Correction - DS 11 (B)

Devoir surveillé du Samedi 22 Mars

Exercice 1 (EDHEC 2024)

1. (a) On vérifie les trois points habituels :
   - La fonction f est clairement positive sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est donc continue sur $[0,+\infty[$ (car $x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$) et sur $]-\infty,0[$ (car c'est la fonction nulle). Nous en déduisons que f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
   - Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$, on a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt.$$
   Soit $x \in [0,+\infty[$. On a :
   $$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2}}+1.$$
   On a alors :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}+1 = 1.$$

   La fonction f peut donc être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X.

   (b) Soit N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée, réduite. On a $E(N)=0$ et $V(N)=1$. D'après le théorème de Koenig-Huygens, comme N admet une variance elle admet également un moment d'ordre deux et on a
   $$E(N^2) = E(N)^2 + V(N) = 1.$$

   (c) Pour montrer que X admet une espérance, il faut montrer que :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
   est une intégrale convergente (absolument). D'après la question précédente, on sait que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}E(N^2) = \sqrt{2\pi}.$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$. Remarquons que la fonction g est paire. On a donc :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 2\int_0^{+\infty} g(t)dt.$$
   On en déduit que X admet une espérance et que :
   $$E(X) = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. D'après le cours, on a :
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$
   Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$, $F_X(x)$ est nulle si $x<0$. Si $x \geq 0$, on a, en reprenant les calculs de la question 1.(a) :
   $$F_X(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
   Ainsi :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. (a) Si $x < 0$, on a $F_Z(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ car X^2 ne peut pas prendre de valeurs négatives. Si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= P(-\sqrt{x} < X \leq \sqrt{x}) \quad (\text{car } X \text{ à densité}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

On en déduit que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

(b) Voici la fonction demandée :

```
def simulX() :
    Z = rd.exponential(2)
    return np.sqrt(Z)
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(X \leq \sqrt{n}x) = F_X(\sqrt{n}x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

pour tout $x \neq 0$ (c'est-à-dire partout où G est continue).
On reconnait la fonction de répartition G d'une variable aléatoire suivant une loi certaine et prenant la valeur 0. La variable Y_n converge donc en loi vers une loi certaine nulle.

(c) <u>Méthode 1</u> : Comme X est positive (car $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$) et admet une espérance $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (question 1.(c)), $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ est positive et admet une espérance $E(Y_n) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. On a donc avec Markov, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq \frac{E(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2n}}$$

Ainsi, $0 \leq P(|Y_n| > \varepsilon) \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2n}}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2n}} = 0$.
Par encadrement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$.
<u>Méthode 2</u> : Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = 1 - P(|Y_n| \leq \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon \leq Y_n \leq \varepsilon)$$

Comme Y_n est à densité car c'est la transformée affine de X à densité, on a :

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = 1 - (G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)) = 1 - G_n(\varepsilon) + 0 = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$

On a alors bien : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. et $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que : $[M_n > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$. Comme les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ sont supposées mutuellement indépendantes, on a :

$$P(M_n > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x).$$

Comme les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent toutes la même loi que X, on peut écrire :

$$P(M_n > x) = P(X > x)^n = (1 - F_X(x))^n.$$

On a alors :

$$F_{M_n}(x) = 1 - P(M_n > x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = G_n(x).$$

Les variables M_n et Y_n ayant la même fonction de répartition, elles suivent la même loi.

(b) Voici la fonction demandée :

```
def simulM(n) :
    X = np.array([simulX() for k in range (n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

Exercice 2 (EDHEC 2015)

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5)] \\ &= Vect[e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5, e_1 + e_5, e_1 + e_5, e_1 + e_5] \\ &= Vect[e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5] \\ &= Vect[e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5] \qquad \text{en faisant } (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \end{aligned}$$

et la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est génératrice de $Im(f)$ et libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est une base de $Im(f)$ qui est de dimension 2.

(b) Par théorème du rang, on en déduit que :

$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(Ker(f)) + 2 = dim(\mathbb{R}^5) = 5 \quad \text{donc} \quad dim(Ker(f)) = 3.$$

On peut ensuite déterminer une base de $Ker(f)$. On cherche pour cela $Ker(C)$.

Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ a \\ b \end{pmatrix}$, on a :

$$CX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + a + b = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ x + y + z + a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z - a - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z - a - b \\ z \\ a \\ b \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $Ker(C) = Vect\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ puis $Ker(f) = Vect[e_3-e_2, e_4-e_2, e_5-e_2]$,

la famille $[e_3 - e_2, e_4 - e_2, e_5 - e_2]$ est génératrice de $Ker(f)$ et son cardinal (3) est égal à la dimension de $Ker(f)$, c'est donc une base de $Ker(f)$.

On pose $e'_1 = e_3 - e_2$, $e'_2 = e_4 - e_2$ et $e'_3 = e_5 - e_2$.

2. (a) Deux possibilités ici : on peut lire les coordonnées et écrire les $f(e_i)$ en fonction des e_i en lisant les coordonnées sur la matrice, puis chercher $f(u)$ et $f(v)$ par linéarité. Ou bien avec les matrices :

$$CU = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\3\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad f(u) = 3e_1 + 3e_5$$

et

$$CV = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad f(v) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5$$

De même pour $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ on peut passer par la matrice, mais puisqu'on vient d'exprimer $f(u)$ et $f(v)$ il est cette fois plus rapide d'écrire, par linéarité de f :

$$f(u-v) = f(u)-f(v) = e_1-e_2-e_3-e_4+e_5 = -\underbrace{(e_2 + e_3 + e_4)}_{=u} + \underbrace{(e_1 + e_5)}_{=v} = -u+v = -(u-v)$$

et

$$f(u+3v) = f(u)+3f(v) = 9e_1+3e_2+3e_3+3e_4+9e_5 = 3\underbrace{(e_2 + e_3 + e_4)}_{=u} + 9\underbrace{(e_1 + e_5)}_{=v} = 3(u+3v).$$

(b) Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille libre (calculs laissés au lecteur).

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 e'_4 + \lambda_5 e'_5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda_4 + 3\lambda_5 &= 0\\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 0\\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 0\\ \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 0\\ \lambda_3 - \lambda_4 + 3\lambda_5 &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

Comme $\mathscr{B}'$ est de cardinal $5 = \dim(\mathbb{R}^5)$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^5$. On obtient alors :

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}.$$

(c) Avec la formule de changement de bases, on a :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \quad \text{et donc} \quad C = RDR^{-1}$$

avec :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

R est constituée d'une base de vecteurs propres de C respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, 0, -1 et 3 qui constituent la diagonale de D, donc la formule de changement de base donne :

$$C = RDR^{-1}.$$

3. (a) On calcule sans difficulté :

$$D(D+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

puis

$$D(D+I)(D-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) On montre alors que C vérifie la même relation :

$$\begin{aligned} C(C+I)(C-3I) &= RDR^{-1}(RDR^{-1}+I)(RDR^{-1}-3I) \\ &= RDR^{-1}(RDR^{-1}+RIR^{-1})(RDR^{-1}-3RIR^{-1}) \\ &= RDR^{-1}R(D+I)R^{-1}R(D-3I)R^{-1} = RD(D+I)(D-3I)R^{-1} \\ &= R0R^{-1} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit en développant que :

$$0 = C(C+I)(C-3I) = C(C^2-3C+C-3I) = C(C^2-2C-3I) = C^3-2C^2-3C$$

donc le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est bien annulateur de C.

4. (a) $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X = X(X^2 - 2X - 3) = X(X+1)(X-3)$ donc les racines de P sont 0, -1 et 3. On retrouve les valeurs propres de C ce qui est normale puisque, comme P est annulateur de C, toutes les valeurs propres de C sont racines de P, donc 0, -1 et 3 sont racines de P.
Pour obtenir a_n, b_n et c_n, il faut utiliser l'égalité

$$X^n = P(X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n.$$

Puisque $P(\lambda_i) = 0$ pour chacune des racines, on pense à remplacer X par λ_i et on obtient :

$$0^n = P(0)Q(0) + a_n0^2 + b_n0 + c_n \quad \text{donc} \quad 0+0+0+c_n = 0 \quad \text{et} \quad c_n = 0.$$

Ensuite

$$(-1)^n = P(-1)Q(-1) + a_n - b_n \quad \text{donc} \quad 0 + a_n - b_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad a_n - b_n = (-1)^n.$$

