Correction - DS 11 (B)

Devoir surveillé du Samedi 16 Mars

Sujet HEC 2017

Exercice 1

1. (a) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

   (b) Par conséquent, le polynôme $X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ annule la matrice A. Le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme :

   $$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, -1\}.$$

   On vérifie facilement que chacun de ces deux réels est valeur propre. En effet, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

   $$AX = X \Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad AX = -X \Leftrightarrow x = -y.$$

   Donc $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Comme $E_1(A) \neq \{0\}$ et $E_{-1}(A) \neq \{0\}$, 1 et -1 sont bien valeurs propres et donc :

   $$\mathrm{Sp}(A) = \{1, -1\}.$$

   (c) La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) et de cardinal $2 = \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. La matrice A est donc diagonalisable.

2. (a) Les instructions `Python` montrent que, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible (sinon, on aurait une erreur en retour !) et vérifie :

   $$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Par conséquent, B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{1, -1\}$.

   (b) On obtient une base de chacun des sous-espaces propres de B en lisant les colonnes de P *(attention à l'ordre des valeurs propres dans le retour* `Python`*)* :

   $$\mathrm{E}_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad \mathrm{E}_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

3. (a) Le nombre de coefficients d'une matrice de $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ est n^2, chacun pouvant prendre deux valeurs. Il y a donc 2^{n^2} matrices dans $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Les matrices souhaitées sont exactement celles où chaque ligne est l'une des n lignes suivantes :

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (un "1" sur chaque ligne et des "0" ailleurs) avec les lignes deux-à-deux distinctes (de sorte que chaque colonne comporte exactement un "1"). En raisonnant ligne par ligne :

   - pour la première ligne de la matrice, on choisit l'une des n lignes ci-dessus ;

- pour la deuxième ligne de la matrice, on choisit l'une des n lignes ci-dessus sauf celle choisie pour la première ligne ($n-1$ possibilités) ;
- pour la troisième ligne de la matrice, on choisit l'une des n lignes ci-dessus sauf les deux lignes déjà choisies précédemment ($n-2$ possibilités) ;
- etc.
- il ne reste qu'une possibilité pour la dernière ligne.

Les matrices souhaitées sont donc au nombre de $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$.

4. (a) Montrons l'inclusion $\mathrm{Im}(M - I_n) \subset \mathrm{Ker}(M + I_n)$.
Soit $Y \in \mathrm{Im}(M - I_n)$, c'est-à-dire :

$$\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y = (M - I_n)X = MX - X.$$

On a alors (comme $M^2 = I_n$) :

$$\begin{aligned}(M + I_n)Y &= MY + Y = M(MX - X) + (MX - X) = M^2X - MX + MX - X \\ &= M^2X - X = X - X = 0.\end{aligned}$$

Donc $Y \in \mathrm{Ker}(M + I_n)$. On a ainsi prouvé l'inclusion demandée.

(b) L'inclusion prouvée ci-dessus donne l'inégalité entre les dimensions :

$$\dim(\mathrm{Im}(M - I_n)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(M + I_n)) = p.$$

Le théorème du rang appliqué à la matrice $M - I_n$ donne par ailleurs :

$$q + \dim(\mathrm{Im}(M - I_n)) = n.$$

On en déduit l'inégalité :

$$n \leq p + q.$$

(c) Comme p et q sont supposés non nuls, 1 et -1 sont valeurs propres de M (de sous-espaces propres respectifs F et G). Ce sont les seuls valeurs propres car $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de M dont les racines sont -1 et 1.
Donc $Sp(M) = \{-1, 1\}$ et donc, par concaténation de familles libres de sous-espaces propres dont les valeurs propres sont distinctes, $(U_1, U_2, \ldots, U_p, V_1, V_2, \ldots, V_q)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En particulier, $p + q \leq n$.
Avec l'inégalité de la question précédente, $p+q = n$ donc $(U_1, U_2, \ldots, U_p, V_1, V_2, \ldots, V_q)$ est de cardinal $n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Comme elle est libre, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(d) Puisque $V_1 \in G$ et $U_1 \in F$:

