

A rendre le Vendredi 20 Décembre

Exercice 1

1. $A = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 2(e^2 - e)$, $D = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}$, $E = 0$.

2. (a) $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$.

(b) $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+x} dx = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$.

3. • Pour A : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \ln(x)$ étant C^1 sur $[1, e]$, on a :

$$+ \begin{array}{l} \ln(x) \quad x \\ \searrow \\ \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{2} \end{array}$$

Donc $A = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

• Pour B : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ et $x \mapsto x^2$ étant C^1 sur $[0, 1]$, on a :

$$+ \begin{array}{l} x^2 \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \searrow \\ 2x \quad \rightarrow \quad \sqrt{1+x^2} \end{array}$$

Donc $B = \left[x^2 \sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = -\sqrt{2} + \frac{2}{3}$.

• Pour C : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3}$ et $x \mapsto x^3$ étant C^1 sur $[0, 1]$, on a :

$$+ \begin{array}{l} x^3 \quad x^2 e^{x^3} \\ \searrow \\ 3x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} e^{x^3} \end{array}$$

Donc $C = \left[\frac{x^3}{3} e^{x^3}\right]_0^1 - \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{e}{3} - \left[\frac{1}{3} e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{e}{3} - \frac{e}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

• Pour D : Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(x)$ étant C^1 sur $[\frac{1}{2}, 2]$, on a :

$$+ \begin{array}{l} \ln(x) \quad \frac{1}{x} \\ \searrow \\ \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \ln(x) \end{array}$$

Donc $D = \left[(\ln(x))^2\right]_{1/2}^2 - \int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = (\ln(2))^2 - (\ln(1/2))^2 - D = -D$.

Ainsi $2D = 0$ et $D = 0$.

4. • Pour A : On pose $t = e^x$. Alors :

- $t : 1 \rightarrow 2,$
- $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{t^2}{t + 1},$
- $dt = e^x dx$ donc $dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt.$

Par changement de variable ($x \mapsto e^x$ étant C^1 sur $[0, \ln(2)]$), on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} \times \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{t}{t+1} dt = \int_1^2 \frac{1+t-1}{1+t} dt = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= [t - \ln(1+t)]_1^2 = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

- Pour B : On pose $t = \ln(x)$. Alors :

- $t : 1 \rightarrow 2,$
- $\frac{\ln(x)}{x(1 + \ln(x))} = \frac{t}{e^t(1+t)}$ car $x = e^t,$
- $dt = \frac{1}{x} dx,$ donc $dx = x dt = e^t dt.$

Par changement de variable ($x \mapsto \ln(x)$ étant C^1 sur $[e, e^2]$), on obtient :

$$B = \int_1^2 \frac{t}{e^t(1+t)} e^t dt = \int_1^2 \frac{t}{1+t} dt = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right),$$

avec les mêmes calculs que pour l'intégrale A .

- Pour C : On pose $t = \frac{1}{x}$. Alors :

- $t : 2 \rightarrow \frac{1}{2},$
- $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1/t)}{1/t} = -t \ln(t),$
- $dt = -\frac{1}{x^2} dx,$ donc $dx = -x^2 dt = -\frac{1}{t^2} dt.$

Par changement de variable ($x \mapsto \frac{1}{x}$ étant C^1 sur $[1/2, 2]$), on obtient :

$$C = \int_2^{1/2} (-t \ln(t)) \times \left(-\frac{1}{t^2} dt\right) = \int_2^{1/2} \frac{\ln(t)}{t} = -\int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{t} = -C.$$

Donc $2C = 0$ et $C = 0$.

Exercice 2 (EDHEC 2020)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont bien définies sur $[0, 1]$ (car $1+x \geq 1 > 0$ si $0 \leq x \leq 1$) et continues sur cet intervalle, ce qui suffit à garantir la bonne définition des intégrales I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour I_0 :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Pour I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx \\ &= \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \ln(2) + \frac{1}{2} - \ln(1) - 1 = \ln(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)^2}{(1+x)^2} \\ &= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) La relation précédente s'écrit, lorsque $n = 0$:

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = 1 \Leftrightarrow I_2 = 1 - 2I_1 - I_0 = 1 - 2\ln(2) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

