Correction - DM 9

A rendre le Mardi 4 Janvier

Exercice 1 (EML 2016)

1. On calcule sans difficulté :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On résout l'équation :
$$aI + bA + cA^2 = 0 \iff \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0.$$
Donc (I, A, A^2) est libre.

3. $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A.$

4. On veut les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
D'après la question 3., on sait que le polynôme $X^3 - 2X = X(X^2-2)$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$; et donc $Sp(A) \subset \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.
Puisqu'on doit calculer les sous-espaces propres, vérifions qu'elles sont bien valeurs propres en calculant les sous-espaces propres associés :
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y \quad = 0 \\ \quad \quad 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $E_0(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$. 0 est bien valeur propre de A car il y a au moins un vecteur non nul dans le sous-espace propre associé.
De même
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(A) \Leftrightarrow (A + \sqrt{2}I)X = 0 \Leftrightarrow \text{(après pivot)} \begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\sqrt{2}z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $E_{-\sqrt{2}}(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.
Enfin :
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A) \Leftrightarrow (A - \sqrt{2}I)X = 0 \Leftrightarrow \text{(après pivot)} \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{2}z \\ z = z \end{cases} \Longleftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{\sqrt{2}}(A) = Vect\left[\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\right]$.

Enfin la famille $\left[\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\right]$ est une base de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-\sqrt{2}, 0$ et $\sqrt{2}$ (à démontrer : card = 3 = dim + libre).

Donc en posant

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

P est inversible et la formule de changement de base assure que $A = PDP^{-1}$.

5. On remarque que

$$\mathcal{E} = \left\{aI + bA + cA^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = Vect(I, A, A^2)$$

donc $\mathcal{E}$ est bien un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, engendré par (I, A, A^2) qui est également libre (question 2) donc c'est une base de $\mathcal{E}$, et $dim(\mathcal{E}) = 3$.

6. Soit $M \in \mathcal{E}$, on la note $M = aI + bA + cA^2$, on a alors avec la question 4 :

$$AM = aA + bA^2 + cA^3 = (a + 2c)A + bA^2 \in Vect(A, A^2) \subset \mathcal{E}$$

donc AM est bien élément de $\mathcal{E}$.

7. On vient de voir que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) \in \mathcal{E}$ donc f est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Vérifions qu'elle est linéaire : pour tous $M_1, M_2 \in \mathcal{E}$ et tout λ réel on a :

$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$

donc f est linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

8. On calcule sans difficulté $f(I) = A$, $f(A) = A^2$ et $f(A^2) = A^3 = 2A$ (question 4) donc :

$$F = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

9. On peut calculer F^3 et vérifier que $F^3 = 2F$ puis revenir à l'endomorphisme f. Mais on peut aussi calculer directement et sans difficulté : pour tout $M \in \mathcal{E}$,

$$f \circ f \circ f(M) = f \circ f(AM) = f(A^2M) = A^3M = 2AM = 2f(M).$$

10.

$$X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in Ker(F) \Longleftrightarrow FX = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{c}x + 2z = 0\\ y = 0\end{array} \Longleftrightarrow X = z\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

donc $Ker(F) = Vect\left[\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right]$ et $Ker(f) = Vect(A^2 - 2I)$.

$$Im(f) = Vect(f(I), f(A), f(A^2)) = Vect(A, A^2, 2A) = Vect(A, A^2).$$

La famille (A, A^2) est génératrice de $Im(f)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $Im(f)$.

11. (a) On peut résoudre cette équation en passant par les matrices associées dans la base (I, A, A^2).
On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que :

$$FX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ x+2z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est absurde d'après le premier coefficient des deux vecteurs.
Donc l'équation $f(M) = I + A^2$ n'a pas de solution dans $\mathcal{E}$.
On peut aussi travailler directement sur f en remarquant que $I + A^2 \notin Vect(A, A^2) = Imf$ donc l'équation n'a pas de solution.

(b) On résout de même l'équation, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$FX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ x+2z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 1-2z \\ y = 1 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 1-2z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

donc les matrices N de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(N) = A + A^2$ sont toutes les matrices de la forme :

$$N = (1-2z)I + A + zA^2 = \begin{pmatrix} 1-z & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1-z \end{pmatrix}$$

avec $z \in \mathbb{R}$.
On peut aussi résoudre directement avec f en remarquant que $A = f(I)$ et $A^2 = f(A)$ pour écrire :

$$\begin{aligned} f(N) = A + A^2 &\Leftrightarrow f(N) = f(I) + f(A) \Leftrightarrow f(N - I - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow N - I - A \in Ker(f) \Leftrightarrow N - I - A = \lambda(A^2 - 2I) \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et enfin les solutions sont toutes les matrices de la forme :

$$N = I + A + \lambda(A^2 - 2I) = (1-2\lambda)I + A + \lambda A^2.$$

qui est bien la même que celle trouvée par le calcul matriciel.