$$M(V_1 - U_1) = MV_1 - MU_1 = V_1 - (-U_1) = V_1 + U_1.$$

De même,

$$M(V_1 + U_1) = V_1 - U_1.$$

(e) Ce qui est fait en 4.(d) reste en fait valable en remplaçant les indices "1" par un entier $i \in [\![1, p]\!]$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad M(V_i - U_i) = V_i + U_i \quad \text{et} \quad M(V_i + U_i) = V_i - U_i.$$

Considérons la famille :

$$\mathscr{B} = (V_1 - U_1, V_1 + U_1, V_2 - U_2, V_2 + U_2, \ldots, V_p - U_p, V_p + U_p, V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_q).$$

Elle contient $2p + (q - p) = p + q = n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs.

Montrons qu'elle est libre. Si $\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_p, \alpha'_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_q$ sont n réels tels que :

$$\alpha_1(V_1 - U_1) + \alpha'_1(V_1 + U_1) + \cdots + \alpha_p(V_p - U_p) + \alpha'_p(V_p + U_p) + \beta_{p+1}V_{p+1} + \cdots + \beta_q V_p = 0.$$

On peut réordonner ainsi :

$$(\alpha_1 + \alpha'_1)V_1 + \cdots + (\alpha_p + \alpha'_p)V_p + \beta_{p+1}V_{p+1} + \cdots + \beta_q V_q + (\alpha'_1 - \alpha_1)U_1 + \cdots + (\alpha'_p - \alpha_p)U_p = 0.$$

La famille $(U_1, U_2, \dots, U_p, V_1, V_2, \dots, V_q)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (question 4.(c)) donc elle est libre. Donc :

- pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha'_i - \alpha_i = 0$ et $\alpha'_i + \alpha_i = 0$ donc $\alpha'_i = \alpha_i = 0$
- pour tout $i \in [\![p+1, q]\!]$, $\beta_i = 0$.

On en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Considérons alors la matrice P donc les colonnes sont les vecteurs de la familles $\mathcal{B}$. P est inversible car ses colonnes sont indépendantes et $M = PNP^{-1}$ (donc $P^{-1}MP = N$) par la formule de changement de base avec N la matrice donnée par :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}} & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\0&1&&&\vdots\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{matrix}} \end{pmatrix} \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R}).$$

(les blocs bleus sont au nombre de p ; le bloc rouge est la matrice identité I_{q-p} ; il n'y a que des "0" en dehors des blocs).

Exercice 2

1. (a) La fonction $G_{a,b}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$G'_{a,b}(x) = -(a + bx)\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) < 0.$$

Ainsi, $G_{a,b}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]\lim_{+\infty} G_{a,b}, G_{a,b}(0)] =]0, 1]$.

(b) L'équation $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$, soit $\frac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est polynomiale de degré 2 ($b \neq 0$) et de discriminant :

$$\Delta = a^2 - 4\frac{b}{2}(-y) = a^2 + 2by.$$

Pour $y > 0$, ce discriminant est strictement positif et l'équation admet donc exactement deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2by}}{b}.$$

(c) Soit $u \in [0,1[$. Posons $x = {G_{a,b}}^{-1}(1-u) \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :

$$\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = 1 - u \quad \Leftrightarrow \quad ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(1-u).$$

La question précédente appliquée à $y = -\ln(1-u)$ (> 0 car $1-u < 1$), en ayant remarqué que $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ (on choisit donc x_1), donne :

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(1-u)}}{b}.$$

2. (a) La fonction $G_{a,b}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. De plus,

$$G_{a,b}(x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{car} \quad x^2 G_{a,b}(x) = e^{-ax} \times \frac{x^2}{e^{bx^2/2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par c.c.}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge (Riemann de paramètre $2 > 1$). Donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx$ converge.

