Correction - DM 9

A rendre le Vendredi 22 Décembre

Exercice 1

1. $A = \ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$, $B = \dfrac{1}{2}$, $C = 2(e^2 - e)$, $D = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{9}$, $E = 0$.

2. (a) $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$.

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+x}dx = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$.

3. • Pour A : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \ln(x)$ étant C^1 sur $[1, e]$, on a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(x) & & x \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{x} & \longrightarrow & \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

Donc $A = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

• Pour B : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ et $x \mapsto x^2$ étant C^1 sur $[0, 1]$, on a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & x^2 & & \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ & & \searrow & \\ - & 2x & \longrightarrow & \sqrt{1+x^2} \end{array}$$

Donc $B = \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = -\sqrt{2} + \frac{2}{3}$.

• Pour C : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{x^5}$ et $x \mapsto x^3$ étant C^1 sur $[0, 1]$, on a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & x^3 & & x^2e^{x^3} \\ & & \searrow & \\ - & 3x^2 & \longrightarrow & \dfrac{1}{3}e^{x^3} \end{array}$$

Donc $C = \left[\dfrac{x^3}{3}e^{x^3}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 x^2e^{x^3}dx = \frac{e}{3} - \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{e}{3} - \frac{e}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

• Pour D : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(x)$ étant C^1 sur $[\frac{1}{2}, 2]$, on a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(x) & & \dfrac{1}{x} \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{x} & \longrightarrow & \ln(x) \end{array}$$

Donc $D = \left[(\ln(x))^2\right]_{1/2}^2 - \displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x} = (\ln(2))^2 - (\ln(1/2))^2 - D = -D$.

Ainsi $2D = 0$ et $D = 0$.

4. • Pour A : On pose $t = e^x$. Alors :

- $t : 1 \to 2$,
- $\dfrac{e^{2x}}{e^x+1} = \dfrac{t^2}{t+1}$,
- $dt = e^x dx$ donc $dx = \dfrac{1}{e^x}dt = \dfrac{1}{t}dt$.

Par changement de variable ($x \mapsto e^x$ étant C^1 sur $[0, \ln(2)]$), on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} \times \frac{1}{t}dt = \int_1^2 \frac{t}{t+1}dt = \int_1^2 \frac{1+t-1}{1+t}dt = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= [t - \ln(1+t)]_1^2 = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

- Pour B : On pose $t = \ln(x)$. Alors :
  - $t : 1 \to 2$,
  - $\dfrac{\ln(x)}{x(1+\ln(x)} = \dfrac{t}{e^t(1+t)}$ car $x = e^t$,
  - $dt = \dfrac{1}{x}dx$, donc $dx = xdt = e^t dt$.

  Par changement de variable ($x \mapsto \ln(x)$ étant C^1 sur $[e, e^2]$), on obtient :

$$B = \int_1^2 \frac{t}{e^t(1+t)}e^t dt = \int_1^2 \frac{t}{1+t}dt = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right),$$

  avec les mêmes calculs que pour l'intégrale A.
- Pour C : On pose $t = \dfrac{1}{x}$. Alors :
  - $t : 2 \to \dfrac{1}{2}$,
  - $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(1/t)}{1/t} = -t\ln(t)$,
  - $dt = -\dfrac{1}{x^2}dx$, donc $dx = -x^2 dt = -\dfrac{1}{t^2}dt$.

  Par changement de variable ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant C^1 sur $[1/2, 2]$), on obtient :

$$C = \int_2^{1/2} (-t\ln(t)) \times (-\frac{1}{t^2}dt) = \int_2^{1/2} \frac{\ln(t)}{t} = -\int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{t} = -C.$$

  Donc $2C = 0$ et $C = 0$.

