

Correction - DM 8

A rendre le Mercredi 13 Décembre

Exercice 1

1. A a deux colonnes (1 et 2) égales donc n'est pas inversible. On peut aussi dire que les lignes 1 et 2 sont égales.
2. On cherche les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible, cherchons une réduite triangulaire :

$$\begin{aligned}
 A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 - \lambda \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 - \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 - \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda - 2 \\ 0 & \lambda & 1 - (1 - \lambda)(3 - \lambda) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1 - \lambda)L_1 \end{array} \\
 \Leftrightarrow T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 - \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2
 \end{aligned}$$

avec

$$P(\lambda) = 1 - (1 - \lambda)(3 - \lambda) + \lambda - 2 = \lambda - 1 - (1 - \lambda)(3 - \lambda) = (\lambda - 1)[1 + (3 - \lambda)] = (\lambda - 1)(4 - \lambda).$$

Les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible sont les valeurs qui annulent l'un au moins des coefficients diagonaux de cette réduite triangulaire, soit les solutions de :

$$-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{et} \quad P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4.$$

Donc $Sp(A) = \{0; 1; 4\}$.

3. On cherche $E_0(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 0I)X = 0\}$:

$$\begin{aligned}
 AX = 0 &\Leftrightarrow T_0 X = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -2z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_0(A) = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est générateur de $E_0(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_0(A)$.

On cherche $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); (A - I)X = 0\}$:

$$\begin{aligned} (A - I)X = 0 &\Leftrightarrow T_1 X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_1(A) = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est générateur de $E_1(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_1(A)$.

On cherche $E_4(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); (A - 4I)X = 0\}$:

$$\begin{aligned} (A - 4I)X = 0 &\Leftrightarrow T_4 X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_4(A) = \left\{ z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est générateur de $E_4(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_4(A)$.

4. Par concaténation de familles libres associées aux sous-espaces propres $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_4(A)$ (valeurs propres deux à deux distinctes), la famille \mathcal{B} est libre. Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. On a trouvé une famille \mathcal{B} de vecteurs propres qui forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable et plus précisément, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A = PDP^{-1}$.

Pour déterminer P^{-1} , on résout cette question avec la méthode du pivot :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) &L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{aligned}$$

Cette réduite triangulaire n'a aucun 0 sur la diagonale donc P est inversible.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) &L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ & & & & & L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) &L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{array} \right) &L_1 \leftarrow 1/6L_1 \\ & & & & & L_2 \leftarrow 1/6L_2 \\ & & & & & L_3 \leftarrow 1/6L_3 \end{aligned}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Voici les instructions Python :

```

1 | A = np.ones((3,3))
2 | A[2,2] = 3
3 | Vp, SP = al.eig(A)
4 | print("Vp = ", Vp)
5 | print("SP = ", SP)

```

(b) La matrice D confirme bien que les valeurs propres de A sont 0, 1 et 4.

De plus les trois vecteurs colonnes obtenus sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres correspondantes de D car ils sont respectivement colinéaires à :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

7. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$:

Ini. Pour $n = 0$, on a : $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

8. On en déduit alors que :

$$P^{-1}(A^n)P = P^{-1}(PD^nP^{-1})P = ID^nI = D^n \text{ donc } D^n = P^{-1}A^nP.$$

9. On montre que E est un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

- La matrice nulle vérifie $A0 = 0A = 0$, donc $0 \in E$ et $E \neq \emptyset$.
- Soient $M_1, M_2 \in E$ donc tels que $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$. Alors :

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

et $(M_1 + M_2) \in E$, qui est donc stable par somme.

- Soit $M \in E$ donc tel que $AM = MA$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

et $(\lambda M) \in E$, qui est donc stable par produit par un scalaire.

Finalement, ces trois propriétés permettent d'affirmer que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

10. On écrit F sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= Vect \left(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = Vect(B, C, D) \end{aligned}$$

Donc F est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $B, C, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La famille (B, C, D) est génératrice de F , montrons qu'elle est libre.

On résout l'équation $aB + bC + cD = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ (faire le calcul).

La famille (B, C, D) est donc une base de F .