(b) On peut réécrire l'expression de f ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{b}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{\frac{1}{b}}}\right)^2\right)$$

On reconnaît alors la densité continue d'une variable de loi normale $\mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}b\left(x^2 + 2\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\exp\left(-\frac{b}{2}x^2 - ax - \frac{a^2}{2b}\right) \\ &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right)G_{a,b}(x) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}}\exp\left(\frac{a^2}{2b}\right)\int_0^{+\infty} f(x)dx \quad (\star).$$

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$; la question précédente donne :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = P(X \geq 0).$$

Par transformation affine, on se ramène à la variable centrée réduite $X^\star = \sqrt{b}\left(X + \frac{a}{b}\right)$:

$$P(X \geq 0) = P\left(X^\star \geq \frac{a}{\sqrt{b}}\right) = 1 - P\left(X^\star < \frac{a}{\sqrt{b}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

En reportant dans $(\star)$:

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}}\exp\left(\frac{a^2}{2b}\right)\Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right).$$

3. (a) La fonction $f_{a,b}$ est clairement continue (sauf peut-être en 0) et positive. De plus :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx &= \int_0^{+\infty} (a+bx)\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)dx\\ &= -\lim_{A\to+\infty}\left[\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\right]_0^A\\ &= 1+\lim_{A\to+\infty}\exp\left(-aA-\frac{b}{2}A^2\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, $f_{a,b}$ est bien une densité de probabilité.

(b) Sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{a,b}(x)dx=\int_0^{+\infty} -x(-a-bx)\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)dx$$

Les fonctions $u : x\mapsto -x$ et $v : x\mapsto \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)=G_{a,b}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,A]$ où A est un réel positif ; par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A -x\underbrace{(-a-bx)\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)}_{=v'(x)}dx &= \Big[-xG_{a,b}(x)\Big]_0^A-\int_0^A -G_{a,b}(x)dx\\ &= -AG_{a,b}(A)+\int_0^A G_{a,b}(x)dx\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $AG_{a,b}(A)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

On en déduit que X admet une espérance et que celle-ci vaut :

$$E(X)=\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx.$$

4. (a) Soit $\omega\in\Omega$ et $y=Y(\omega)$ (>0 car Y suit une loi exponentielle).

La question 1.(b) nous donne le signe de $ax+\frac{b}{2}x^2-y$ en fonction de $x\in\mathbb{R}_+$:

x	0		$\frac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b}$		$+\infty$
$ax+\frac{b}{2}x^2-y$		$-$	0	$+$	

On en déduit, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$X(\omega)>x\Leftrightarrow \frac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b}>x\Leftrightarrow ax+\frac{b}{2}x^2-y<0\Leftrightarrow Y(\omega)>ax+\frac{b}{2}x^2.$$

Par conséquent :

$$P(X>x)=P\left(Y>ax+\frac{b}{2}x^2\right)=1-F_Y\left(ax+\frac{b}{2}x^2\right)$$

où F_Y est la fonction de répartition de $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$:

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F_Y(t)=\left\{\begin{array}{cl}1-\exp(-t) & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t\leq 0\end{array}\right..$$

Comme a et b sont strictement positifs, $ax+\frac{b}{2}x^2$ aussi et donc :

$$P(X>x)=1-\left(1-\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\right)=\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)=G_{a,b}(x).$$

(b) Avec la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - G_{a,b}(x).$$

Si $x = 0$, $F_X(0) = 1 - G_{a,b}(0) = 0$. Comme F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction de répartition), elle est nulle sur $\mathbb{R}_-$. On a finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 - G_{a,b}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right. .$$

La fonction $G_{a,b}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ (sur $\mathbb{R}_+$) et valant 1 en 0, la fonction de répartition F_X de X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, X est une variable aléatoire à densité et (en posant $f_X(0) = 0$) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \left\{ \begin{array}{cl} -{G_{a,b}}'(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right\} = f_{a,b}(x).$$

La fonction $f_{a,b}$ est donc une densité de X et $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$.