Exercice 2 (EDHEC 2020)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ sont bien définies sur $[0,1]$ (car $1 + x \geq 1 > 0$ si $0 \leq x \leq 1$) et continues sur cet intervalle, ce qui suffit à garantir la bonne définition des intégrales I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour I_0 :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

   Pour I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx \\ &= \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \ln(2) + \frac{1}{2} - \ln(1) - 1 = \ln(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)^2}{(1+x)^2} \\ &= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) La relation précédente s'écrit, lorsque $n = 0$:

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad I_2 = 1 - 2I_1 - I_0 = 1 - 2\ln(2) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

(c) Le script `Scilab` suivant calcule de proche en proche les intégrales I_k grâce à la relation :

$$\forall k \geq 2, \quad I_k = \frac{1}{k-1} - 2I_{k-1} - I_{k-2}.$$

La variable `a` contient l'avant-dernière intégrale calculée, `b` contient la dernière intégrale calculée et `aux` est une variable auxiliaire pour gérer les transferts de valeurs.

```
n = input('donnez une valeur pour n : ')
a = 1/2
b = np.log(2)-1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a = b
    b = 1/(k-1) - 2*b - aux
print(b)
```

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq (1+x)^2 \leq 4 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n \quad \text{car } x^n \geq 0 \end{aligned}$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[0, 1]$. Par croissance de l'intégrale (bornes croissantes), on en déduit que :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(b) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on déduit de la question précédente par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

5. On a :

$$\begin{array}{c|ccc} + & x^n & & \dfrac{1}{(1+x)^2} \\ & & \searrow & \\ - & nx^{n-1} & \longrightarrow & -\dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto -\frac{1}{1+x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. Par intégration par parties,

$$I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-nx^{n-1}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

6. (a) $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Pour $n = 0$, la relation s'écrit : $J_0 + J_1 = 1 \Leftrightarrow J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2)$.

7. Là encore, on réécrit la relation de récurrence vérifiée par la suite (J_n) sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J_k = \frac{1}{k} - J_{k-1}.$$

La relation obtenue à la question 5 permet alors de retrouver la valeur de I_n.

```
n = input ('donnez une valeur pour n: ')
J = np.log (2)
for k in range(1,n):
    J = 1/k - J
I = n*J-1/2
print(I)
```

8. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Initialisation</u> : On sait que $J_1 = 1 - \ln(2)$. D'autre part,

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = -\left(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1}\right) = -\ln(2) + 1.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Avec la relation obtenue à la question 6.(a), on a :

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \underset{\mathscr{P}(n)}{=} \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)
\end{aligned}$$

car $(-1)^{2n+1} = -1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

9. (a) La relation de la question 5 se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow J_n = \frac{I_{n+1} + 1/2}{n+1}$.
Comme $\lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$ d'après 4.(b), on a $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$.

(b) En utilisant la question 8 puis 9.(a), on a :

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^n J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$. Autrement dit, la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et a pour somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

(c) Le résultat de la question 5 se réécrit : $I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow nJ_n = I_{n+1} - J_n + \frac{1}{2}$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \lim_{n\to+\infty} I_{n+1} - J_n + \frac{1}{2} = 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nJ_n = 1$ et $J_n \sim \frac{1}{2n}$.

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(-1)^n u_n = J_n \Leftrightarrow u_n = (-1)^{-n} J_n = (-1)^n J_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est, à un facteur constant près, la série dont on a démontré la convergence à la question 9. Elle est donc convergente et sa somme vaut $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = -\frac{1}{2}\ln(2)$.

On ne peut cependant pas en déduire la nature de la série de terme général u_n, malgré l'équivalence obtenue à la question 10.(a). En effet, $(-1)^n$ change de signe d'un terme à l'autre, et le théorème de comparaison des séries n'est valable que pour des séries à termes positifs !

Impossible non plus de passer par l'absolue convergence, puisque $\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$ est le terme général d'une série divergente, et cela ne signifie pas pour autant que la série de départ ne peut pas converger.

11. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Partons du membre de droite :

$$\begin{aligned}
(k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k &= k(u_{k+1} - u_k) + u_{k+1} + (-1)^k \\
&= (k+1)\left(u_k - \frac{(-1)^{k+1-1}}{k+1}\right) - ku_k + (-1)^k \\
&= ku_k + u_k - (-1)^k - ku_k + (-1)^k = u_k.
\end{aligned}$$

(b) Par sommation de l'égalité précédente lorsque k varie de 1 à n, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \\
\Leftrightarrow\ & S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 + (-1)^1 \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\
\Leftrightarrow\ & S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).
\end{aligned}$$

où, à la deuxième étape, on a fait un télescopage pour la somme de gauche et on a reconnu une somme géométrique pour celle de droite avec $-1 \neq 0$.