11. Soit $M \in F$. Il existe donc a, b et c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} 3a + 2b + c & -3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -3a + 2b + c & 3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -2b + 2c & -2b + 2c & 2b + 4c \end{pmatrix}$$

Pour vérifier si M est dans E , on calcule AM et MA :

$$\begin{aligned} AM &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a + 2b + c & -3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -3a + 2b + c & 3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -2b + 2c & -2b + 2c & 2b + 4c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ -2b + 8c & -2b + 8c & 6b + 16c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} MA &= \begin{pmatrix} 3a + 2b + c & -3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -3a + 2b + c & 3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -2b + 2c & -2b + 2c & 2b + 4c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ -2b + 8c & -2b + 8c & 2b + 16c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc M vérifie bien $AM = MA$, donc $M \in E$. On en déduit finalement que tous les éléments de F sont aussi dans E , donc $F \subset E$.

12. (a) On remarque que $N = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = PNP^{-1}$, puis avec P et P^{-1} inversibles qui permettent de raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P(DN)P^{-1} = P(ND)P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}[PDNP^{-1}]P = P^{-1}[PNDP^{-1}]P \\ &\Leftrightarrow DN = ND. \end{aligned}$$

- (b) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on résout :

$$\begin{aligned} DN = ND &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 & b = 0 & 4c = 0 \\ d = 0 & 0 = 0 & 3f = 0 \\ 4g = 0 & 3h = 0 & 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = a & b = 0 & c = 0 \\ d = 0 & e = e & f = 0 \\ g = 0 & h = 0 & i = i \end{cases} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (c) On en déduit qu'une matrice M de E vérifie :

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow DN = ND \Leftrightarrow N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M = PNP^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

On calcule ce produit et on obtient :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3a + 2e + i & -3a + 2e + i & -2e + 2i \\ -3a + 2e + i & 3a + 2e + i & -2e + 2i \\ -2e + 2i & -2e + 2i & 2e + 4i \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= aB + eC + iD. \end{aligned}$$

On obtient finalement : $E = Vect(B, C, D) = F$.

Exercice 2 (EML 2004)

1. On vérifie les critères :

- Comme $A \times 0 = 0$ alors $0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Si M et N sont deux matrices de $E_1(A)$ et λ un réel alors : $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda M + N$ car M et N sont dans $E_1(A)$
Donc $\lambda M + N \in E_1(A)$.

Donc $E_1(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On montre de la même manière que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. (a) Pour montrer l'inclusion on montre que si $M \in E_1(A)$ alors $M \in E_2(A)$:
Si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ donc $A^2M = A(AM) = AM$ et donc $M \in E_2(A)$.

(b) Si A est inversible, pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit montrer l'inclusion réciproque :

Si $M \in E_2(A)$ alors $A^2M = AM$ et $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ d'où $AM = M$. Alors $M \in E_1(A)$.

Donc $E_2(A) \subset E_1(A)$ et finalement $E_1(A) = E_2(A)$.

(c) On a déjà $0 \in E_1(A)$ car $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc $\{0\} \subset E_1(A)$.

Supposons que $A - I$ est inversible et montrons l'inclusion réciproque. Si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ d'où $AM - M = 0$ et $(A - I)M = 0$ et comme $A - I$ est inversible alors $M = 0$. Donc $E_1(A) \subset \{0\}$.

Finalement, $E_1(A) = \{0\}$ si $A - I$ est inversible.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme B est diagonale à coefficients diagonaux non nuls, B est inversible donc $E_1(B) = E_2(B)$.

Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est également inversible alors $E_1(B) = \{0\} = E_2(B)$.

4. (a) On recherche les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{R}$ de C avec la méthode du pivot :

$$\begin{aligned} C - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 3 - \lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 0 & 2(1 - \lambda) & \lambda - 2 \\ 0 & 2(1 - \lambda) & (\lambda - 2)(1 - \lambda) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (3 - \lambda)L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 0 & 2(1 - \lambda) & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda - 2) \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2. \end{aligned}$$

Les valeurs de λ pour lesquelles $C - \lambda I_3$ n'est pas inversible sont les valeurs qui annulent l'un au moins des coefficients diagonaux de cette réduite triangulaire, c'est-à-dire $0, 1, 2$.
Donc $Sp(C) = \{0, 1, 2\}$.

