Correction - DM 7

A rendre le Mercredi 29 Novembre

Exercice 1 (EDHEC 2004)

1. (a) On étudie la limite par opérations élémentaires :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{-n}{x} = -\infty$$

puis en composant par l'exponentielle,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

donc par produit,

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$$

donc f_n est continue à droite en 0.

(b) On étudie le taux d'accroissement pour $x > 0$:

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-\frac{n}{x}}}{x} = e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

(vu à la question précédente) donc f_n est dérivable à droite en 0, et $(f_n)'_d(0) = 0$.

2. (a) La fonction $x \to -\frac{n}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $x \to e^{-\frac{n}{x}}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
De plus, la fonction $x \to x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par produit f_n est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
On obtient pour tout $x \neq 0$,

$$f'_n(x) = e^{-\frac{n}{x}} + x \times \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}} = \frac{x+n}{x} e^{-\frac{n}{x}}.$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$e^{-\frac{n}{x}}$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	‖
$x+n$	‖	$-$	0	$+$		$+$	‖
x	‖	$-$		$-$	0	$+$	‖
$f'_n(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖

(b) En $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to +\infty} -\frac{n}{x} = 0$$

donc par composition par l'exponentielle continue,

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

En $-\infty$, on a
$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{n}{x} = 0$$
donc par composition par l'exponentielle continue,
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$
donc par produit
$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty.$$
En 0^-, on pose $X = -\frac{1}{x} \to +\infty$, et on obtient par croissances comparées que
$$\lim_{x\to0^-} f_n(x) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{e^{nX}}{X} = -\infty$$
enfin en 0^+ on a vu que f_n continue à droite en 0 donc
$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = f_n(0) = 0.$$
On obtient alors :

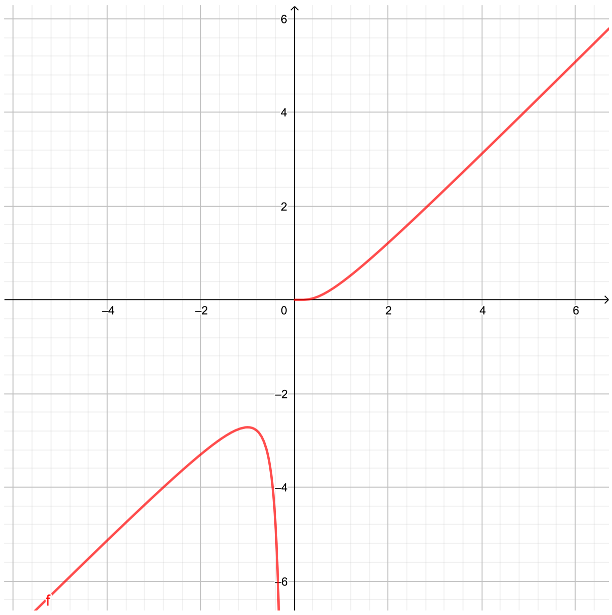
x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-ne$	$\searrow$	$-\infty$ || 0	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) Le cours donne immédiatement : $e^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

   (b) On pose alors $u = -\frac{n}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ donc on peut appliquer le DL précédent :
$$e^{-\frac{n}{x}} = 1 + \left(-\frac{n}{x}\right) + \frac{\left(-\frac{n}{x}\right)^2}{2} + o\left[\left(-\frac{n}{x}\right)^2\right] = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
puis on multiplie par x :
$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

   (c) On en déduit que :
$$f_n(x) - (x-n) = \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$
donc la droite d'équation $y = x - n$ est asymptote à $\mathscr{C}_n$ en $-\infty$ et $+\infty$.
Au voisinage de $-\infty$ on a
$$f_n(x) - (x-n) \sim \frac{n^2}{2x} < 0$$
donc $\mathscr{C}_n$ se trouve en dessous de son asymptote.
Au voisinage de $+\infty$ on a
$$f_n(x) - (x-n) \sim \frac{n^2}{2x} > 0$$
donc $\mathscr{C}_n$ se trouve au-dessus de son asymptote.

