Correction - DS 1

Devoir surveillé du Samedi 16 Septembre

Exercice 1 (EML 2023)

1. (a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = -e^{-x}\frac{x+1}{x^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. On obtient le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien défini et $u_n > 0$".

Ini. $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $u_n \in \mathscr{D}_f$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.
De plus, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ d'après la question précédente. Donc $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2. (a) Voici le programme complété :

```python
def fonc_1(a):
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while u <= a :
    u = exp(-u)/u
    n = n+1
  return n
```

(b) On en déduit que $u_6 > 10^6$ et $u_5 \leq 10^{-6}$. On conjecture alors que :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Voici le programme demandé :

```python
def fonc_3(n):
  from numpy import exp
  u = 1
  for k in range(n):
    u = exp(-u)/u
  return u
```

3. (a) La fonction g est définie, continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$1 \searrow -\infty$

Ainsi, g est continue et strictement décroissante de $[0,+\infty[$ dans $]-\infty,1]$. Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $]-\infty,1]$.

(b) Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont exactement les solutions de l'équation $g(x) = 0$.
Or $0 \in]-\infty,1]$ donc 0 admet un unique antécédent par g dans $]0,+\infty[$, que l'on note α. Puisque $g(0) = 1$, on en déduit que $\alpha \neq 0$. D'où $\alpha \in]0,+\infty[$.

(c) $g(\alpha) = 0$ par définition.
$g(1) = e^{-1} - 1^2 = \dfrac{1-e}{e} < 0$.
$g(1/e) = e^{-1/e} - \left(\dfrac{1}{e}\right)^2 = \dfrac{1}{1/e} - \dfrac{1}{e^2} = \dfrac{e^2 - e^{1/e}}{e^{1/e}e^2} > 0$ car $2 > \dfrac{1}{e}$ et que la fonction exponentielle est croissante.
Finalement, par stricte décroissance de g sur $[0,+\infty[$, on en déduit que :

$$g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) > g(1) \Rightarrow \frac{1}{e} < \alpha < 1.$$

4. (a) $u_0 = 1$, donc $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{e}$ donc

$$u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{1-1/e} = \exp\left(\frac{e-1}{e}\right).$$

Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{e-1}{e} > 0$, donc $u_2 > e^0 = 1 = u_0$.

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$u_{2n+2} \geq u_{2n}$".

Ini. $u_2 > u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_{2n+2} \geq u_{2n} > 0$. Comme f est décroissante sur $]0,+\infty[$, en composant deux fois par f, on obtient successivement :

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1}$$

puis

$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$.

Ainsi, $u_{2(n+1)} \geq u_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n} > 0$ d'après la question précédente.
Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$, en composant par f, on obtient :

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1}.$$

Ainsi, $u_{2(n+1)+1} \leq u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
D'après la question 1.(b), $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Donc, d'après le théorème des suites monotones, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.

5. (a) Pour tout $x > 0$,

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{\exp\left(-\dfrac{e^{-x}}{x}\right)}{\dfrac{e^{-x}}{x}} = xe^x \exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right) = x\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right).$$

(b) D'après la question précédente, $h(x) = x\exp\left(x - \dfrac{e^{-x}}{x}\right)$ pour tout $x > 0$.
h est donc continue sur $]0, +\infty[$ par opération sur des fonctions continues.
En 0, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x - \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(x - \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = 0$. Par produit des limites, on a donc :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0).$$

Donc h est continue sur $[0, +\infty[$.

(c) $h(0) = 0$ donc 0 est solution de l'équation $h(x) = x$ sur $[0, +\infty[$. Il reste à résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
h(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad x\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = x \\
&\Leftrightarrow \quad \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1 \qquad (\text{car } x \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{e^{-x}}{x} = 0 \qquad (\text{en composant par ln}) \\
&\Leftrightarrow \quad x = f(x) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \alpha \qquad (\text{d'après la question 3.(b)})
\end{aligned}$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1})$. Comme la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$ (question 4.(c)), on en déduit par passage à la limite (h étant continue sur $[0, +\infty[$) :

$$\ell = h(\ell) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = \alpha \quad (\text{question 5.(c)}).$$

Or, comme $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n+1} \leq u_1 = \frac{1}{e}.$$

Par passage à la limite, $\ell \leq \dfrac{1}{e}$. Or (question 3.(c)), $\dfrac{1}{e} < \alpha$ donc $\ell < \alpha$. On a donc nécessairement $\ell = 0$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème des suites monotones, soit $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et converge vers une limite finie ℓ', soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons qu'elle converge vers une limite finie ℓ'. Avec le même raisonnement qu'à la question 5.(d), $\ell' = h(\ell')$ et donc $\ell' = 0$ ou α.