On cherche les sous-espaces propres associés :

- Pour $F_0(C)$:

$$(C - 0I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc $F_0(C) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $F_1(C)$:

$$(C - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ -z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y \text{ et } z = 0.$$

Donc $F_1(C) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $F_2(C)$:

$$(C - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } x = z.$$

Donc $F_2(C) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(b) On montre que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

- $Card \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3 = dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

- On montre que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre :

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -c = 0 \text{ (} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{)} \\ -b = 0 \text{ (} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \text{)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et C est diagonalisable.

Donc avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $C = P D P^{-1}$ (les conditions d'ordre des terme de D et de première ligne de P étant bien respectées).

(c) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a alors :

$$\begin{aligned} M \in E_1(C) &\Leftrightarrow CM = M \Leftrightarrow CPN = PN \Leftrightarrow P^{-1}CP = N \\ &\Leftrightarrow DN = N \Leftrightarrow N \in E_1(D). \end{aligned}$$

(d) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont : $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} N \in E_1(D) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2u = u \\ 2v = v \\ 2w = w \end{cases} \\ &\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Avec les deux questions précédentes, on en déduit que $M \in E_1(C)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc une famille génératrice de $E_1(C)$ et libre (à démontrer mais c'est très simple) est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

qui est donc une base de $E_1(C)$ qui a finalement une dimension de 3.

(f) Comme D donc C n'est pas inversible on ne peut pas utiliser les résultats de la question 2. Par contre, on peut refaire le même raisonnement que précédemment :

$$M \in E_2(C) \Leftrightarrow C^2M = CM \Leftrightarrow PD^2P^{-1}N = PDP^{-1}M \Leftrightarrow D^2N = DN \Leftrightarrow N \in E_2(D)$$

Avec les mêmes coefficients que précédemment (comme D est diagonale) :

$$\begin{aligned} N \in E_2(D) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a=a \\ b=b \\ c=c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 4u=2u \\ 4v=2v \\ 4w=2w \end{cases} \\ &\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les matrices de $E_2(C)$ sont celles qui s'écrivent

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ x+a & y+b & z+c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

et une famille génératrice et libre (à démontrer) de $E_2(C)$ est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

donc une base de $E_2(C)$. La dimension de $E_2(C)$ est donc 6.

Comme $E_1(C)$ et $E_2(C)$, n'ont pas la même dimension, ils ne peuvent pas être égaux.

Exercice 3 (ECRICOME 2003)

1. ch et sh sont définies sur \mathbb{R} qui est bien centré en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x) \quad \text{et} \quad sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)$$

donc ch est paire et sh est impaire.

2. sh est dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$sh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x) > 0$$

car $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. On obtient donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh'(x)$		+	+
$sh(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh(x)$	-	0	+

En effet

$$sh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty$$

et par imparité de sh ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x) = -\infty.$$

3. On factorise les sommes par leur termes prépondérants :

$$sh(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2x}) = 1$ donc

$$sh(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Enfin on en déduit (par croissances comparées pour la seconde limite) que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{sh(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

donc la courbe de sh admet une branche parabolique verticale au voisinage de $+\infty$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = ch(x) > 0$ donc sh est strictement croissante sur \mathbb{R} , et continue par continuité de l'exponentielle.

Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} dans $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) \right[=] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

5. ch est comme somme et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x).$$

dont on a déterminé le signe précédemment. Cela donne :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch'(x)$		0	
$ch(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

En effet

$$ch(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1,$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = +\infty$$

et par parité de ch

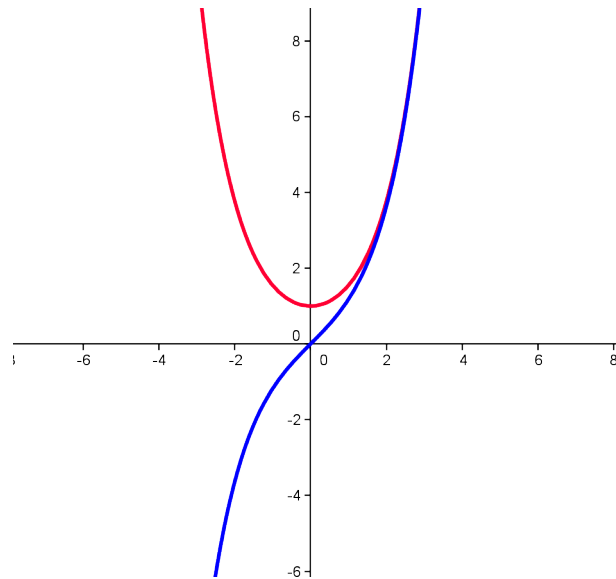
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ch(x) = +\infty.$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$$

donc on en déduit que

$$ch(x) > sh(x)$$



7.