De même

$$3^n = P(3)Q(3) + 9a_n + 3b_n \quad \text{donc} \quad 0 + 9a_n + 3b_n = 3^n \quad \text{et} \quad 9a_n + 3b_n = 3^n.$$

On résout le système donné par les deux dernières équations avec le pivot $L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1$:

$$\left\{\begin{array}{r} a_n - b_n = (-1)^n \\ 12b_n = 3^n - 9(-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a_n = b_n + (-1)^n \\ b_n = \frac{3^n - 9(-1)^n}{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12} \\ b_n = \frac{3^n - 9(-1)^n}{12} \end{array}\right.$$

(b) On applique cette fois la relation pour $X = C$:

$$\begin{aligned} C^n &= P(C)Q_n(C) + a_nC^2 + b_nC + c_nI \\ &= 0 \times Q_n(C) + \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}C^2 + \frac{3^n - 9(-1)^n}{12}C + 0 \\ &= \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}C^2 + \frac{3^n - 9(-1)^n}{12}C. \end{aligned}$$

5. (a) `import numpy as np` et `import numpy.linalg as al`.

(b) `C = np.array([[1,1,1,1,1],[1,0,0,0,0],[1,0,0,0,0],[1,0,0,0,0],[1,1,1,1,1]])`

(c) Avec la commande `al.eig(C)`, on calcule les valeurs propres (dans la variable `Sp`) et les vecteurs propres (dans la variable `VP`) de la matrice C.

On retrouve les valeurs propres de C : 3, -1 et 0 (la valeur `-1.64638394e-17` peut être considérée comme nulle).

On obtient également des vecteurs propres associés à ces valeurs propres :

- Pour 3, on a le vecteur

$$\begin{pmatrix} -6.54653671e-01 \\ -2.18217890e-01 \\ -2.18217890e-01 \\ -2.18217890e-01 \\ -6.54653671e-01 \end{pmatrix} \quad \text{qui est colinéaire au vecteur} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

C'est donc conforme au résultat obtenu à la question 2.(c).

- Pour 1, on a le vecteur

$$\begin{pmatrix} -4.47213595e-01 \\ 4.47213595e-01 \\ 4.47213595e-01 \\ 4.47213595e-01 \\ -4.47213595e-01 \end{pmatrix} \quad \text{qui est colinéaire au vecteur} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

C'est donc conforme au résultat obtenu à la question 2.(c).

- Pour 0, c'est plus compliqué... On avait obtenu à la question 2.(c) :

$$E_0(C) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Python n'a pas la même famille génératrice (ce qui est normale, car il n'y a pas unicité). Difficile donc de vérifier si les vecteurs donnés par Python sont conformes à ceux obtenus à la question 2.(c).

On peut tout de même remarquer que dans les deux cas, les premiers coefficients des vecteurs sont à chaque fois nuls (en considérant `-6.79869978e-17`, `-6.08591650e-17` et `-2.38133580e-17` comme des coefficients nuls).

Exercice 3 (EDHEC 2024)

1. Faisons le changement de variable $u = x - t$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \int_x^0 (x-u)f(u)du = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du.$$

2. (a) Développons l'expression obtenue à la question précédente par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du = 1 + x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du.$$

D'après le cours :

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)du$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f(x)$.
- La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)du$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $xf(x)$.

On en déduit que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x f(u)du + x\left(\int_0^x f(u)du\right)' - \left(\int_0^x uf(u)du\right)' \\ &= \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du. \end{aligned}$$

(b) On utilise les mêmes arguments que précédemment: la fonction f' est définie comme une intégrale de la fonction continue f donc f' $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \left(\int_0^x f(u)du\right)' = f(x).$$

(c) Notons (E) : $y'' = y$ l'équation différentielle de la question précédente. Cette équation a pour équation caractéristique $x^2 - 1 = 0$ dont les racines sont données par 1 et -1. D'après le cours, les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \qquad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(d) Commençons par déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

- D'après la question 1, on a : $f(0) = 1 + \displaystyle\int_0^0 tf(x-t)dt = 1$.
- D'après la question 2.(a), on a : $f'(0) = \displaystyle\int_0^0 f(u)du = 0$.