(c) Le script **Scilab** suivant calcule de proche en proche les intégrales I_k grâce à la relation :

$$\forall k \geq 2, \quad I_k = \frac{1}{k-1} - 2I_{k-1} - I_{k-2}.$$

La variable **a** contient l'avant-dernière intégrale calculée, **b** contient la dernière intégrale calculée et **aux** est une variable auxiliaire pour gérer les transferts de valeurs.

```

1 | n = input('donnez une valeur pour n : ')
2 | a = 1/2
3 | b = np.log(2)-1/2
4 | for k in range(2,n+1):
5 |     aux = a
6 |     a = b
7 |     b = 1/(k-1) - 2*b - aux
8 | print(b)

```

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq (1+x)^2 \leq 4 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n \quad \text{car } x^n \geq 0 \end{aligned}$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[0, 1]$. Par croissance de l'intégrale (bornes croissantes), on en déduit que :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(b) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on déduit de la question précédente par le théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5. On a :

$$\begin{array}{ccc} + & \left| \begin{array}{l} x^n \\ nx^{n-1} \end{array} \right. & \begin{array}{l} \frac{1}{(1+x)^2} \\ \longrightarrow \\ -\frac{1}{1+x} \end{array} \end{array}$$

Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto -\frac{1}{1+x}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Par intégration par parties,

$$I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-nx^{n-1}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

6. (a) $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Pour $n = 0$, la relation s'écrit : $J_0 + J_1 = 1 \Leftrightarrow J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2)$.

7. Là encore, on réécrit la relation de récurrence vérifiée par la suite (J_n) sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J_k = \frac{1}{k} - J_{k-1}.$$

La relation obtenue à la question 5 permet alors de retrouver la valeur de I_n .

```

1 | n = input ('donnez une valeur pour n: ')
2 | J = np.log (2)
3 | for k in range(1,n):
4 |     J = 1/k - J
5 | I = n*J-1/2
6 | print(I)

```

8. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$ ". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : On sait que $J_1 = 1 - \ln(2)$. D'autre part,

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = - \left(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1} \right) = -\ln(2) + 1.$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Avec la relation obtenue à la question 6.(a), on a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \end{aligned}$$

car $(-1)^{2n+1} = -1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9. (a) La relation de la question 5 se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow J_n = \frac{I_{n+1} + 1/2}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$ d'après 4.(b), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

(b) En utilisant la question 8 puis 9.(a), on a :

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^n J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$. Autrement dit, la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et a pour somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

(c) Le résultat de la question 5 se réécrit : $I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow nJ_n = I_{n+1} - J_n + \frac{1}{2}$.

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} - J_n + \frac{1}{2} = 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nJ_n = 1$ et $J_n \sim \frac{1}{2n}$.

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(-1)^n u_n = J_n \Leftrightarrow u_n = (-1)^{-n} J_n = (-1)^n J_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est, à un facteur constant près, la série dont on a démontré la convergence à la question 9. Elle est donc convergente et sa somme vaut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = -\frac{1}{2} \ln(2).$$

On ne peut cependant pas en déduire la nature de la série de terme général u_n , malgré l'équivalence obtenue à la question 10.(a). En effet, $(-1)^n$ change de signe d'un terme à l'autre, et le théorème de comparaison des séries n'est valable que pour des séries à termes positifs !

Impossible non plus de passer par l'absolue convergence, puisque $\left| \frac{(-1)^n}{2n} \right| = \frac{1}{2n}$ est le terme général d'une série divergente, et cela ne signifie pas pour autant que la série de départ ne peut pas converger.

11. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Partons du membre de droite :

$$\begin{aligned} (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k &= k(u_{k+1} - u_k) + u_{k+1} + (-1)^k \\ &= (k+1) \left(u_k - \frac{(-1)^{k+1-1}}{k+1} \right) - ku_k + (-1)^k \\ &= ku_k + u_k - (-1)^k - ku_k + (-1)^k = u_k. \end{aligned}$$

(b) Par sommation de l'égalité précédente lorsque k varie de 1 à n , on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \\ \Leftrightarrow S_n &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + (-1)^1 \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} \\ \Leftrightarrow S_n &= (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

où, à la deuxième étape, on a fait un télescopage pour la somme de gauche et on a reconnu une somme géométrique pour celle de droite avec $-1 \neq 0$.