(c) Notons V la variable aléatoire ${G_{a,b}}^{-1}(1-U)$ et déterminons-en la fonction de répartition F_V (nulle sur $\mathbb{R}_-$ puisque V est positive) ; pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F_V(x) = \underbrace{P({G_{a,b}}^{-1}(1-U) \leq x) = P(1 - U \geq G_{a,b}(x))}_{G_{a,b} \text{ est une bijection strictement décroissante de } \mathbb{R}_+ \text{ dans }]0,1]} = F_U(1 - G_{a,b}(x))$$

Comme $1 - G_{a,b}(x) \in [0, 1[$ et que, pour tout $t \in [0,1]$, $F_U(t) = t$:

$$F_V(x) = 1 - G_{a,b}(x).$$

Les variables X et V ont même fonction de répartition donc même loi :

$${G_{a,b}}^{-1}(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b).$$

5. (a) La ligne (2) du code génère un échantillon de taille n suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

(b) On complète la ligne (3) grâce à la question 1.(c) :

```
1 def grandlinexp(a,b,n):
2     u = rd.random(n)
3     y = - np.log(1-u)
4     x = (-a+sqrt(a^2+2*b*y))/b
5     return(x)
```

6. Le code proposé ici va nous fournir des valeurs de plus en plus proches de l'espérance d'une variable aléatoire X de loi exponentielle linéaire de paramètres[1] $a = 0$ et $b = 1$ (méthode de Monte-Carlo). D'après 3.(c) et 2.(c) :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} G_{0,1}(x)dx = \sqrt{2\pi}\ \exp(0)\ \Phi(0) = \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

7. En écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$(M_n > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \cdots \cap (X_n > x).$$

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes et de même loi :

$$P(M_n > x) = P(X_1 > x) \times \cdots \times P(X_n > x) = \big(P(X_1 > x)\big)^n.$$

[1] L'introduction du problème précisait que a est strictement positif... mais toutes les questions précédentes semblent valables avec $a = 0$ également.

Or, comme X_1 est à densité de densité $f_{a,b}$,

$P(X_1 > x) = 1-P(X_1 \leq x) = 1-\displaystyle\int_0^x f_{a,b}(t)dt = 1-[G_{a,b}(t)]_0^x = 1-(G_{a,b}(x) - G_{a,b}(0)) = G_{a,b}(x).$

Finalement :

$$P(M_n > x) = \big(G_{a,b}(x)\big)^n = \exp\left(-(an)x - \frac{bn}{2}x^2\right) = G_{an,bn}(x).$$

Avec les mêmes calculs qu'à la question 4.(b), on démontre que la variable M_n suit donc la loi exponentielle linéaire de paramètres an et bn.

8. (a) Bien entendu, U_n étant positive, sa fonction de répartition est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{array}{rcl} P(U_n > x) & = & P\left(H_n > \dfrac{x}{n}\right) \\ & = & P\left(\min(h, X_1, \ldots, X_n) > \dfrac{x}{n}\right) \\ & = & \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } h \leq \dfrac{x}{n} \\ P\left(\min(X_1, \ldots, X_n) > \dfrac{x}{n}\right) & \text{sinon} \end{array}\right. \\ & = & \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \geq hn \\ P\left(M_n > \dfrac{x}{n}\right) & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}$$

Puisque M_n est à densité, $P\left(M_n > \dfrac{x}{n}\right) = P\left(M_n \geq \dfrac{x}{n}\right)$, donc pour $0 \leq x < hn$:

$$\begin{array}{rcl} F_{U_n}(x) & = & 1 - P(U_n > x) \;=\; 1 - G_{an,bn}\left(\dfrac{x}{n}\right) \\ & = & 1 - \exp\left(-(an)\left(\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{bn}{2}\left(\dfrac{x}{n}\right)^2\right) \\ & = & 1 - \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2n}x^2\right) \end{array}$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; F_{U_n}(x) = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leq x < nh \\ 1 & \text{si } x \geq nh \end{array}\right. .$$

(b) La fonction F_{U_n} n'est pas continue en nh car :

$$1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) \underset{x \to nh^-}{\longrightarrow} 1 - \exp\left(\underbrace{-anh - \frac{b}{2}nh^2}_{<0}\right) < 1 = F_{U_n}(nh).$$

Elle est clairement continue en tout autre point, 0 compris.

