20]\!]$, la case numéro n de C (`C(n)`) contient donc l'effectif de la modalité n i.e. le nombre de fois où la fonction `simulX()` a renvoyé la valeur n au cours des 1000 simulations.

Autrement dit, la case numéro n de C est le compteur de la modalité n.

(c) Le vecteur ligne `C` contenant les effectifs des modalités 1 à 20, alors `C/1000` est la liste des fréquences des modalités 1 à 20 après 1000 simulations.

L'instruction `bar(1:20,C/1000)` construit donc le diagramme en bâton des fréquences des modalités 1 à 20 après 1000 simulations.

On remarque que la variable puissances contient les valeurs de la suite (s_k) définie par $s_1 = 1/2$ et $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $s_{k+1} = 1/2 s_k$.

On reconnait ainsi une suite géométrique de forme explicite $s_k = \frac{1}{2^k}$.

Ainsi, la case numéro k du tableau `L` contient la valeur $\frac{k-1}{2^k} = P(X = k)$. : c'est le tableau de la loi théorique de X restreint à l'ensemble $[\![1, 20]\!]$.

On sait que la fréquence d'une valeur k converge, lorsque le nombre de simulations tend vers $+\infty$, vers la probabilité théorique $P(X = k)$.

Ainsi, il est logique que pour 1000 simulations, le diagramme en bâton des fréquences soit proche du diagramme en bâton de la loi théorique, avec une certaine marge d'erreurs car on n'a pas fait une infinité de simulations!

(d)
- Première version : on ne garde pas en mémoire les valeurs des anciennes simulations et on calcule "à la main" la moyenne des valeurs :

```
n=input('Entrer n :')
S=0
for k=1:n do
    S=S+simulX()
end
m=S/n
```

- Seconde version : on garde en mémoire toutes les simulations dans un vecteur ligne et on utilise la fonction `sum` ou la fonction `mean` pour calculer la moyenne à la fin :

```
n=input('Entrer n :')
U=zeros(1,n)
for k=1:n do
   U(k)=simulX()
end
m=mean(U)      % ou m=sum(U)/n
```

La moyenne empirique m de n simulations indépendantes de la même variable converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers $E(X) = 4$.

On devrait donc avoir $m \simeq 4$.