(c) En réécrivant l'égalité précédente aux rangs $2n$ et $2n + 1$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} = (2n + 1)u_{2n+1} - u_1 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = (2n + 2)u_{2n+2} - u_1 - 1,$$

puisque $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$.

Comme par ailleurs on a vu que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$, alors :

- $u_{2n+1} \sim \frac{-1}{2(2n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)u_{2n+1} \sim \frac{-1}{2},$
- $u_{2n+2} \sim \frac{1}{2(2n+2)} \Leftrightarrow (2n+2)u_{2n+2} \sim \frac{1}{2}.$

Sachant que $u_1 = \ln(2) - 1$, on obtient :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - u_1 = -\frac{1}{2} - \ln(2) + 1 = \frac{1}{2} - \ln(2),$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - u_1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2) + 1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2).$

Avec le rappel de l'énoncé, on en déduit que (S_n) converge vers $\frac{1}{2} - \ln(2)$, c'est-à-dire que

la série de terme général u_n est convergente et de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

12. Il faut ici remarquer que le résultat de 9.(b) permet en fait d'écrire u_n sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

Le résultat de la question précédente s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} - \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ce qui correspond à la proposition c) de l'énoncé.

Exercice 3 (EDHEC 2014)

1. (a) On cherche une réduite triangulaire de $A - \lambda I$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 7 - \lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1 - \lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 - \lambda \\ 6 & -1 - \lambda & 2 \\ 7 - \lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 - \lambda \\ 0 & -2 - \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda + 23 & -\lambda^2 + 10\lambda - 15 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 6L_3 - (7 - \lambda)L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 - \lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2 + 11\lambda - 16 \\ 0 & \lambda + 23 & -\lambda^2 + 10\lambda - 15 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 - \lambda \\ 0 & 21 & -\lambda^2 + 11\lambda - 16 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 21L_3 - (\lambda + 23)L_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= 21 \times [-\lambda^2 + 10\lambda - 15] - (\lambda + 23) \times [-\lambda^2 + 11\lambda - 16] \\
 &= 21 \times [-\lambda^2 + 10\lambda - 15] - \lambda \times [-\lambda^2 + 11\lambda - 16] - 23 \times [-\lambda^2 + 11\lambda - 16] \\
 &= -21 \times 15 + 23 \times 16 + \lambda[21 \times 10 - 16 - 23 \times 11] + \lambda^2[-21 - 11 + 23] + \lambda^3 \\
 &= 53 - 27\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3
 \end{aligned}$$

Cette réduite est triangulaire, $A - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients de la diagonale est non nul, c'est à dire :

$$\lambda \in Sp(A) \iff \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0.$$

(b) f est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^∞ , et sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9).$$

On étudie alors le signe de ce polynôme de degré 2 : son discriminant puis ses racines valent :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 + 36 = 72 \quad , \quad x_1 = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{72}}{2}.$$

Il est donc strictement positif sur $] - \infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$ et strictement négatif sur $]x_1; x_2[$ et nul en x_1 et x_2 , et f est donc strictement croissante sur $] - \infty; x_1]$, strictement décroissante sur $]x_1; x_2]$ et strictement croissante sur $]x_2; +\infty[$.

Enfin en écrivant

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{9}{x} - \frac{27}{x^2} + \frac{53}{x^3} \right)$$

on obtient par opérations élémentaires sur les limites que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ce qui permet de donner le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	M	m	$+\infty$

(c) On calcule sans difficultés :

$$f(0) = 53 \quad \text{et} \quad f(3) = 27 - 81 - 81 + 53 = -82.$$

Pour en déduire les signes de m et M , il faut placer ces points dans le tableau et donc comparer x_1 et x_2 avec 0 et 3. Comme $64 < 72 < 81$, on obtient que $8 < \sqrt{72} < 9$ et $-9 < -\sqrt{72} < -8$ puis :

$$-3 < 6 - \sqrt{72} < -2 \quad , \quad -\frac{3}{2} < x_1 < -1 \quad \text{et} \quad 14 < 6 + \sqrt{72} < 15 \quad , \quad 7 < x_2 < 7,5$$

Cela permet finalement d'assurer que :

$$x_1 < 0 < 3 < x_2.$$

On peut ainsi compléter le tableau :

x	$-\infty$	x_1	0	3	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	M	53	-82	m	$+\infty$

On en déduit facilement avec le tableau que $m < -82 < 53 < M$ donc m est strictement négatif et M est strictement positif.