   (d) On rassemble toutes les informations précédentes : asymptote en $\pm\infty$, variations correctes, limites en 0^- et 0^+, maximum local atteint en -1 et de valeur $-e \simeq -2,7$.



4. (a) D'après ses variations, f_n admet un maximum sur $]-\infty;0[$ qui est strictement négatif donc f_n est strictement négative sur $]-\infty;0[$ et il n'y a pas de solution sur $]-\infty;0[$.
De plus f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[f(0); \lim_{+\infty} f[= [0;+\infty[= \mathbb{R}^+$.
Or $1 \in \mathbb{R}^+$ donc il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 1$.
Il y a donc une unique solution sur $\mathbb{R}$, et elle est positive (strictement car $f_n(0) = 0 \neq 1$).

(b) Comme u_n est implicite, on compare $f_n(u_n)$ et $f_n(1)$: on calcule

$$f_n(1) = 1 \times e^{-n} = e^{-n} < e^0 = 1$$

car $-n < 0$ et exp est strictement croissante.
On en déduit que $f_n(1) < f_n(u_n)$ et par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$,

$$1 < u_n.$$

On veut ensuite prouver que $u_n \ln(u_n) = n$, et pour prouver une égalité sur une quantité implicite, on revient à sa définition en explicitant la fonction :

$$f_n(u_n) = 1 \quad \text{donc} \quad u_n \times e^{-\frac{n}{u_n}} = 1.$$

On transforme alors : on compose par ln (les deux quantités valent 1 donc sont bien strictement positives) et on obtient :

$$\ln(u_n) - \frac{n}{u_n} = 0 \quad \text{donc} \quad u_n \ln(u_n) - n = 0 \quad \text{et enfin} \quad u_n \ln(u_n) = n.$$

donc u_n est bien solution de l'équation $x\ln(x) = n$.

(c) g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1;+\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 > 0 \quad \text{sur } [1;+\infty[.$$

On en déduit que g est continue et strictement croissante sur cet intervalle donc réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers son image $[g(1); \lim_{+\infty} g[$.
Avec

$$g(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

comme produit de limites valant $+\infty$, on obtient que g est une bijection de $[1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$.

Comme $1 \in \mathbb{R}^+$, l'équation $g(x) = n$ admet bien une solution, et celle-ci est unique donc c'est forcément u_n.
De plus on a

$$g(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = g^{-1}(n)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$, et on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty.$$

(d) On a obtenu précédemment que

$$u_n \ln(u_n) = n.$$

On compose par ln (les deux termes valent n donc sont strictement positifs) et comme $u_n > 1$, $\ln(u_n) > 0$ et $\ln(\ln(u_n))$ existe bien donc :

$$\ln(u_n \ln(u_n)) = \ln n \quad \text{ puis } \quad \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln n.$$

On factorise la somme par son terme prépondérant $\ln(u_n)$:

$$\ln(u_n)\left(1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right) = \ln(n)$$

Enfin en posant $X = \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on obtient par croissances comparées que :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 1 + \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 1 + 0 = 1$$

ce qui donne bien :

$$\ln u_n \sim \ln n$$

Attention, on ne peut pas composer l'équivalent par exp !
On utilise à nouveau $u_n \ln(u_n) = n$, qui donne

$$u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}.$$

5. (a) On a $u_n = g^{-1}(n)$; or la fonction g est strictement croissante donc g^{-1} aussi, ce qui donne

$$u_{n+1} = g^{-1}(n+1) > g^{-1}(n) = u_n$$

pour tout n, donc (u_n) est strictement croissante.