8. f est défini sur \mathbb{R} qui est bien centré en 0. De plus pour tout $x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{-x}{sh(-x)} = \frac{-x}{-sh(x)} = \frac{x}{sh(x)} = f(x)$$

et

$$f(-0) = f(0)$$

La fonction f est donc paire.

9. On écrit les développements limités à l'ordre 2 en 0 de e^x et e^{-x} :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

puis en remplaçant x par $-x$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On soustrait :

$$e^x - e^{-x} = 2x + o(x^2)$$

et enfin :

$$sh(x) = x + o(x^2).$$

10. On en déduit que pour tout $x \neq 0$ et au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x}{x + o(x^2)} = \frac{x}{x(1 + o(x))} = \frac{1}{1 + o(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

D'autre part, toujours pour $x \neq 0$ et au voisinage de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{1+o(x)} - 1}{x} = \frac{-o(x)}{x(1 + o(x))} = \frac{-o(1)}{1 + o(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

11. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* comme quotient de fonctions dérivables, avec $sh(x) \neq 0$ sur ces intervalles. De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1 \times sh(x) - x \times ch(x)}{(sh(x))^2} = \frac{sh(x) - xch(x)}{(sh(x))^2}.$$

12. h est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme somme et produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+ , et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$h'(x) = sh'(x) - ch(x) - xch'(x) = ch(x) - ch(x) - xsh(x) = -xsh(x)$$

donc

$$h'(x) < 0 \quad \text{sur }]0; +\infty[\quad \text{et} \quad h'(0) = 0.$$

Enfin $h(0) = 0$ et h est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ donc $h(x) < 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	-	
$h(x)$	0		$-\infty$
$h(x)$	0	-	

13. Comme $(sh(x))^2 > 0$ et $h(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, on a $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ et $f'(0) = 0$. Cela donne :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	-	
$f(x)$	1		0

car $f(0) = 1$ et

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\frac{e^x}{2}} \sim \frac{2x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

par croissances comparées.

On construit donc une courbe décroissante sur \mathbb{R}_+ , partant de 1 en 0 avec une tangente horizontale et arrivant sur une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$.

La courbe sur \mathbb{R}_- est obtenue par symétrie par rapport à l'axe (Oy) car f est paire.

14. f est strictement décroissante et continue sur $[0, 8; 1]$ donc par le théorème de bijection monotone,

$$f([0, 8; 1]) = [f(1); f(0, 8)] \subset [0, 8; 1]$$

car $f(1) > 0, 8$ et $f(0, 8) < 1$.

Montrons alors par récurrence sur $n \geq 0$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 8; 1]$:

Ini. Pour $n = 0$, on a

$$u_0 = 1 \in [0, 8; 1]$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [0, 8; 1]$. Alors :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, 8; 1]) \subset [0, 8; 1] \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \in [0, 8; 1]$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 8; 1]$.

15. Tout d'abord on a $f(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution.

Pour $x \neq 0$ on résout :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{sh(x)} = x \iff \frac{1}{sh(x)} = 1 \iff sh(x) = 1.$$

Or par 1.4 la fonction sh est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et $1 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $sh(x) = 1$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} , et l'équation $f(x) = x$ admet α pour unique solution.