Or $u_0 = 1$ et par croissance de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, il vient $\ell' \geq 1 > \alpha > 0$ (question 3.(c)).

On obtient une contradiction donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Remarque : Comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, la suite (u_n) diverge également (mais pas vers $+\infty$ car ses termes impairs convergent).

Exercice 2 (EDHEC 1997)

1. (a) f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$.

   Limite en $+\infty$: $f_n(x) = x\left(1 - n\dfrac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissance comparée.

   Limite en 0 : $f_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ car $n > 0$.

   On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f_n(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Remarquons tout d'abord que $n - n\ln(n) = n(1-\ln(n)) < 0$ car $n \geq 3 > e$ donc $\ln(n) > 1$ par croissance de la fonction logarithme.

   On a alors deux cas à traiter :

   - Sur $]0,n[$: f_n est continue et strictement décroissante sur $]0,n[$ donc bijective (d'après le théorème de la bijection) de $]0,n[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to n} f_n, \lim\limits_{x\to 0} f_n\right[=]n - n\ln(n), +\infty[$. Comme $n - n\ln(n) < 0$, $0 \in]n - n\ln(n), +\infty[$ et admet donc un unique antécédent $u_n \in]0,n[$ par f_n.
   - Sur $]n,+\infty[$: f_n est continue et strictement croissante sur $]n,+\infty[$ donc bijective (d'après le théorème de la bijection) de $]n,+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to n} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[=]n - n\ln(n), +\infty[$. Comme $n - n\ln(n) < 0$, $0 \in]n - n\ln(n), +\infty[$ et admet donc un unique antécédent $v_n \in]n,+\infty[$ par f_n.

   Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet bien exactement deux solutions u_n et v_n sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $0 < u_n < n < v_n$ (il n'y a pas d'autres solutions car $f_n(n) = n - n\ln(n) \neq 0$).

2. (a) Soit un entier $n \geq 3$. On a $f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ (par définition) et $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ car $n \geq 3 > e$.

   Donc $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$ et comme f_n est strictement décroissante sur $]0,n]$, on a finalement $1 < u_n < e$.

   (b) $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition,

   $$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \text{ donc } u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) = 0.$$

   Finalement, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.

   $f_n(u_n) = 0$ (par définition) et $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) \geq 0$ car $u_{n+1} \geq 1$ (question 2.(a)). Donc $f_n(u_n) \leq f_n(u_{n+1})$ et comme f_n est strictement décroissante sur $]0,n]$, on a $u_n \geq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est décroissante.

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc convergente vers une limite $\ell \geq 1$ (d'après le théorème des suites monotones).

Par définition, $f_n(u_n) = 0 = u_n - n\ln(u_n)$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$. Alors, en partant de l'inégalité de la question 2.(a) :

$$1 < u_n < e \underset{n>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{n} < \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \ln(u_n) < \frac{e}{n}.$$

Donc par encadrement $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$ (par composition avec la fonction exp qui est continue sur $\mathbb{R}$).

(d) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc :

$$\frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = \frac{\ln(1 + u_n - 1)}{u_n - 1} \sim \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$.

On calcule la limite du quotient de $u_n - 1$ et $\dfrac{1}{n}$ en faisant apparaître le quotient précédent :

$$\frac{u_n - 1}{1/n} = n(u_n - 1) = \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} \times n\ln(u_n).$$

Comme $u_n - n\ln(u_n) = 0$ (par définition), on a :

$$\frac{u_n - 1}{1/n} = \underbrace{\frac{u_n - 1}{\ln(u_n)}}_{\to 1} \times \underbrace{u_n}_{\to 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.