(b) On calcule cette quantité et on fait apparaître $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ pour simplifier :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = u_{n+1}e^{-\frac{(n+1)-1}{u_{n+1}}} = u_{n+1}e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}}e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = 1 \times e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

6. (a) Pour encadrer une intégrale on regarde l'ordre des bornes puis on travaille sur l'intérieur :
Par croissance stricte de la suite u_n, on sait que $u_n < u_{n+1}$ donc les bornes de I_n sont rangées dans l'ordre croissant.
Pour tout $t \in [u_n; u_{n+1}]$ par croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$ on obtient :

$$f_n(u_n) \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1}) \quad \text{ donc } \quad 1 \leq f_n(t) \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

En intégrant l'encadrement avec les bornes dans l'ordre croissant on obtient

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} dt \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} dt$$

puis en calculant les intégrales de gauche et de droite :

$$u_{n+1}-u_n \leq I_n \leq (u_{n+1}-u_n)e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

On divise enfin l'encadrement par $u_{n+1}-u_n > 0$:

$$1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

(b) On sait que $\lim u_{n+1} = +\infty$ donc par quotient puis en composant par l'exponentielle continue on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0 \quad \text{puis} \quad \lim e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1.$$

Le théorème d'encadrement donne alors

$$\lim \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n} = 1 \quad \text{donc} \quad I_n \sim (u_{n+1}-u_n).$$

(c) I_n et $(u_{n+1}-u_n)$ sont positives et équivalentes en $+\infty$, donc le théorème de comparaison permet de dire que les séries $\sum_{n\geq 1} I_n$ et $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.

Étudions cette dernière à l'aide de sa somme partielle : par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{p}(u_{n+1}-u_n) = u_{p+1}-u_1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

donc les deux séries divergent.

En particulier on obtient bien que la série de terme général I_n est divergente.

Exercice 2 (ECRICOME 2021)

1. Avec les notations du texte, il est clair que les deux derniers lancers doivent être des *Pile* et qu'il ne peut pas y avoir de succession de deux *Pile* consécutifs avant. Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} (X=2) & = & P_1 \cap P_2 \\ (X=3) & = & F_1 \cap P_2 \cap P_3 \\ (X=4) & = & (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \end{array}$$

Par indépendance des évènements (P_k) et (F_k) et incompatibilité des deux alternatives dans $(X=4)$, on a

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ a_3 & = & P(F_1)P(P_2)P(P_3) = \frac{1}{8} \\ a_4 & = & \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}. \end{array}$$

2. On peut réécrire l'évènement U_n à l'aide de la variable X. Si, au cours des n premiers lancers, on a au moins une fois deux *Pile* consécutifs, alors ces deux *Pile* consécutifs arrivent pour la première fois au deuxième lancer, ou bien au troisième, ou bien à n'importe quel moment avant le n-ième de sorte qu'on peut écrire

$$U_n = \bigcup_{k=2}^{n}[X=k].$$

Comme X est une variable aléatoire, les évènements $(X = 2), \ldots, (X = n)$ sont incompatibles et par conséquent

$$u_n = P(U_n) = P\left(\bigcup_{k=2}^{n}(X = k)\right) = \sum_{k=2}^{n} P(X = k) = \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

3. (a) En étudiant le programme à trous, on constate que la variable `tirs` compte le nombre de lancers, c'est donc la valeur que renvoie notre fonction. La variable `pile` est le nombre de *Pile* consécutifs, on veut atteindre 2. Si on a un *Face*, cette variable est remise à zéro.

```python
def simulX():
    tirs = 0  #nombre de tirages
    pile = 0  #nombre de pile "consécutifs"
    while pile < 2 :  #tant qu'on a pas 2 pile consécutifs
        if rd.random()<1/2 :
            pile = pile+1  #un pile de plus si pile
        else:
            pile = 0  #sinon, face et on retombe à 0
        tirs = tirs+1  #un tirage de plus
    return(tirs)
```

(b) Pour ce type de programme classique, on utilise une boucle `for`.

```python
def moyenne(n):
        X = np.zeros(n)
        for i in range(n):
                X[i] = simulX()
        return(np.mean(X))
```

(c) On peut conjecturer que plus n est grand, plus la valeur renvoyée par `moyenne(n)` sera proche de $E(X)$ (car la moyenne empirique tend vers l'espérance). On lit une oscillation de plus en plus proche de 6. On conjecture donc que X admet une espérance et que $E(X) = 6$.