Exercice 2 (EDHEC 2006)

1. (a) Passons par le noyau de A :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) &\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0 \\ -2y - z = 0 \quad (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ 2y + z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10y - 14y = 0 \\ z = -2y \\ 0 = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $ker(f) = Vect((2, 1, -2)) = Vect(u)$.

(b) Comme $ker(f) \neq \{0\}$ alors f n'est pas injective donc pas bijective donc A n'est pas inversible.

2. (a) Soit $v = (x, 1, z)$.

$$f(v) = u \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ 2 + z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

L'unique vecteur v vérifiant $f(v) = u$ avec une deuxième coordonnée égale à 1 est donc :

$$v = (3, 1, -2).$$

(b) Soit $w = (x, 1, z)$.

$$f(w) = v \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 3 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 + 7z = 3 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ 2 + z = 1 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

L'unique vecteur w vérifiant $f(w) = v$ avec une deuxième coordonnée égale à 1 est donc :

$$w = (0, 1, -1)$$

(c) La famille (u, v, w) comprend trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.
Il suffit donc de démontrer que la famille est libre et on résout le système :

$$xu + yv + zw = 0 \Leftrightarrow x(2, 1, -2) + y(3, 1, -2) + z(0, 1, -1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -y + 2z = 0 \quad (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ y - z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre et $card(u, v, w) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) On a $u \in kerf \Leftrightarrow f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$ donc

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La formule de changement de base donne :

$$A = M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = PNP^{-1}.$$

On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0.$$

Donc, pour tout $k \geq 3$:

$$N^k = N^3 N^{k-3} = 0 \qquad \text{et} \qquad A^k = P\,N^k P^{-1} = 0.$$

4. (a) Par définition, $C_N = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

- $C_N \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- $0\,N = 0 = N\,0$ donc $O \in C_N$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in C_N$. Alors :

$$\left(\lambda M + M'\right) N = \lambda MN + M'N = \lambda NM + NM' = N\left(\lambda M + M'\right)$$

Donc $(\lambda M + M') \in C_N$.

C_N est stable par combinaison linéaire et c'est un sous espace de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On explicite maintenant C_N (on aurait pu expliciter directement C_N, pour montrer que c'est un sev) :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in C_N \Leftrightarrow NM = MN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=0 & e=a & f=b \\ g=0 & h=d & e=i \\ 0=0 & g=0 & h=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 & e=a & f=b \\ g=0 & h=0 & e=i \\ 0=0 & g=0 & h=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = aI + bN + cN^2.$$

Donc $C_N = Vect(I, N, N^2)$ (et on retrouve que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

(b) On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\Leftrightarrow MA = AM \\ &\Leftrightarrow M\ P\ N\ P^{-1} = P\ N\ P^{-1} M \\ &\Leftrightarrow P^{-1}(M\ P\ N\ P^{-1})P = P^{-1}(P\ N\ P^{-1} M)P \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}M\ P)\ N = N\ (P^{-1}MP) \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N. \end{aligned}$$

D'où, toujours par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^{-1}MP = aI + bN + cN^2 \\ &\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ M = P(P^{-1}MP)P^{-1} = aI + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ M = aI + bA + cA^2 \Leftrightarrow M \in \text{Vect}\left(I, A, A^2\right). \end{aligned}$$

Donc $C_A = Vect(I, A, A^2)$.

Pour avoir la dimension, il reste à voir si la famille est libre. Pour cela, on réutilise N :

$$aI + bA + cA^2 = 0 \Leftrightarrow P(aI + bA + cA^2)P^{-1} = 0 \Leftrightarrow aI + bN + cN^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

car la famille (I, N, N^2) est libre (évident car elle est échelonnée, ou bien on écrit le système d'équation).

La famille (I, A, A^2) est libre et génératrice donc base de C_A et $dim(C_A) = 3$.

Exercice 3 (EML 2018)

1. (a) Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : "Obtenir pile au i-ème lancer " et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$\begin{aligned}(X=0) &= P_1 \cap P_2\\ (X=1) &= (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)\\ (X=2) &= (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).\end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X=n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$\begin{aligned}P(X=0) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},\\ P(X=1) &= 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},\\ P(X=2) &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.\end{aligned}$$

(b) Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X=n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X=n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1}\left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$P(X=n) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

2. (a) U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n. Autrement dit, $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X=n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc U suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U=k) \cap (X=n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}P(U=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((U=k)\cap(X=n)) = \sum_{n=k}^{+\infty} P((U=k)\cap(X=n))\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U=k)P(X=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}P(X=n) \quad \text{(d'après 2.b)},\end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.