(d) f est strictement monotone et continue sur les intervalles $] - \infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$ et $[x_2; +\infty[$ donc réalise trois bijections :

- de $] - \infty; x_1]$ dans $] - \infty; M]$ avec $0 \in] - \infty; M[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_1 telle que : $\lambda_1 < x_1$.
- de $[x_1; x_2]$ dans $[m; M]$ avec $0 \in]m; M[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_2 telle que : $x_1 < \lambda_2 < x_2$.
- de $[x_2; +\infty[$ dans $[m; +\infty[$ avec $0 \in [m; +\infty[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_3 telle que : $\lambda_3 > x_2$.

Finalement, $f(x) = 0$ admet exactement trois racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, qui sont exactement les valeurs propres de A d'après la question 1.(a).

Comme A admet 3 valeurs propres et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable et chacun des sous-espaces propres est de dimension 1. En remplissant D avec une base constituée de 3 vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 , on obtient bien :

$$A = PDP^{-1} \quad , \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

- $A \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times A$ donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in E$ et $E \neq \emptyset$.
- Soient M_1 et M_2 appartenant à E (c'est-à-dire $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$) , montrons que $M_1 + M_2$ appartient à E :

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A.$$

- Soit M_3 appartenant à E (c'est-à-dire $AM_3 = M_3A$) et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que λM_3 appartient à E :

$$A(\lambda M_3) = \lambda AM_3 = \lambda M_3A = (\lambda M_3)A.$$

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Alors N commute avec D si et seulement si :

$$\begin{aligned} DN = ND &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ \lambda_2 d & \lambda_2 e & \lambda_2 f \\ \lambda_3 g & \lambda_3 h & \lambda_3 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b & \lambda_3 c \\ \lambda_1 d & \lambda_2 e & \lambda_3 f \\ \lambda_1 g & \lambda_2 h & \lambda_3 i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b & (\lambda_1 - \lambda_3)c \\ (\lambda_2 - \lambda_1)d & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)f \\ (\lambda_3 - \lambda_1)g & (\lambda_3 - \lambda_2)h & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Comme les λ_i sont distincts, les 6 équations en dehors de la diagonale donnent :

$$b = c = d = f = g = h = 0$$

et donc finalement

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Les matrices qui commutent avec D sont bien exactement les matrices diagonales.

(c) On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1}M)P = P^{-1}(MPDP^{-1})P \\ &\Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \end{aligned}$$

donc M est une matrice de E si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D .

(d) On peut alors chercher M :

$$M \in E \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On décompose la matrice centrale en sortant les coefficients :

$$M \in E \Leftrightarrow M = aP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + eP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + iP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Donc E est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces trois matrices.

(e) Puisque

$$E = Vect \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right),$$

E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille ci-dessus en est génératrice. Montrons qu'elle est libre :

$$\begin{aligned} &aP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + bP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + cP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \\ \Leftrightarrow &P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \Leftrightarrow P^{-1}P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}P = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Cette famille est donc libre et génératrice de E , c'est est une base et la dimension de E est égale au cardinal de cette famille : $\dim(E) = 3$.

(f) Soit P un polynôme annulateur de A . On sait que $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de A . P admet donc au moins trois racines ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), il ne peut donc pas être de degré 0 (aucune racine), 1 (une racine), 2 (au plus deux racines) : soit il est nul, soit il est de degré supérieur ou égal à 3.

La famille (I, A, A^2) est composée de trois vecteurs qui sont bien dans E car :

$$AI = IA = A \quad , \quad AA = AA = A^2 \quad , \quad AA^2 = A^2A = A^3.$$

Montrons que cette famille est libre. Soient a, b, c tels que : $aI + bA + cA^2 = 0$.

Alors le polynôme $P(x) = a + bx + cx^2$ est annulateur de A et de degré inférieur ou égal à 2 : d'après ce qui précède il est forcément nul, donc $P(x) = 0$ pour tout x et finalement $a = b = c = 0$.

La famille (I, A, A^2) est donc une famille libre de vecteurs de E , et son cardinal est égal à la dimension de E : c'est donc une base de E .