(c) En réécrivant l'égalité précédente aux rangs $2n$ et $2n+1$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - 1,$$

puisque $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$.

Comme par ailleurs on a vu que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$, alors :

- $u_{2n+1} \sim \dfrac{-1}{2(2n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)u_{2n+1} \sim \dfrac{-1}{2}$,
- $u_{2n+2} \sim \dfrac{1}{2(2n+2)} \Leftrightarrow (2n+2)u_{2n+2} \sim \dfrac{1}{2}$.

Sachant que $u_1 = \ln(2) - 1$, on obtient :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - u_1 = -\frac{1}{2} - \ln(2) + 1 = \frac{1}{2} - \ln(2)$,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - u_1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2) + 1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

Avec le rappel de l'énoncé, on en déduit que (S_n) converge vers $\dfrac{1}{2} - \ln(2)$, c'est-à-dire que la série de terme général u_n est convergente et de somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

12. Il faut ici remarquer que le résultat de 9.(b) permet en fait d'écrire u_n sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

Le résultat de la question précédente s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} - \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ce qui correspond à la proposition c) de l'énoncé.

Exercice 3 (EDHEC 2014)

1. (a) On cherche une réduite triangulaire de $A - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16 \\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 21L_3 - (\lambda+23)L_2$$

où

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= 21 \times \left[-\lambda^2 + 10\lambda - 15\right] - (\lambda + 23) \times \left[-\lambda^2 + 11\lambda - 16\right] \\
&= 21 \times \left[-\lambda^2 + 10\lambda - 15\right] - \lambda \times \left[-\lambda^2 + 11\lambda - 16\right] - 23 \times \left[-\lambda^2 + 11\lambda - 16\right] \\
&= -21 \times 15 + 23 \times 16 + \lambda \left[21 \times 10 - +16 - 23 \times 11\right] + \lambda^2 \left[-21 - 11 + 23\right] + \lambda^3 \\
&= 53 - 27\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3
\end{aligned}$$

Cette réduite est triangulaire, $A - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients de la diagonale est non nul, c'est à dire :

$$\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0.$$

(b) f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$, et sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9).$$

On étudie alors le signe de ce polynôme de degré 2 : son discriminant puis ses racines valent :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 + 36 = 72 \quad , \quad x_1 = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{72}}{2}.$$

Il est donc strictement positifs sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$ et strictement négatif sur $]x_1; x_2[$ et nul en x_1 et x_2, et f est donc strictement croissante sur $]-\infty; x_1]$, strictement décroissante sur $[x_1; x_2]$ et strictement croissante sur $[x_1; +\infty[$.

Enfin en écrivant

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{9}{x} - \frac{27}{x^2} + \frac{53}{x^3}\right)$$

on obtient par opérations élémentaires sur les limites que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ce qui permet de donner le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

(c) On calcule sans difficultés :

$$f(0) = 53 \quad \text{et} \quad f(3) = 27 - 81 - 81 + 53 = -82.$$

Pour en déduire les signes de m et M, il faut placer ces points dans le tableau et donc comparer x_1 et x_2 avec 0 et 3. Comme $64 < 72 < 81$, on obtient que $8 < \sqrt{72} < 9$ et $-9 < -\sqrt{72} < -8$ puis :

$$-3 < 6 - \sqrt{72} < -2 \quad , \quad -\frac{3}{2} < x_1 < -1 \quad \text{et} \quad 14 < 6 + \sqrt{72} < 15 \quad , \quad 7 < x_2 < 7,5$$

Cela permet finalement d'assurer que :

$$x_1 < 0 < 3 < x_2.$$

On peut ainsi compléter le tableau :

x	$-\infty$		x_1		0		3		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	53	$\searrow$	-82	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit facilement avec le tableau que $m < -82 < 53 < M$ donc m est strictement négatif et M est strictement positif.