4. (a) L'évènement U_{n+1} signifie qu'on a obtenu 2 *Pile* consécutifs à un moment au cours des $n+1$ premiers lancers. On a pu l'obtenir au cours des n premiers lancers (ce qui correspond à U_n) ou grâce à l'ajout du $(n + 1)$-ième lancer, c'est-à-dire avec les deux derniers lancers $P_n \cap P_{n+1} = B_{n+1}$. En d'autres termes,

$$U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}.$$

Par la formule du crible,

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

(b) L'évènement B_{n+1} nous donne une information très précise (*Pile* et *Pile*) sur ce qui s'est passé lors des lancers numérotés n et $n + 1$. Comme U_n concerne ce qui a pu se passer lors des n premiers lancers, on a naturellement l'idée de différencier selon ce qu'on a obtenu au lancer $n - 1$: *Pile* ou *Face*. En observant que $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$ est un SCE, on a

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}) \cup (U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}).$$

On voit alors

- D'une part, $B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}$ et comme $P_n \cap P_{n-1} \subset U_n$ (si on a *Pile* aux lancers $n - 1$ et n, on a bien eu deux *Pile* consécutifs au cours des n premiers lancers), on a
$$U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}.$$

- D'autre part, ayant obtenu *Face* au lancer $n-1$, on ne peut avoir eu deux *Pile* consécutifs qu'au cours des $n-2$ premiers lancers, et donc

$$U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Au final, on a bien,

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}).$$

(c) Les lancers étant indépendants, U_{n-2} est indépendant de F_{n-1}, P_n et P_{n+1}. Il suit que

$$\begin{aligned} P\left(U_n \cap B_{n+1}\right) &= P(U_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) + P(P_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) \\ &= \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Par la question 4.(a), on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(P_n \cap P_{n+1}) - P\left(U_n \cap B_{n+1}\right) \\ &= u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}u_{n-2} - \frac{1}{8} \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}). \end{aligned}$$

5. Par la question précédente,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0$$

car u_n est une probabilité et donc comprise entre 0 et 1 (et donc $1 - u_{n-2} \geq 0$). Ainsi, la suite (u_n) est croissante. Étant donc majorée par 1, le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une limite ℓ, également comprise entre 0 et 1. Le passage à la limite dans la relation

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

donne

$$0 = \ell - \ell = \frac{1}{8}(1 - \ell) \iff \ell = 1.$$

6. La variable X prend la valeur -1 si on obtient jamais deux *Pile* consécutifs. On peut alors écrire

$$P(X = -1) = P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k\right).$$

La suite (U_n) étant croissante au sens de l'inclusion (si on a deux *Pile* consécutifs au cours des n premiers lancers, on les a *a fortiori* au cours des $(n+1)$ premiers lancers), le théorème de la limite monotone nous donne

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P(U_n) = 1$$

et donc

$$P(X = -1) = 1 - 1 = 0.$$

7. Soit $n \geq 4$. Par définition,

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= 1 - u_n - 1 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8}v_{n-2}. \end{aligned}$$

8. Il est clair que, si on a deux *Pile* consécutifs au cours des $n+1$ premiers lancers, on a pu les avoir au cours des n premiers lancers ou bien (et c'est incompatible) exactement pour la première fois avec le $(n+1)$-ième lancer. C'est-à-dire $(X = n+1) \cup U_n = U_{n+1}$ et que cette réunion est disjointe. Ainsi,
$$P(X = n+1) + P(U_n) = P(U_{n+1}).$$
D'après la question 4.(c) et ce qui précède, on a donc
$$P(X = n+1) = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8}v_{n-2} = v_n - v_{n+1}.$$

9. On procède, comme demandé, par récurrence. Il faut au préalable calculer v_2, v_3 et v_4 à partir de u_2, u_3 et u_4. D'après ce qui précède,
$$u_2 = P(U_2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad u_3 = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8},$$
$$u_4 = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{2}$$
et donc
$$v_2 = 1 - u_2 = \frac{3}{4}, \qquad v_3 = 1 - u_3 = \frac{5}{8}, \qquad v_4 = \frac{1}{2}.$$
Init. Pour $n = 2$, on a d'une part
$$S_2 = 2P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
et d'autre part
$$6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 4 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$
et l'initialisation est vérifiée.