3. (a) Par passage à la limite dans l'inégalité $n < v_n$, on a : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) On a :

$$f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln(n) - n[\ln(n) + \ln(\ln(n))] = -n\ln(\ln(n))$$

Comme $n > e$, $\ln(n) > 1$ et $\ln(\ln(n)) > 0$ (car ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). On a donc $f_n(n\ln(n)) < 0 = f_n(v_n)$. Comme f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$ et que $n\ln(n)$ et v_n en sont éléments (comme $\ln(n) \geq 1$, $n\ln(n) \geq n$), on en déduit que $n\ln(n) < v_n$.

(c) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	

$g(2) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2)) > 0$ car $2 < e$ donc $\ln(2) < 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) > 0$ et $n > 2\ln(n)$.

(d) On a alors :

$$\begin{aligned} f_n(2n\ln(n)) &= 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) \\ &= n[2\ln(n) - \ln(n) - \ln(2) - \ln(\ln(n))] \\ &= n[\ln(n) - \ln(2\ln(n))]. \end{aligned}$$

Comme $n > 2\ln(n)$ et que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$ et $f_n(2n\ln(n)) > 0$.

Donc $f_n(v_n) = 0 < f_n(2n\ln(n))$. Comme v_n et $2n\ln(n)$ appartiennent à $[n, +\infty[$ et que f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $v_n < 2n\ln(n)$.

(e) Avec les questions 3.(b) et 3.(d), on a pour tout entier $n \geq 3$:

$$n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n).$$

Par croissance stricte de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\ln(n\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(2n.\ln(n))$$

donc

$$\ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2) + \ln(\ln(n))$$

et en divisant par $\ln(n) > 0$ pour faire apparaître le quotient :

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}.$$

En posant $X = \ln(n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissance comparée.

Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$ et $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.

Exercice 3 (EML 2007)

1. A est une matrice symétrique, donc diagonalisable.

2. (a) $AX_1 = X_1$ et $X_1 \neq 0$ donc X_1 vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
$AX_2 = -\frac{1}{2}X_2$ et $X_2 \neq 0$ donc X_2 vecteur propre de A associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.
$AX_3 = -\frac{1}{2}X_3$ et $X_3 \neq 0$ donc X_3 vecteur propre de A associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.

(b) (X_1) est une famille libre de $E_1(A)$ (un vecteur non nul) et (X_2, X_3) est une famille libre de $E_{-1/2}(A)$ (deux vecteurs non colinéaires).
Par concaténation (valeurs propres distinctes), (X_1, X_2, X_3) est une famille libre. Comme $Card((X_1, X_2, X_3)) = 3 = dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On retrouve donc que A est diagonalisable et on a $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Après avoir fait le pivot (calculs laissés au lecteur), on obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Notons $\mathscr{P}(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$".

Ini. $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n \underset{\mathscr{P}(n)}{=} PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(b) Il reste à faire le produit PD^nP^{-1} pour obtenir A^n :

$$\begin{aligned}
A^n &= P\ D^n\ P^{-1} \\
&= \frac{1}{3}P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. (a) Notons $\mathscr{P}(n)$: "$X_n = A^nX_0$".

Ini. $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$A^{n+1}X_0 = A \times A^nX_0 \underset{\mathscr{P}(n)}{=} AX_n = X_{n+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

(b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n u_0\\ \left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0\\ \left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n w_0\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n u_0\\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0\\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n w_0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc par identification :

$$\begin{cases}
u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\\
v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\\
w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n
\end{cases}$$

(c) Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et u_n, v_n et w_n tendent vers $\frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$.
Donc $u = v = w = \frac{1}{3}$.

5. (a) On a

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 + \left[\left(v_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 + \left[\left(v_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Et comme u_0, v_0, w_0 sont trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Alors $0 \leq u_0 = 1 - (v_0 + w_0) \leq 1$. Donc

$$\frac{-2}{3} \leq \frac{-1}{3} \leq u_0 - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}$$

et

$$\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{9}$$

De même pour $\left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2$ et $\left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2$. Donc :

$$\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{3} \leq 4.$$

Finalement, $d_n^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 4 = \frac{1}{2^{2n-2}}$ et, par croissance de la fonction racine carrée :

$$d_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(b) Comme $2^7 = 128$, on a pour $n = 8$ que $d_8 \leq \frac{1}{128} \leq 10^{-2}$.