(d) f est strictement monotone et continue sur les intervalles $]-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$ et $[x_2; +\infty[$ donc réalise trois bijections :

- de $]-\infty; x_1]$ dans $]-\infty; M]$ avec $0 \in]-\infty; M[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_1 telle que : $\lambda_1 < x_1$.
- de $[x_1; x_2]$ dans $[m; M]$ avec $0 \in]m; M[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_2 telle que : $x_1 < \lambda_2 < x_2$.
- de $[x_2; +\infty[]$ dans $[m; +\infty[$ avec $0 \in [m; +\infty[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_3 telle que : $\lambda_3 > x_2$.

Finalement, $f(x) = 0$ admet exactement trois racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, qui sont exactement les valeurs propres de A d'après la question 1.(a).

Comme A admet 3 valeurs propres et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable et chacun des sous-espaces propres est de dimension 1. En remplissant D avec une base constituée de 3 vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3, on obtient bien :

$$A = PDP^{-1} \quad , \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit $E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

- $A \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times A$ donc $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \in E$ et $E \neq \emptyset$.
- Soient M_1 et M_2 appartenant à E (c'est-à-dire $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$) , montrons que $M_1 + M_2$ appartient à E :

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1 + M_2A = (M_1 + M_2)A.$$

- Soit M_3 appartenant à E (c'est-à-dire $AM_3 = M_3A$) et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que λM_3 appartient à E :

$$A(\lambda M_3) = \lambda AM_3 = \lambda M_3A = (\lambda M_3)A.$$

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, posons

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Alors N commute avec D si et seulement si :

$$DN = ND \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ \lambda_2 d & \lambda_2 e & \lambda_2 f \\ \lambda_3 g & \lambda_3 h & \lambda_3 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b & \lambda_3 c \\ \lambda_1 d & \lambda_2 e & \lambda_3 f \\ \lambda_1 g & \lambda_2 h & \lambda_3 i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b & (\lambda_1 - \lambda_3)c \\ (\lambda_2 - \lambda_1)d & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)f \\ (\lambda_3 - \lambda_1)g & (\lambda_3 - \lambda_2)h & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Comme les λ_i sont distincts, les 6 équations en dehors de la diagonale donnent :

$$b = c = d = f = g = h = 0$$

et donc finalement

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Les matrices qui commutent avec D sont bien exactement les matrices diagonales.

(c) On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in E & \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ & \Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1}M)P = P^{-1}(MPDP^{-1})P \\ & \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \end{aligned}$$

donc M est une matrice de E si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D.

(d) On peut alors chercher M :

$$M \in E \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On décompose la matrice centrale en sortant les coefficients :

$$M \in E \Leftrightarrow M = aP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + eP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + iP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Donc E est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces trois matrices.

(e) Puisque

$$E = Vect\left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \ , \ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \ , \ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right),$$

E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille ci-dessus en est génératrice. Montrons qu'elle est libre :

$$\begin{aligned} & aP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + bP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + cP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \Leftrightarrow P^{-1}P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}P = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Cette famille est donc libre et génératrice de E, c'est est une base et la dimension de E est égale au cardinal de cette famille : $\dim(E) = 3$.

(f) Soit P un polynôme annulateur de A. On sait que $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de A. P admet donc au moins trois racines (λ_1, λ_2, λ_3), il ne peut donc pas être de degré 0 (aucune racine), 1 (une racine), 2 (au plus deux racines) : soit il est nul, soit il est de degré supérieur ou égal à 3.

La famille (I, A, A^2) est composée de trois vecteurs qui sont bien dans E car :

$$AI = IA = A \quad , \quad AA = AA = A^2 \quad , \quad AA^2 = A^2A = A^3.$$

Montrons que cette famille est libre. Soient a, b, c tels que : $aI + bA + cA^2 = 0$.
Alors le polynôme $P(x) = a + bx + cx^2$ est annulateur de A et de degré inférieur ou égal à 2 : d'après ce qui précède il est forcément nul, donc $P(x) = 0$ pour tout x et finalement $a = b = c = 0$.
La famille (I, A, A^2) est donc une famille libre de vecteurs de E, et son cardinal est égal à la dimension de E : c'est donc une base de E.