En injectant le résultat trouvé en 1.b, il vient

$$\begin{aligned}P(U=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} = 4\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}}\\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-1/3} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(U=k) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

(d) U admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} kP(U=k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\sum_{k\geq 0} kP(U=k) = \sum_{k\geq 0} k\frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k\geq 1} k\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9}\times\frac{1}{(1-1/3)^2} \\ &= \frac{2}{9}\times\frac{9}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U-1)$. On a

$$\sum_{k\geq 0} k(k-1)P(U=k) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{27}\sum_{k\geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(U(U-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(U=k) = \frac{2}{27}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27}\times\frac{2}{(1-1/3)^3} = \frac{2}{27}\times\frac{2\times 27}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que : $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$.

3. (a) V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V=n)$ est réalisé. Ainsi, $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X=n)$, V prend ses valeurs entre 0 et n. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$P_{(X=n)}(V=k) = P_{(X=n)}(X-U=k) = P_{(X=n)}(U=n-k) = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, sachant $(X=n)$, $V \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$.

(c) En reprenant les calculs effectués en 2.(c), on observe que la loi de V est la même que celle de U. Autrement dit, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(V=k) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

4. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. On a

$$(U=k)\cap(V=\ell) = (U=k)\cap(X-U=\ell) = (U=k)\cap(X=k+\ell).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P((U=k)\cap(V=\ell)) &= P((U=k)\cap(X=k+\ell)) \\ &= P_{(X=k+\ell)}(U=k)\times P(X=k+\ell) \\ &= \frac{1}{k+\ell+1}\times(k+\ell+1)\frac{4}{3^{k+\ell+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+\ell+2}} = \frac{2}{3^{k+1}}\times\frac{2}{3^{\ell+1}} = P(U=k)P(V=\ell). \end{aligned}$$

Ainsi, U et V sont indépendantes.

5. U et V étant indépendantes d'après 4, il vient $Cov(U,V)=0$. Alors

$$Cov(X,U) = Cov(V+U,U) = Cov(V,U)+Cov(U,U) = 0+V(U) = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $Cov(X,U)=\dfrac{3}{4}$.

6. (a) On propose la fonction suivante :

```
1.  function x=simule_X()
2.      nPile = 0
3.      nFace = 0
4.      while (nPile<2)
5.          if (rand()<2/3)
6.              nPile = nPile +1
7.          else
8.              nFace = nFace +1
9.          end
10.     end
11.     x = nFace
12. endfunction
```

   (b) La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A.

   (c) On observe que pour $p\approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi, le jeu est équilibré pour $p\approx 0,8$.

7. (a) Z compte le rang du premier succès ("obtenir Pile") dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile). Ainsi, $Z\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$.
   On sait alors que $E(Z)=\dfrac{1}{p}$ et $V(Z)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

   (b) Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y=Z-1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$E(Y)=E(Z-1)=E(Z)-1=\frac{1}{p}-1=\frac{1-p}{p} \text{ et } V(Y)=V(Z-1)=V(Z)=\frac{1-p}{p^2}.$$

   (c) Posons $q=1-p$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y\geq n) &= P(Z-1\geq n)=P(Z\geq n+1)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(Z=k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}pq^{k-1}=pq^n\sum_{k=n+1}^{+\infty}q^{k-(n+1)}=pq^n\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=pq^n\times\frac{1}{1-q}=q^n. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\ P(Y\geq n)=(1-p)^n$.

8. (a) En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X\leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(X\leq Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y\geq n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y\geq n) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(X\leq Y)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y\geq n)$.

(b) En injectant les résultats établis en 1.(b) et 7.(c) dans la formule trouvée en 8.(a), on a :

$$\begin{aligned} P(X\leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y\geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}q^n = \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{9}\times\frac{1}{(1-q/3)^2} = \frac{4}{9}\times\left(\frac{3}{3-q}\right)^2 = \frac{4}{(3-q)^2} \\ &= \frac{4}{(2+p)^2}. \end{aligned}$$

(c) Le jeu est équilibré quand $P(X\leq Y)=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2}=\frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned} \frac{4}{(2+p)^2}=\frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8=(2+p)^2 \\ &\Leftrightarrow p^2+4p-4=0 \\ &\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2+4X-4 \\ &\Leftrightarrow p\in\{-2-2\sqrt{2},\,-2+2\sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Mais $-2-2\sqrt{2}<0$ et $-2+2\sqrt{2}>0$ et p est nécessairement positif. Ainsi, le jeu est équitable pour $p=2\sqrt{2}-2$.