Exercice 4 (EML 2009)

1. Les colonnes de A sont liées (première colonne nulle) donc A n'est pas inversible.

2. A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux 0, 1 et 4.
On détermine les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

donc $E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} -x + y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = y \\ z = 0 \end{array}\right.$$

donc $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4x+y+3z=0 \\ -3y+3z=0 \\ 0=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=z \\ y=z \end{array} \right.$$

donc $E_4(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

3. Par concaténation de familles libres (trois familles de un vecteur non nul) de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Comme son cardinal est $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.
   On a alors $A = P\ D\ P^{-1}$ avec
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Après calcul (par le pivot de Gauss), on a :
   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Avec $A = P\ D\ P^{-1}$ et $M = P\ N\ P^{-1}$, on a :
   $$M^2 = A \Longleftrightarrow P\ N^2\ P^{-1} = P\ D\ P^{-1} \Longleftrightarrow N^2 = D$$
   (en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P à la dernière équivalence).

5. Si $N^2 = D$, alors :
   $$N\ D = N\ N^2 = N^3 = N^2\ N = D\ N.$$

6. En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a :
   $$N\ D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$$
   et
   $$D\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$
   Si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$ (question précédente) donc :
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} 0=0 & b=0 & 4c=0 \\ 0=d & e=e & 4f=f \\ 0=4g & h=4h & 4i=4i \end{array} \right. \Leftrightarrow b=c=d=f=g=h=0.$$
   Ainsi, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.

7. Soit $N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$. Donc

$$N^2 = D \iff x^2 = 0,\ y^2 = 1,\ z^2 = 4 \iff x = 0,\ y = \pm 1 \text{ et } z = \pm 1.$$

Les 4 solutions sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. On a avec les questions précédentes :

$$M^2 = A \underset{(Q4)}{\iff} N^2 = D \underset{(Q5 \text{ à } Q7)}{\implies} N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La seule solution de $N^2 = D$ de valeurs propres positives est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc la seule solution de $M^2 = A$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie réciproquement que cette matrice B est bien solution de l'équation $M^2 = A$.

9. Un polynôme de degré 2 s'écrit : $Q = aX^2 + bx + c$ avec $a,\ b$ et c réels, $a \neq 0$.

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2. \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \quad (L_3 - 4L_2 \to L_3) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 12a = -2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 7/6 \\ a = -1/6 \end{cases}$$

Ainsi, il existe bien un unique polynôme de degré 2 vérifiant les conditions de l'énoncé qui est :

$$Q = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X.$$

10. On peut faire le calcul et vérifier qu'on a bien l'égalité $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$.

Si on veut utiliser la question précédente, on fait le calcul d'abord sur la matrice D :

$$-\frac{1}{6}D^2+\frac{7}{6}D=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4^2\end{pmatrix}+\frac{7}{6}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q(0)&0&0\\0&Q(1)&0\\0&0&Q(4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Donc

$$-\frac{1}{6}A^2+\frac{7}{6}A=P\left(-\frac{1}{6}D^2+\frac{7}{6}D\right)P^{-1}=P\ N\ P^{-1}=B.$$

11. Pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

   $\Rightarrow$ Si $A\ F=F\ A$ alors $A^2F=AFA=FAA=FA^2$ et donc

   $$\left(-\frac{1}{6}A^2+\frac{7}{6}A\right)F=F\left(-\frac{1}{6}A^2+\frac{7}{6}A\right)$$

   d'où $B\ F=F\ B$.

   $\Leftarrow$ Réciproquement, si $B\ F=F\ B$ alors $B^2F=BFB=FBB=FB^2$ et comme $B^2=A$, on a donc $A\ F=F\ A$.

   On a donc bien l'équivalence : $A\ F=F\iff B\ F=F\ B$.