Héré. Soit $n \geq 2$. Supposons que $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$.
Remarquons que, d'après la question 7,
$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2} \Longleftrightarrow 8v_n = v_{n-2} + 8v_{n+1}$$
ou encore
$$8v_{n+2} = v_n + 8v_{n+3}.$$
Il suit que
$$\begin{array}{rcll} S_{n+1} & = & S_n + (n+1)P(X = n+1) & \\ & = & 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)P(X = n+1) & \text{(par HR)} \\ & = & 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) & \text{(par la question 8)} \\ & = & 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1} & \\ & = & 6 - v_{n+1} - 8v_{n+3} - v_n + v_n - (n+1)v_{n+1} & \\ & = & -v_{n+1} - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1}, & \end{array}$$
ce qui est bien la relation au rang $(n+1)$.

Ccl. Par le principe de récurrence, le résultat est donc démontré pour tout $n \geq 2$.

10. Comme déjà mentionné, la suite (v_n) est à termes positifs (car $1 - u_n \geq 0$) donc la relation précédente donne $S_n \leq 6$ et la suite (S_n) est bien majorée. Il est également clair que (S_n) est croissante : c'est une suite de sommes partielles de termes positifs
$$S_{n+1} - S_n = (n+1)P(X = n+1) \geq 0.$$

11. La suite (S_n) est croissante et majorée : elle converge par application du théorème de convergence monotone. La convergence de cette suite revient à la convergence de la série de terme général $kP(X = k)$ (et même la convergence absolue car elle est à termes positifs), c'est-à-dire à l'existence de l'espérance de X.

12. (a) La relation obtenue à la question 9 s'écrit aussi

$$nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n.$$

Or, comme (v_n) converge vers 0 (car (u_n) converge vers 1) et que la suite (S_n) est convergente, il suit que (nv_n) converge vers une certaine limite que l'on note λ positif (ou nul) car la suite est à termes positifs.

(b) Si λ est non nul, alors $nv_n \longrightarrow \lambda$, ce qui s'écrit aussi

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}.$$

Comme la série $\sum(\lambda/n)$ diverge (multiple de la série harmonique), le critère d'équivalence (qui s'applique ici car les termes généraux comparés sont tous deux positifs) implique alors que la série $\sum v_n$ diverge également.
Or, d'après la question 7,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} v_k &= \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} = 8\sum_{k=4}^{n-2}(v_k - v_{k+1}) \\ &= 8(v_4 - v_{n-1}) \qquad \text{(par télescopage)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8v_4 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire ! On peut donc conclure que $\lambda = 0$, ou que nv_n tend vers 0.

(c) Ainsi,

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 6$$

et on retrouve que $E(X) = 6$, ce qu'on avait conjecturé à la question 3.(c).

Exercice 3

1. (a) • Pour $j = 1$, on a :

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4},\ \ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0,\ \ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{4}.$$

En effet, si au n-ième tirage, on a tiré un jeton numéro 1 (et donc si $X_n = 1$), alors on procède au $(n+1)$-ième tirage dans la boîte 1 et X_{n+1} prend la valeur du numéro du jeton obtenu à ce $(n+1)$-ième tirage. On a alors $\frac{3}{4}$ de chance d'obtenir le numéro 1 (car il y a 3 jetons portant le numéro 1) et $\frac{1}{4}$ de chance d'obtenir le numéro 3 (car il y a 1 jeton portant le numéro 3).