Exercice 4 (EML 2018)

1. (a) Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : "Obtenir pile au i -ème lancer " et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$\begin{aligned} (X = 0) &= P_1 \cap P_2 \\ (X = 1) &= (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ (X = 2) &= (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4). \end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n + 2)$ -ème lancer et le premier à l'un des $(n + 1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \\ P(X = 1) &= 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}, \\ P(X = 2) &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

- (b) Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n + 2)$ -ème lancer, le premier à l'un des $(n + 1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j \right) \right) \right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$P(X = n) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) \times \frac{2}{3} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

2. (a) U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n , il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n . Autrement dit, $U(\Omega) = \mathbb{N}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n + 1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc U suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((U = k) \cap (X = n)) = \sum_{n=k}^{+\infty} P((U = k) \cap (X = n)) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k)P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad (\text{d'après 2.b}), \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.

En injectant le résultat trouvé en 1.b, il vient

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} = 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-1/3} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

- (d) U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\sum_{k \geq 0} kP(U = k) = \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k \geq 1} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{(1-1/3)^2} \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U-1)$. On a

$$\sum_{k \geq 0} k(k-1)P(U = k) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{27} \sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(U(U-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(U = k) = \frac{2}{27} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{(1-1/3)^3} = \frac{2}{27} \times \frac{2 \times 27}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que : $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

3. (a) V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas ($V = n$) est réalisé. Ainsi, $V(\Omega) = \mathbb{N}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant ($X = n$), V prend ses valeurs entre 0 et n . Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$P_{(X=n)}(V = k) = P_{(X=n)}(X - U = k) = P_{(X=n)}(U = n - k) = \frac{1}{n + 1}.$$

Ainsi, sachant ($X = n$), $V \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

- (c) En reprenant les calculs effectués en 2.(c), on observe que la loi de V est la même que celle de U . Autrement dit, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

4. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. On a

$$(U = k) \cap (V = l) = (U = k) \cap (X - U = l) = (U = k) \cap (X = k + l).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P((U = k) \cap (V = l)) &= P((U = k) \cap (X = k + l)) \\ &= P_{(X=k+l)}(U = k) \times P(X = k + l) \\ &= \frac{1}{k + l + 1} \times (k + l + 1) \frac{4}{3^{k+l+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+l+2}} = \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{l+1}} = P(U = k)P(V = l). \end{aligned}$$

Ainsi, U et V sont indépendantes.

5. U et V étant indépendantes d'après 4, il vient $Cov(U, V) = 0$. Alors

$$Cov(X, U) = Cov(V + U, U) = Cov(V, U) + Cov(U, U) = 0 + V(U) = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $Cov(X, U) = \frac{3}{4}$.

6. (a) On propose la fonction suivante :

```

1 | def simule_X():
2 |     nPile = 0
3 |     nFace = 0
4 |     while (nPile < 2)
5 |         if (rd.random() < 2/3):
6 |             nPile = nPile + 1
7 |         else:
8 |             nFace = nFace + 1
9 |     return(nFace)

```

- (b) La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A .
- (c) On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi, le jeu est équilibré pour $p \approx 0,8$.
7. (a) Z compte le rang du premier succès ("obtenir Pile") dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p , la probabilité de faire Pile). Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

On sait alors que $E(Z) = \frac{1}{p}$ et $V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

- (b) Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z - 1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \text{ et } V(Y) = V(Z - 1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- (c) Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) = P(Z \geq n + 1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} = pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} = pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = pq^n \times \frac{1}{1-q} = q^n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y \geq n) = (1 - p)^n$.

8. (a) En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (X \leq Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y \geq n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}). \end{aligned}$$

Ainsi, $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n)$.

- (b) En injectant les résultats établis en 1.(b) et 7.(c) dans la formule trouvée en 8.(a), on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} q^n = \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{q}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1 - q/3)^2} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 = \frac{4}{(3-q)^2} \\ &= \frac{4}{(2+p)^2}. \end{aligned}$$

- (c) Le jeu est équilibré quand $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned} \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\ &\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\ &\Leftrightarrow p \in \{-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Mais $-2 - 2\sqrt{2} < 0$ et $-2 + 2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi, le jeu est équitale pour $p = 2\sqrt{2} - 2$.

Remarque. On a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question 6.(c).