Exercice 4 (EML 2018)

1. (a) Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : "Obtenir pile au i-ème lancer " et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} (X=0) & = & P_1 \cap P_2 \\ (X=1) & = & (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ (X=2) & = & (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4). \end{array}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$\begin{array}{rcl} P(X=0) & = & \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}, \\ P(X=1) & = & 2 \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{27}, \\ P(X=2) & = & 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{27}. \end{array}$$

(b) Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$P(X = n) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

2. (a) U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n. Autrement dit, $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc U suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((U = k) \cap (X = n)) = \sum_{n=k}^{+\infty} P((U = k) \cap (X = n)) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k) P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad \text{(d'après 2.b)}, \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.
En injectant le résultat trouvé en 1.b, il vient

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} = 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(U = k) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

(d) U admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\sum_{k \geq 0} kP(U = k) = \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k \geq 1} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{(1 - 1/3)^2} \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U - 1)$. On a

$$\sum_{k \geq 0} k(k-1) P(U = k) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{27} \sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U - 1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(U(U-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) P(U = k) = \frac{2}{27} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{(1 - 1/3)^3} = \frac{2}{27} \times \frac{2 \times 27}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U - 1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U - 1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que : $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$.

3. (a) V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V = n)$ est réalisé. Ainsi, $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, V prend ses valeurs entre 0 et n. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$P_{(X=n)}(V = k) = P_{(X=n)}(X - U = k) = P_{(X=n)}(U = n - k) = \frac{1}{n+1}.$$

   Ainsi, sachant $(X = n)$, $V \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$.

   (c) En reprenant les calculs effectués en 2.(c), on observe que la loi de V est la même que celle de U. Autrement dit, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

4. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. On a

$$(U = k) \cap (V = \ell) = (U = k) \cap (X - U = \ell) = (U = k) \cap (X = k + \ell).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P((U = k) \cap (V = \ell)) &= P((U = k) \cap (X = k + \ell)) \\ &= P_{(X=k+\ell)}(U = k) \times P(X = k + \ell) \\ &= \frac{1}{k + \ell + 1} \times (k + \ell + 1)\frac{4}{3^{k+\ell+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+\ell+2}} = \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{\ell+1}} = P(U = k)P(V = \ell). \end{aligned}$$

Ainsi, U et V sont indépendantes.

5. U et V étant indépendantes d'après 4, il vient $Cov(U, V) = 0$. Alors

$$Cov(X, U) = Cov(V + U, U) = Cov(V, U) + Cov(U, U) = 0 + V(U) = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $Cov(X, U) = \frac{3}{4}$.

6. (a) On propose la fonction suivante :

```python
def simule_X():
    nPile = 0
    nFace = 0
    while (nPile<2)
        if (rd.random()<2/3):
            nPile = nPile +1
        else:
            nFace = nFace +1
    return(nFace)
```

   (b) La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A.

   (c) On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi, le jeu est équilibré pour $p \approx 0,8$.

7. (a) Z compte le rang du premier succès ("obtenir Pile") dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile). Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
   On sait alors que $E(Z) = \frac{1}{p}$ et $V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

(b) Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z - 1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$E(Y) = E(Z-1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \text{ et } V(Y) = V(Z-1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(c) Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= P(Z-1 \geq n) = P(Z \geq n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z=k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} = pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} = pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = pq^n \times \frac{1}{1-q} = q^n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y \geq n) = (1-p)^n$.

8. (a) En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n) \cap (X \leq Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n) \cap (Y \geq n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(X \leq Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n)$.

(b) En injectant les résultats établis en 1.(b) et 7.(c) dans la formule trouvée en 8.(a), on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}q^n = \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1-q/3)^2} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 = \frac{4}{(3-q)^2} \\ &= \frac{4}{(2+p)^2}. \end{aligned}$$

(c) Le jeu est équilibré quand $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned} \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\ &\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\ &\Leftrightarrow p \in \{-2 - 2\sqrt{2},\ -2 + 2\sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Mais $-2 - 2\sqrt{2} < 0$ et $-2 + 2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi, le jeu est équitable pour $p = 2\sqrt{2} - 2$.

Remarque. On a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question 6.(c).