• Pour $j = 2$, on a :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2},\ \ P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0,\ \ P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}.$$

En effet, si au n-ième tirage, on a tiré un jeton numéro 2 (et donc si $X_n = 2$), alors on procède au $(n+1)$-ième tirage dans la boîte 2 et X_{n+1} prend la valeur du numéro du jeton obtenu à ce $(n+1)$-ième tirage. On a alors $\frac{1}{2}$ de chance d'obtenir le numéro 1 (car il y a 2 jetons portant le numéro 1) et $\frac{1}{2}$ de chance d'obtenir le numéro 3 (car il y a 2 jetons portant le numéro 3).

- Pour $j = 3$, on a :

$$P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) = 0, \quad P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}, \quad P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}.$$

En effet, si au n-ième tirage, on a tiré un jeton numéro 3 (et donc si $X_n = 3$), alors on procède au $(n + 1)$-ième tirage dans la boîte 3 et X_{n+1} prend la valeur du numéro du jeton obtenu à ce $(n + 1)$-ième tirage. On a alors $\frac{1}{2}$ de chance d'obtenir le numéro 2 (car il y a 2 jetons portant le numéro 2) et $\frac{1}{2}$ de chance d'obtenir le numéro 3 (car il y a 2 jetons portant le numéro 3).

(b) Avec le système complet d'événements $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3))$, on a :

$$(X_{n+1} = 1) = ((X_n = 1)\cap(X_{n+1} = 1))\cup((X_n = 2)\cap(X_{n+1} = 1))\cup((X_n = 3)\cap(X_{n+1} = 1)).$$

Alors :

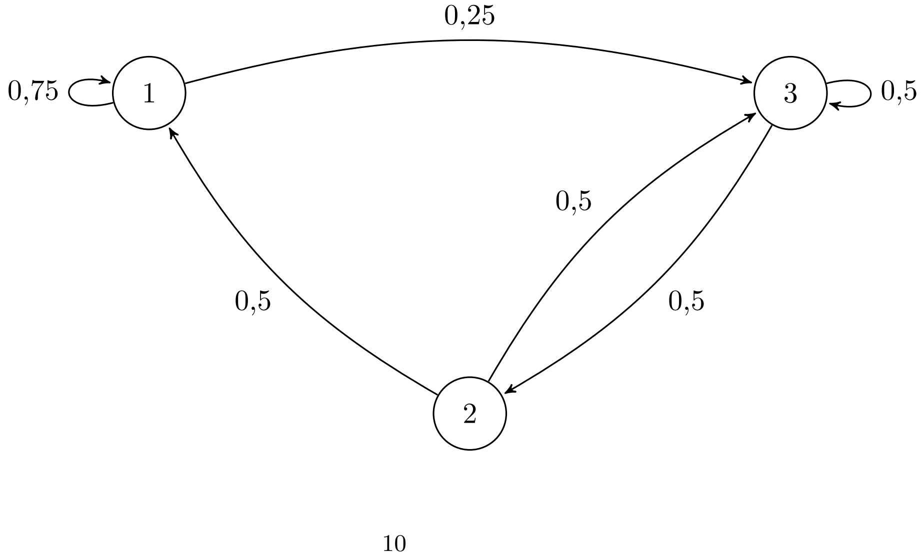
$$\begin{array}{rl} & P(X_{n+1} = 1) \\ = & P(((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1))) \\ = & P((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1)) + P((X_n = 3) \cap (X_{n+1} = 1)) \\ = & P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \\ & +P(X_n = 3)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \\ = & \frac{3}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2), \end{array}$$

en utilisant le fait que c'est une union d'événements incompatibles à la deuxième égalité et la formule des probabilités composées à la troisième.