(c) La variable aléatoire U_n n'admet pas de densité car sa fonction de répartition n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Pour $x < 0$:

$$F_{U_n}(x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $x \geq 0$, pour n assez grand, on a $x < nh$, donc :

$$F_{U_n}(x) = 1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - \exp(-ax).$$

Par conséquent, la suite de variables aléatoires (U_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a.

9. (a) La fonction de répartition F_Y de Y est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les conditions souhaitées sur c et d s'écrivent :

$$\begin{cases} F_Y(d) - F_Y(c) &= 1-\alpha \\ F_Y(c) &= \dfrac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-c} - e^{-d} &= 1-\alpha \\ 1-e^{-c} &= \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}.$$

On obtient un unique couple solution :

$$c = -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad d = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

(b) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a. La convergence en loi prouvée en 8.(d) donne :

$$P\left(\frac{c}{U_n} \leq a \leq \frac{d}{U_n}\right) \underset{a>0}{=} P\left(\frac{c}{a} \leq U_n \leq \frac{d}{a}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\frac{c}{a} \leq X \leq \frac{d}{a}\right).$$

Étant donnée la fonction de répartition de X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on a (comme X à densité) :

$$P\left(\frac{c}{a} \leq X \leq \frac{d}{a}\right) = F_X\left(\frac{d}{a}\right) - F_X\left(\frac{c}{a}\right) = \exp(-c) - \exp(-d) = 1-\alpha.$$

En conclusion :

$$P\left(\frac{c}{U_n} \leq a \leq \frac{d}{U_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha$$

ce qui prouve que $\left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance $1-\alpha$.

10. (a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$E(S_i) = 1 \times P(X_i \geq h) + 0 \times P(X_i < h) = P(X_i \geq h) = 1 - \int_0^h f_{a,b}(t)dt = G_{a,b}(h).$$

Par ailleurs :

$$S_iD_i = 1 \Leftrightarrow S_i = 1 \text{ et } D_i = 1 \Leftrightarrow h \leq X_i \leq 1$$

ce qui ne se produit jamais car $h \geq 2$. La variable S_iD_i est donc nulle, d'où :

$$E(S_iD_i) = 0.$$

(b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les variables S_i et D_i ne sont pas indépendantes car :

$$\overbrace{E(S_iD_i)}^{=0} \neq \overbrace{E(S_i)}^{\neq 0} \times \overbrace{E(D_i)}^{\neq 0}.$$

Pour $i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, les variables S_i et D_j sont indépendantes car fonctions respectivement de X_i et X_j elles-mêmes indépendantes (lemme des coalitions).

(c) Par bilinéarité de la covariance et avec la question précédente (la covariance de deux variables indépendantes étant nulle) :

$$Cov(\overline{S_n}, \overline{D_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \underbrace{Cov(S_i, D_j)}_{=0 \text{ pour } i \neq j} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Cov(S_i, D_i).$$

La formule de Köenig-Huygens et la question (a) donnent :

$$Cov(S_i, D_i) = \underbrace{E(S_i D_i)}_{=0} - E(S_i)E(D_i) = -G_{a,b}(h) \overbrace{\big(1 - G_{a,b}(1)\big)}^{\text{même calcul qu'en (a)}}$$

En conclusion :

$$Cov(\overline{S_n}, \bar{D}_n) = -\frac{G_{a,b}(h)\big(1 - G_{a,b}(1)\big)}{n}.$$

