Correction - DS 12 (A)

Devoir surveillé du Samedi 30 Mars

Exercice 1 (ECRICOME 2017)

1. On a :

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = (A-I)^2(A-I) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Puisque $(A-I)^3$ est la matrice nulle, le polynôme $(X-1)^3 \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Par le cours, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme, soit ici :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$

Par ailleurs, 1 est valeur propre de A car la matrice $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (les deux premières colonnes sont opposées donc colinéaires).

Par conséquent :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.$$

3. La matrice A est inversible car 0 n'est pas valeur propre.

Elle n'est pas diagonalisable car, si elle l'était, elle serait semblable à une matrice diagonale où les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, donc tous égaux à 1 ; autrement dit, A serait semblable à I donc égale à I, ce qui est absurde.

En effet, si A est semblable à I, alors il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = I$, donc $A = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

4. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de :

   - la fonction polynomiale $x \mapsto 1 + x$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$
   - et de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Il est important de noter que $1 + x$ ne s'annule pas sur l'intervalle considéré (ouvert en -1) car la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ (ni même dérivable) en 0.

On dérive deux fois φ pour obtenir $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$. Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad ; \quad \varphi''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

et donc :

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

5. La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0 (sur un intervalle ouvert contenant 0), elle y admet un développement limité à l'ordre 2 donné par la formule de Taylor-Young :

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{=1} + \underbrace{\varphi'(0)}_{=\frac{1}{2}} x + \underbrace{\frac{\varphi''(0)}{2}}_{=-\frac{1}{8}} x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Le réel α recherché vaut donc $-\dfrac{1}{8}$.

6. On a :

$$\big(P(x)\big)^2 \;=\; \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)=1+x-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}$$

7. On obtient donc :

$$\big(P(C)\big)^2=P^2(C)=I+C-\frac{1}{8}C^3+\frac{1}{64}C^4=I+C=A,$$

en utilisant que $C^3=0$ (question 1) et donc aussi $C^4=0$.

La matrice $M=P(C)$ vérifie donc bien $M^2=A$, et :

$$\begin{aligned} M &= P(C) \;=\; I+\frac{1}{2}C-\frac{1}{8}C^2\\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6&6&0\\-6&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-1&4\\1&3&4\\-6&6&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

8. (a) En notant U,V et W les vecteurs-colonnes correspondant respectivement à u,v et w, les relations $v=f(w)-w$ et $u=f(v)-v$ se traduisent ainsi :

$$V=AW-W=CW=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$U=AV-V=CV=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

et on a donc : $v=(1,1,-3)$ et $u=(-6,-6,0)$.

(b) Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, montrer que la famille de trois vecteurs (u,v,w) est une base revient à prouver qu'elle est libre.

$$au+bv+cw=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-6a+b+c&=&0\\-6a+b&=&0\\-3b+c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-6a+b+c&=&0\\-6a+b&=&0\\-3b+c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow a=b=c=0,$$

en faisant le pivot... (u,v,w) est donc libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Calculons $f(u)$ en utilisant la matrice A :

$$AU=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&2\\-3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

donc $f(u)=u$ (u est un vecteur propre de f associé à l'unique valeur propre 1).

Les relations de l'énoncé nous donnent directement $f(v)$ et $f(w)$ comme combinaisons linéaires de u,v et w :

$$f(v)=u+v \quad ; \quad f(w)=v+w.$$

On en déduit la matrice de f dans la base (u,v,w) :

$$M_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}f(u)&f(v)&f(w)\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{c}u\\v\\w\end{array}=T$$

(d) Puisque A et T représentent l'endomorphisme f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement, en notant $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (donc inversible), on a :

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \quad \text{et donc} \quad P^{-1}AP = T.$$

9. (a) Supposons que $N^2 = T$. Alors :

$$NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN.$$

En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, la relation $NT = TN$ s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}}$$

ce qui nous donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & a+d \\ a+b & = & b+e \\ b+c & = & c+f \\ d & = & d+g \\ d+e & = & e+h \\ e+f & = & f+i \\ g+h & = & h \\ h+i & = & i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} d & = & 0 \\ a & = & e \\ b & = & f \\ g & = & 0 \\ d & = & h \\ e & = & i \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = e = i \\ d = g = h = 0 \\ b = f \end{array}\right.$$

Par conséquent, si $N^2 = T$, alors N est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Si $N^2 = T$, alors avec les notations de la question précédente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & \frac{1}{2} \\ c & = & -\frac{1}{8} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

On obtient donc deux solutions possibles :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = -N_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie qu'il s'agit effectivement de solutions à l'équation (${N_1}^2 = {N_2}^2 = T$).

10. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En posant $N = P^{-1}MP$, on a :
$$M^2 = A \Leftrightarrow \left(PNP^{-1}\right)^2 = A \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = A \Leftrightarrow N^2 = P^{-1}AP \Leftrightarrow N^2 = T$$
L'équation $M^2 = A$ admet donc exactement deux solutions :
$$M_1 = PN_1P^{-1} \quad \text{et} \quad M_2 = PN_2P^{-1} \ (= -M_1).$$

11. La matrice nulle n'étant pas solution de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2 (ECRICOME 2017)

1. En 0^+ :
$$\begin{cases} \ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \\ x^{2a} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } 2a > 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$
En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée "$+\infty + (-\infty)$", que l'on peut lever en utilisant les résultats de croissances comparées : comme $2a > 0$,
$$\varphi(x) = x^{2a}\left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

2. La fonction φ est dérivable et pour tout $x > 0$:
$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2x^{2a}}{x}$$
Le signe de $\varphi'(x)$ est celui du numérateur $1 - 2a^2x^{2a}$ qui s'annule en $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$. On en déduit le tableau de variations de φ :

x	0		x_0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

L'énoncé ne précise pas si une expression de $\varphi(x_0)$ en fonction de a est attendue, mais elle nous servira pour la question suivante :
$$\varphi(x_0) = \varphi\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a\frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2a}\left(\ln(2a^2) + 1\right).$$

3. Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$, maximum de φ atteint en x_0, en fonction de a :
$$\begin{aligned} \varphi(x_0) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2a}\left(\ln(2a^2) + 1\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(2a^2) + 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(2a^2) < -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2a^2 < e^{-1} \quad (\text{croissance de } \exp) \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 < \frac{1}{2e} \\ &\Leftrightarrow \quad a < \sqrt{\frac{1}{2e}} \quad (\text{croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ (et } a > 0)) \end{aligned}$$

D'où le tableau de signe :

a	$0 \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{2e}} \qquad\qquad +\infty$
$\varphi(x_0)$	$+ \qquad 0 \qquad -$

Par conséquent :

- Si $a < \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$:
  La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, x_0[$, donc réalise une bijection de $]0, x_0[$ dans $]\lim_0 \varphi, \varphi(x_0)[=]-\infty, \varphi(x_0)[$; ce dernier intervalle contenant 0, il existe un unique réel $z_1 \in]0, x_0[$ tel que $\varphi(z_1) = 0$.
  De même, φ réalise une bijection (décroissante) de $]x_0, +\infty[$ dans $]-\infty, \varphi(x_0)[$ qui contient 0, donc il existe un unique réel $z_2 \in]x_0, +\infty[$ tel que $\varphi(z_2) = 0$.
- Si $a = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, alors $\varphi(x_0) = 0$ et, d'après le tableau de variation déterminé en question 2., $\varphi(x) < 0$ pour $x \neq x_0$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : x_0.
- Si $a > \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, étant donné les variations de φ, cette fonction est strictement négative et l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution.

4. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Par composition avec ln et $t \mapsto t^a$ qui sont $\mathcal{C}^2$, puis par produit et somme, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{x}\ln(y) - ax^{a-1}y^a \quad ; \quad \partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{y}\ln(x) - ax^a y^{a-1}.$$

6. Les points critiques de f sont les points (x, y) de U annulant le gradient de f :

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln(y) - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \dfrac{1}{y}\ln(x) - ax^a y^{a-1} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{x}(\ln(y) - ax^a y^a) = 0 \\ \frac{1}{y}(\ln(x) - ax^a y^a) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(y) = ax^a y^a \\ \ln(x) = ax^a y^a \end{cases} \quad (1/x \text{ et } 1/y \text{ sont non nuls}) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(y) = ax^a y^a \\ \ln(x) = \ln(y) \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(x) = ax^a x^a \\ x = y \end{cases} \quad (\ln \text{ est bijective sur } \mathbb{R}_+^* \text{ ; report dans } L_1) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ x = y \end{cases}
\end{aligned}$$

7. Les solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont données par la question 3. On obtient donc avec la question 6 :

- Si $a < \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2).