De même, on obtient que :

$$\begin{array}{rcl} P(X_{n+1} = 2) & = & P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) \\ & & +P(X_n = 3)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) \\ & = & \frac{1}{2}P(X_n = 3) \\ P(X_{n+1} = 3) & = & P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) \\ & & +P(X_n = 3)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) \\ & = & \frac{1}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3). \end{array}$$

(c) Voici le graphe probabiliste associé :



(d) Avec les questions précédentes,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) & P(X_{n+1}=2) & P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2) & \frac{1}{2}P(X_n=3) & \frac{1}{4}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $U_{n+1} = U_n M$ avec $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Comme le premier tirage a lieu dans la boite 1, $P(X_1 = 1) = 1$, $P(X_1 = 2) = 0$ et $P(X_1 = 3) = 0$. Donc $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Voici la fonction `loideX` :

```python
def loideX(n):
    U = np.array([1, 0, 0])
    M = np.array([[3/4, 0, 1/4], [1/2, 0, 1/2], [0, 1/2, 1/2]])
    for k in range(2,n+1):
        U = np.dot(U,M)
    return(U)
```

(f) Les instructions de l'énoncé permettent de calculer les probabilités théoriques de chacun des états (c'est-à-dire $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$) pour n allant de 1 à 10 et de stocker celles-ci dans la matrice A. En d'autres termes, la matrice A est une matrice de taille 10×3 dont les lignes sont $U_1, U_2, \dots, U_{10}$.

Le graphique représente l'évolution des probabilités $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ lorsque n varie de 1 à 10. L'expérience semble converger rapidement vers un état stable lorsque n augmente, et on peut remarquer que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{5},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{5} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = \frac{2}{5}.$$

2. (a) Voici la fonction `esperancedeX` :

```python
def esperancedeX(n):
    U = loideX(n)
    return(1*U[0]+2*U[1]+3*U[2])
```

(b) On a :

$$\begin{aligned} ML &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times L + 1 \times J \end{aligned}$$

Donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$.

(c) $U_nL = 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) = E(X_n)$.
$U_nJ = P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) = 1$ (car $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = 3)$ est un système complet d'événements).
Donc, en multipliant la relation $LM = \frac{1}{2}L + J$ par U_n à gauche, on obtient :

$$U_nML = \frac{1}{2}U_nL + U_nJ = \frac{1}{2}E(X_n) + 1.$$

Avec la question 1.(c),

$$LMU_n = LU_{n+1} = 1 \times P(X_{n+1} = 1) + 2 \times P(X_{n+1} = 2) + 3 \times P(X_{n+1} = 3) = E(X_{n+1}).$$

On obtient finalement la relation $E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}E(X_n) + 1$.

(d) En posant $u_n = E(X_n)$, on a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
Et $u_1 = E(X_1) = 1\times P(X_1 = 1)+2\times P(X_1 = 2)+3\times P(X_1 = 3) = 1\times 1+2\times 0+3\times 0 = 1$.
Donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
On résout l'équation $x = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
On pose $v_n = u_n - 2$ et on montre que (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 2 = -1$. Donc, pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $E(X_n) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Et comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 2$.

3. (a) Voici la fonction `boitesuivante(i)` :

```
def boitesuivante(i):
    j = i
    r = rd.random()
    if j == 1:
        if r<1/4 :
            j = 3
    elif j == 2:
        if r<1/2 :
            j = 1
        else:
            j = 3
    else:
        if r<1/2 :
            j = 2
    return(j)
```

(b) Voici la fonction `simulX` :

```python
def simulX(n):
    i = 1
    for k in range(n):
        i = boitesuivante(i)
    return(i)
```

(c) La variable `L` est une matrice ligne qui contient 10000 simulations de la variable aléatoire X_{10}. Les résultats obtenus confirment ceux de la question 1.(f). En effet, les fréquences d'apparitions des trois états de X_{10} correspondent aux probabilités théoriques qu'on peut lire sur le graphique donné à la question 1.(f) :

- Pour l'état 1 : $0,4007 \simeq \dfrac{2}{5}$.
- Pour l'état 2 : $0,2029 \simeq \dfrac{1}{5}$.
- Pour l'état 3 : $0,3964 \simeq \dfrac{2}{5}$.

(d) L'instruction `mean(L)` permet d'obtenir la moyenne des termes de la liste `L`. Le résultat obtenu est proche de l'espérance théorique de X_{10} : $1,9957 \simeq 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-1}$