D'après la question précédente, f peut s'écrire $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a donc, en remplaçant $f(0)$ et $f'(0)$ par leurs expressions:

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda - \mu &= 0 \end{cases}$$

On vérifie qu'on a alors $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$1+\int_0^x tf(x-t)dt = 1+\int_0^x t\frac{e^{x-t}+e^{-x+t}}{2}dt = 1+\frac{e^x}{2}\int_0^x te^{-t}dt+\frac{e^{-x}}{2}\int_0^x te^t dt$$

Calculons les intégrales de l'expression. Les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t)=t \quad \text{et} \quad v(t)=-e^{-t},$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont données par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t)=1 \quad \text{et} \quad v'(t)=e^{-t}.$$

D'après la formule d'intégration par parties, on a alors :

$$\int_0^x te^{-t} = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x}+\left[-e^{-t}\right]_0^x = -(x+1)e^{-x}+1.$$

On peut, en procédant de la même manière, montrer que :

$$\int_0^1 te^t dt = (x-1)e^x+1.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
1+\int_0^x tf(x-t)dt &= 1+\frac{e^x}{2}(-(x+1)e^{-x}+1)+\frac{e^{-x}}{2}((x-1)e^x+1) \\
&= 1+\frac{-(x+1)}{2}+\frac{(x-1)}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2} \\
&= \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

L'égalité a bien été vérifiée.

4. Entre cette question et la question 1, la fonction f diffère d'une constante. Cela implique que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)=\int_0^x f(u)du \quad \text{et} \quad f''(x)=f(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle (E) et s'écrit donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=\lambda e^x+\mu e^{-x} \qquad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Ici les conditions initiales sont données par $f(0)=0$ et $f'(0)=0$. Les coefficients λ et μ doivent donc vérifier le système :

$$\begin{cases} \lambda+\mu &= 0 \\ \lambda-\mu &= 0 \end{cases}$$

On a donc $\lambda=\mu=0$. Ainsi, l'unique solution de cette équation est donnée par $f=0$.

Exercice 4 (EDHEC 2008)

1. (a) f étant $\mathscr{C}^1$, f' est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée. Donc il existe un réel M tel que, pour tout $x \in [0,1]$: $|f'(x)| \leq M$. L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\forall x,y \in [0,1], \quad |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|.$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, on a $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n} \in [0,1]$. Donc $\forall t \in \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, on a t et $\frac{k}{n} \in [0,1]$. Avec la question précédente, on a donc

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t-\frac{k}{n}\right)$$

(c) On écrit $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ sous forme d'intégrale (intégrale d'une constante) :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{k/n}^{(k+1)/n}f\left(\frac{k}{n}\right)dt.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)dt\right|\\ &\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|dt \quad \text{(bornes croissantes)}\\ &\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n}M\left(t-\frac{k}{n}\right)dt \quad \text{(question précédente)}\\ &= \left[\frac{M}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n}=\frac{M}{2n^2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n^2}$$

(d) Avec la relation de Chasles,

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2n^2}=\frac{M}{2n}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$$

(e) Comme uand $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{2n}=0$, on a par encadrement (la valeur absolue est positive) :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,dt.$$

2. (a) On intègre par parties, avec $u'(x)=x^p$, $u(x)=\frac{1}{p+1}x^{p+1}$, $v(x)=(1-x)^q$ et $v'(x)=-q(1-x)^{q-1}$ avec u et v $\mathscr{C}^1$ car $q-1\geq 0$. Donc

$$\begin{aligned}I(p,q) &= \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1 -q(1-x)^{q-1}\frac{1}{p+1}x^{p+1}dx\\ &= 0-0+\frac{q}{p+1}\int_0^1(1-x)^{q-1}x^{p+1}dx\end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q)=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$.

(b) On a alors par récurrence sur q :

Ini. Pour $q = 0$: $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0,0) = I(p,0)$

Héré. Soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$.
Avec la question précédente,

$$I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q)$$

et donc par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I(p,q+1) &= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q,0) \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+1+q)!} I(p+1+q,0) \end{aligned}$$

Ccl. Par récurrence, $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$.