Remarque. On a $\sqrt{2}\approx 1,41$ donc $2\sqrt{2}-2\approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question 6.(c).

Exercice 4 (EDHEC 2012)

1. Par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1\times\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

On pose alors la fonction $g(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et on dérive ses 2 expressions (dérivable en tant que polynôme) :

- $g(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$ donc $g'(x)=\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$;
- $g(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $g'(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

2. Loi de T_n

   (a) Si $1 \leq k \leq n-1$, $(T_n = k)$ signifie qu'on a lancé $k \leq n-1$ fois la pièce avant de s'arrêter. On n'a donc pas pu obtenir n faces, et on s'est arrêté sur un pile.
   Enfin les lancers précédents ne peuvent pas avoir donné pile, sinon on se serait arrêté après.
   D'où, si $k \geq 2$,
   $$P(T_n = k) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) = q^{k-1}p$$
   par indépendance des lancers,
   et si $k = 1$,
   $$P(T_n = 1) = P(P_1) = p = q^0 p$$
   donc la formule ci-dessus est encore valable.

   (b) $(T_n = n)$ peut avoir été obtenu de deux manières : avec n fois face ou avec $n-1$ fois face et une fois pile. On a donc :
   $$P(T_n = n) = P\big((F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)\big) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$
   par incompatibilité, puis :
   $$P(T_n = n) = q^n + q^{n-1}p = q^{n-1}(q+p) = q^{n-1}$$
   par indépendance des lancers.

   (c) Dans la somme, il faut isoler la valeur $k = n$ qui n'a pas la même formule que les autres :
   $$\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = p\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} + q^{n-1} = p\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1.$$

   (d) T_n étant finie, elle a une espérance et :
   $$\begin{aligned} E(T_n) &= p\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1} = p\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} + nq^{n-1} \\ &= \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

3. Loi de X_n.

   (a) Lors des lancer, on a ou bien k Face puis un Pile et on s'arrête, ou bien n face et aucun pile et on s'arrête. Donc $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $(X_n = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ donc par indépendance des lancers, $P(X_n = 0) = q^n$.
   Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^n)$.

   (b) X_n admet donc une espérance et $E(X_n) = 1 - q^n$.

4. Loi de Y_n.

   (a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(Y_n = k)$ signifie que l'on a eu k Face (donc pas n) et donc ensuite un Pile, ce qui donne en écriture mathématique :
   $(Y_n = k) = F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ donc par indépendance des lancers, $P(Y_n = k) = q^k p$.

   (b) $(Y_n = n)$ signifie que l'on a eu n Face donc aucun pile (il ne peut y avoir plus de n lancers) d'où : $(Y_n = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ et par indépendance, $P(Y_n = n) = q^n$.

   (c) Le nombre total de lancer est le nombre total de Pile et de Face obtenus donc $T_n = X_n + Y_n$ donc la linéarité de l'espérance donne :
   $$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) \\ &= (1-q^n)\frac{1-1+q}{1-q} = (1-q^n)\frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

5. (a)
```
function [t,x,y]=simul(n,p)
    t=0,x=0,y=0
    while (x==0)&(t<n) do
         t=t+1
         if rand() >p then
            y=y+1
        else
            x=x+1
        end
    end
endfunction
```

(b) Les termes p_k vérifient : $p_1 = p$ et $\forall k \in [\![2; n-1]\!]$, $p_k = qu_{k-1}$ donc suivent une relation de suite géométrique de raison q jusqu'au rang $n-1$.
On a donc $p_k = u_1 \times q^{k-1} = pq^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$.
Enfin $p_n = q/pp_{n-1} = q/ppq^{n-2} = q^{n-1}$.
Cette fonction renvoie donc la loi (théorique) de la variable T_n.

(c) Ce programme mémorise 1000 simulations de la variable T_n dans un vecteur ligne `T` puis il tabule les valeurs obtenues c'est-à-dire qu'il renvoie une matrice dont la première colonne contient les modalités de T_n (différentes valeurs prises par la variable T_n lors des simulations) et la seconde colonne contient les effectifs correspondants.
La fréquence de l'évènement $(T_n = 5)$ au cours des 1000 simulations est donc

$$f = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} = 0,073.$$

(d) Le diagramme des fréquences de T_n sur 1000 simulations est très proche de la loi théorique de T_n . On retrouve la propriété : la fréquence d'un évènement A sur un grand nombre de simulations converge vers la probabilité mathématique de A.