- Si $a = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet un unique point critique : (x_0, x_0).
- Si $a > \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$: f n'admet pas de point critique.

8. Pour tout $(x, y) \in U$:
$$\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= \frac{-1}{x^2}\ln(y) - a(a-1)x^{a-2}y^a \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) &= \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) &= \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) &= \frac{-1}{y^2}\ln(x) - a(a-1)x^a y^{a-2} \end{cases}$$

9. Comme z_1 vérifie $\varphi(z_1) = \ln(z_1) - a{z_1}^{2a} = 0$, on a :
$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = \frac{-1}{{z_1}^2}\underbrace{\ln(z_1)}_{=a{z_1}^{2a}} - a(a-1){z_1}^{a-2}{z_1}^a = -a{z_1}^{2a-2} - a(a-1){z_1}^{2a-2} = -a^2{z_1}^{2a-2}.$$
Les expressions de $\partial^2_{1,1}(f)(x,y)$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)$ étant identiques en échangeant x et y, le même calcul donne :
$$\partial^2_{2,2}(f)(z_1, z_1) = -a^2{z_1}^{2a-2}.$$
Enfin :
$$\partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) = \partial^2_{2,1}(f)(z_1, z_1) = \frac{1}{{z_1}^2} - a^2\left({z_1}^2\right)^{a-1} = \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2}$$

10. On a :
$$MX_1 = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}$$
donc $MX_1 = \left(\dfrac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}\right)X_1$.

De même,
$$MX_2 = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{{z_1}^2} \\ -\frac{1}{{z_1}^2} \end{pmatrix}$$
donc $MX_2 = -\dfrac{1}{{z_1}^2}X_2$.

Par conséquent, les nombres $\lambda_1 = \dfrac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\dfrac{1}{{z_1}^2}$ sont valeurs propres de la matrice M (et X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés respectivement à ces deux valeurs).

Puisque (X_1, X_2) est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (famille libre car deux vecteurs non colinéaires et de cardinale égal à la dimension), il ne peut y avoir d'autre valeur propre. Donc :
$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{\frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}, -\frac{1}{{z_1}^2}\right\}.$$

11. Avec les notations précédentes, clairement : $\lambda_2 < 0$.

On peut utiliser la question 2 pour déterminer le signe de λ_1 en remarquant que :
$$\lambda_1 = \frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} = \frac{1 - 2a^2{z_1}^{2a}}{{z_1}^2} = \frac{1}{z_1}\varphi'(z_1)$$
Comme $z_1 \in]0, x_0[$, intervalle sur lequel φ' est strictement positive, on en déduit que $\lambda_1 > 0$.

Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_1, z_1) admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés, donc f ne présente pas en ce point d'extremum local (il s'agit d'un point col).

12. En (z_2, z_2), les calculs sont similaires et on obtient :
$$\mathrm{Sp}\big(\nabla^2(f)(z_2,z_2)\big) = \Big\{\underbrace{\frac{1}{{z_2}^2} - 2a^2{z_2}^{2a-2}}_{=\lambda_1'}, \underbrace{-\frac{1}{{z_2}^2}}_{=\lambda_2'}\Big\}.$$
Comme en question 11 :
$$\lambda_1' = \frac{1}{z_2}\varphi'(z_2).$$
Mais ici, comme z_2 est dans $]x_0, +\infty[$, intervalle sur lequel φ' est strictement négative, on en déduit que $\lambda_1' < 0$.

Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_2, z_2) admet deux valeurs propres strictement négatives, donc f présente en ce point un maximum local.