(c) On a :

$$I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \left[\frac{1}{p+q+1} x^{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

donc avec la question précédente,

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0) = \frac{1}{p+q+1} \frac{p!q!}{(p+q)!} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

(d) Voici le programme demandé :

```
def calcul_I(p,q) :
  I = 1
  for k in range(0, q) :
    I = (q-k)/(p+k+1)*I
  return I/(p+q+1)
```

3. On a $E(Y) = mp$ et $V(Y) = mp(1-p)$.
Or, avec KH, $V(Y) = E\left(Y^2\right) - E(Y)^2$ donc

$$E\left(Y^2\right) = V(Y) + E(Y)^2 = mp(1-p) + m^2p^2 = mp(1-p+mp).$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y(Y-1)) = E\left(Y^2 - Y\right) = E\left(Y^2\right) - E(Y) = mp(1-p+mp) - mp = m(m-1)p^2.$$

4. Pour $k = 0$, la loi de X_1 est $\mathcal{B}(m,0)$ donc $P_{(U_1=0)}(X_1 = 0) = 1$.
Comme U_1 suit une loi uniforme sur $\{0\}$, $P(U_1 = 0) = 1$.
Donc $P(X_1 = 0) = P(U_1 = 0 \cap X_1 = 0) = P(U_1 = 0) P_{(U_1=0)}(X_1 = 0) = 1$.
Ainsi, X_1 est égale à 0 presque surement.

5. (a) Quand $(U_n = k)$, la loi de X_n est $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$ donc $X_n(\Omega) = [\![0,m]\!]$.
Pour tout $i \in [\![0,m]\!]$, $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est un système complet d'événement donc

$$P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P(U_1 = k) P_{(U_1=k)}(X_n = i)$$

avec $P(U_1 = k) = \frac{1}{n}$ (loi uniforme sur n valeurs)

et $P_{(U_1=k)}(X_n = i) = \binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i}$ (loi $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$).

Donc

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

(b) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$. Alors $E(Y) = \dfrac{mk}{n}$ et

$$\frac{mk}{n} = \sum_{i=0}^{m} iP(Y = i) = \sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{i=1}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad \text{(interversion des sommes)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}m\frac{k}{n} = \frac{m}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{m(n-1)}{2n}
\end{aligned}$$

(c) On a, par le théorème de transfert, pour $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$,

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{i=0}^{m} i(i-1)P(Y = i) = \sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = m(m-1)\left(\frac{k}{n}\right)^2$.

Donc

$$\begin{aligned}
E[X_n(X_n-1)] &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\,\mathrm{P}(X_n = i)\\
&= \sum_{i=1}^{m} i(i-1)\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i} + 0\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{m(m-1)}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}
\end{aligned}$$

(d) On a $E[X_n(X_n-1)] = E\left(X_n^2\right) - E(X_n)$ donc

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= E[X_n(X_n-1)] + E(X_n)\\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n} - \left[\frac{m(n-1)}{2n}\right]^2 \\
&= \frac{m(n-1)}{12n^2}\left[2(m-1)(2n-1) + 6n - 3m(n-1)\right] \\
&= \frac{m(n-1)}{12n^2}\left[m + 2n + mn + 2\right] \text{ et on constate} \\
&= \frac{m(n-1)}{12n^2}(m+2)(n+1) \\
&= \frac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2}.
\end{aligned}$$

6. (a) Pour $i \in [\![0, m]\!]$, on avait trouvé :

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} &= \binom{m}{i}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \binom{m}{i}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

avec pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = (x)^i(1-x)^{m-i}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ car $m - i \in \mathbb{N}$.

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}\,dx = I(i, m-i) = \frac{i!\,(m-i)!}{(m+1)!}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = \frac{i!\,(m-i)!}{(m+1)!}\binom{m}{i} = \frac{1}{m+1}.$$

Ainsi, pour tout i de $X_n(\Omega)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = i) = \frac{1}{m+1}$.

(b) La suite (X_n) converge donc en loi vers variable aléatoire X de loi $\mathcal{U}([\![0, m]\!])$.

(c) On a $E(X) = \dfrac{m}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(m+1)^2 - 1}{12}$. Or :

$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n} = \frac{m(1-1/n)}{2} \to \frac{m}{2}$$

et

$$V(X_n) = \frac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2} = \frac{m(m+2)\left(1-1/n^2\right)}{12} \to \frac{m(m+2)}{12}$$

On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X)$.