16. La fonction sh est strictement croissante; les valeurs données par l'énoncé permettent d'écrire :

$$sh(0, 8) < 1 = sh(\alpha) < sh(1) \quad \text{donc} \quad 0, 8 < \alpha < 1.$$

De plus pour tout $x \in [0, 8; 1]$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(sh(x))^2}.$$

Par décroissance de h , pour $x \in [0, 8; 1]$ on a

$$h(1) \leq h(x) \leq h(0, 8) \quad \text{donc} \quad -h(0, 8) \leq -h(x) \leq -h(1)$$

et par croissance de sh on a

$$0 < sh(0, 8) \leq sh(x) \leq sh(1)$$

qui donne avec la croissance de la fonction carré et la décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+ :

$$0 < (sh(0, 8))^2 \leq (sh(x))^2 \leq (sh(1))^2 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{sh^2(1)} \leq \frac{1}{sh^2(x)} \leq \frac{1}{sh^2(0, 8)}.$$

On multiplie alors les 2 inégalités qui ne concernent que des nombres positifs :

$$\frac{-h(0, 8)}{sh^2(1)} \leq -f'(x) \leq \frac{-h(1)}{sh^2(0, 8)},$$

et enfin en multipliant par $-1 > 0$:

$$\frac{h(1)}{sh^2(0, 8)} \leq f'(x) \leq \frac{h(0, 8)}{sh^2(1)}.$$

17. f est dérivable sur $[0, 8; 1]$ et pour tout $x \in [0, 8; 1]$,

$$-0,5 < -0,47 \leq f'(x) \leq -0,13 < 0,5 \quad \text{donc} \quad |f'(x)| < 0,5.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors : pour tous x et y de $[0, 8; 1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq 0,5 \times |x - y|.$$

On applique cette inégalité à $x = u_n \in [0, 8; 1]$ et $y = \alpha \in [0, 8; 1]$ et on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq 0,5 \times |u_n - \alpha|$$

et encore :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,5 \times |u_n - \alpha|.$$

Montrons ensuite par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq 0,2(0,5)^n$.

Ini. Pour $n = 0$,

$$0,8 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leq 1 - \alpha \leq 0,2 \quad \text{donc} \quad |1 - \alpha| \leq 0,2$$

$$\text{et } 0,2 \times (0,5)^0 = 0,2 \text{ donc}$$

$$|u_0 - \alpha| \leq 0,2 \times (0,5)^0$$

et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \alpha| \leq 0,2 \times 0,5^n$. Alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,5 \times |u_n - \alpha| \leq 0,5 \times 0,2 \times 0,5^n = 0,2 \times 0,5^{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq 0,2 \times (0,5)^n$.

18. $|0,5| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2 \times (0,5)^n = 0$.

Par encadrement (une valeur absolue est toujours positive), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0 \quad \text{et enfin} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

19. D'après l'inégalité de la question précédente, il suffit que l'on ait : $0,2 \times (0,5)^n \leq 0,001$ pour que l'on ait : $|u_n - \alpha| \leq 0,001$ par majoration.

On résout donc :

$$0,2 \times (0,5)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow (0,5)^n = e^{n \ln(0,5)} \leq \frac{0,001}{0,2} = \frac{1}{200}$$

$$\Leftrightarrow (\text{en comparant par } \ln \text{ croissante}) \quad n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{200}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{200}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (\text{car } \ln(1/2) < 0)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(200)}{-\ln(2)} = \frac{\ln(200)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3 \times 5^2)}{\ln(2)} = \frac{3 \ln(2) + 2 \ln(5)}{\ln(2)} = 3 + 2 \frac{\ln(5)}{\ln(2)}.$$

Ainsi, comme $2 \frac{\log(5)}{\log(2)} \in]4, 5[$, les entiers n supérieurs à $3 + 2 \frac{\ln(5)}{\ln(2)}$, sont les entiers supérieurs à $N = 8$.

20. (a) Voici le programme demandé :

```

1 | def f(x):
2 |     if x == 0 :
3 |         y = 1
4 |     else:
5 |         y = x / ((np.exp(x) - np.exp(-x)) / 2)
6 |     return(y)

```

(b) Voici le programme demandé :

```
1 | N = 8
2 | U = 1
3 | for k in range(1, N+1):
4 |     U = f(U)
5 | print(U)
```

(c) On sait d'après la question 6. que $|u_N - \alpha| \leq 0,001$ i.e. $u_N - 0,001 \leq \alpha \leq u_N + 0,001 \Leftrightarrow 0,8803753 \leq \alpha \leq 0,8823753$