Comme $G_{a,b}$ est à valeurs dans $]0,1]$ et ne vaut 1 qu'en 0, le numérateur de cette fraction est strictement positif, donc la covariance de $\overline{S_n}$ et $\overline{D_n}$ est strictement négative.
La variable $\overline{S_n}$ représente la proportion de survivants après h années ; la variable $\overline{D_n}$ représente la proportion de personnes décédées lors de la première année d'études. Le signe négatif de la covariance de ces deux variables était prévisible car, plus l'une de ces variables est grande, plus l'autre a de chance d'être petite.

11. (a) On a par linéarité de l'espérance :

$$E(\overline{S_n}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(S_i) = E(S_1) = G_{a,b}(h).$$

Par les propriétés de la variance, les variables $S_1, \dots, S_n$ étant indépendantes,

$$V(\overline{S_n}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(S_i) = \frac{1}{n} V(S_1)$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ($\overline{S_n}$ admet une variance) :

$$P(|\overline{S_n} - E(\overline{S_n})| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{S_n})}{\varepsilon^2} = \frac{V(S_1)}{n\varepsilon^2}$$

Comme la variance $V(S_1)$ est indépendante de n (inutile de la calculer), on a finalement par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\overline{S_n} - G_{a,b}(h)| \geq \varepsilon) = 0.$$

(c) On prouve exactement de la même manière qu'en (a) que $\overline{D_n}$ converge en probabilité vers le paramètre $1 - G_{a,b}(1)$.

12. (a) i. L'inclusion d'événements demandée est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x + y| \leq |x| + |y|$$

appliquée à $x = \lambda\big(Z_n - z(a,b)\big)$ et $y = \mu\big(r(a,b) - R_n\big)$.

ii. Il suffit ici de remarquer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ x + y \geq \varepsilon \implies x \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } y \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

(ce qui est clair en écrivant la contraposée : si $x < \frac{\varepsilon}{2}$ et $y < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $x + y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$).

L'événement

$$A = \Big(\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geq \varepsilon\Big)$$

est donc inclus dans l'union

$$\underbrace{\left(|Z_n - z(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right)}_{=B} \cup \underbrace{\left(|R_n - r(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\mu}\right)}_{=C}.$$

Or, $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \leq P(B) + P(C)$. Donc :

$$P(A) \leq P(B) + P(C).$$

On conclut avec la question précédente.

(b) Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|B_n - b| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\star).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\lambda = \dfrac{2}{h-1}$ (> 0) et $\mu = \dfrac{2}{h(h-1)}$ (> 0).
On a alors, en reprenant la définition de $G_{a,b}$:

$$\begin{aligned}
\lambda z(a,b) - \mu r(a,b) &= \frac{2}{h-1} \ln\big(G_{a,b}(1)\big) - \frac{2}{h(h-1)} \ln\big(G_{a,b}(h)\big) \\
&= \frac{2}{h-1}\left(-a - \frac{b}{2}\right) - \frac{2}{h(h-1)}\left(-ah - \frac{b}{2}h^2\right) \\
&= \frac{2}{h-1}\left(-a - \frac{b}{2} + a + \frac{b}{2}h\right) \\
&= \frac{2}{h-1} \times \frac{b}{2}(h-1) \\
&= b.
\end{aligned}$$

La question 12.(a)(ii) nous donne alors :

$$P\big(|B_n - b| \geq \varepsilon\big) \leq \underbrace{P\left(|Z_n - z(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right)}_{\substack{\lim\limits_{n\to+\infty} = 0 \\ \text{car } Z_n \text{ converge en probas vers } z(a,b)}} + \underbrace{P\left(|R_n - r(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right)}_{\substack{\lim\limits_{n\to+\infty} = 0 \\ \text{car } R_n \text{ converge en probas vers } r(a,b)}}$$

On obtient le résultat souhaité $(\star)$ par le théorème d'encadrement.