Exercice 3 (ECRICOME 2020)

1. L'intégrale $I_n(a)$ est impropre en $+\infty$. Soit $X > a$. On a
$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_a^X \\ &= \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)X^{n-1}} \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n-1)a^{n-1}},\end{aligned}$$
car $n-1 > 0$ (car $n \geq 2$). Ainsi, l'intégrale $I_n(a)$ converge et $I_n(a) = \dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. (a) On montre que f est bien une densité de probabilité.
   - f est continue partout sauf en a.
   - f est positive ou nulle partout sur $\mathbb{R}$.
   - L'intégrale sur $\mathbb{R}$ de f converge et vaut 1 :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 3a^3 I_4(a) = 1.$$

   Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

   (b) La fonction de répartition F_X de X est donnée par
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$
   Comme f est nulle sur $]-\infty; a[$, il est clair que $F_X(x) = 0$ pour $x < a$. Si $x \geq a$, un calcul similaire à celui fait à la question 1 donne $F_X(x)$. Au final, on peut écrire
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^3}{x^3}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

   (c) Par définition,
   $$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3}\mathrm{d}t \text{ converge.}\end{aligned}$$
   On reconnait un multiple de l'intégrale $I_3(a)$ qui converge. Donc X admet une espérance et
   $$E(X) = 3a^3 I_3(a) = \frac{3a}{2}.$$

(d) Par Koenig-Huyguens,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une variance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_2(a)$ qui converge. Donc X admet (un moment d'ordre 2 et donc) une variance et

$$E(X^2) = 3a^3 I_2(a) = 3a^2.$$

On obtient alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} U(\Omega) =]0,1] &\Rightarrow (U^{1/3})(\Omega) =]0,1] \quad (\text{car } x \mapsto x^{1/3} \text{ est continue et croissante de }]0,1] \text{ dans }]0,1]) \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{U^{1/3}}\right)(\Omega) = [1,+\infty[\quad (\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est continue et décroissante de }]0,1] \text{ dans } [1,+ \\ &\Rightarrow Y(\Omega) = [a,+\infty[\quad (\text{en multipliant par } a > 0) \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, $F_Y(x) = 0$ si $x < a$. Soit donc $x \geq a$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P\left(a \exp\left(-\frac{1}{3}\ln(U)\right) \leq x\right) \\ &= P\left(U \geq \exp\left(-3\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) \\ &= 1 - F_U\left(\exp\left(-3\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) = 1 - F_U\left(\frac{a^3}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Or, si $x \geq a$, $a^3/x^3 \in]0;1]$ et donc $F_U(a^3/x^3) = a^3/x^3$. Au final, on obtient, pour $x \geq a$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^3}{x^3}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

ou encore $F_Y(x) = F_X(x)$, et on peut conclure que X et Y suivent la même loi.

(c) On va simuler la loi de X en simulant Y via *inversion* avec la formule précédente, à partir de la loi uniforme avec une opération pointée.

```
def simulX(a, m, n):
    U = rd.random([m, n])
    Y = a*U**(-1/3)
    return(Y)
```

4. (a) On utilise la fonction de répartition

$$P(X > 2a) = 1 - F_X(2a) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(2a)^3}\right) = \frac{1}{8}.$$

(b) La définition de probabilité conditionnelle donne

$$P_{[X>2a]}(X > 6a) = \frac{P([X > 6a] \cap [X > 2a])}{P(X > 2a)} = \frac{P(X > 6a)}{P(X > 2a)} = \frac{1 - (1 - a^3/(6a)^3)}{1/8} = \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}.$$

(c) L'idée est alors simuler un assez grand échantillon de X (ici $N = 10000$) et de compter (avec la variable `s1`) le nombre des réalisations de X pour lesquelles le résultat est strictement plus grand que $2a$. Parmi ces réalisations, on compte (avec la variable `s2`) celles qui sont strictement supérieures à $6a$). Le quotient des fréquences, qui est aussi égal au quotient `s2/s1` donne une estimation de la probabilité conditionnelle cherchée (seulement si `s1` > 0 sinon on diviserait par 0 mais dans ce cas la probabilité conditionnelle n'a pas de sens).

```
a = 10
N = 10000 #taille de l'é chantillon
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a, 1, N) #échantillon de X de taille N
    for k in range(1, N+1):
        if X(k) > 2*a:
                s1 = s1+1 #nbre de réalisations de X qui sont
 > 2a
                if X(k) >6*a:
                        s2 = s2+1
if s1>0:
    print(s2/s1)
```

5. (a) La variable aléatoire V_n est une fonction de l'échantillon dont la loi dépend de a; c'est donc un estimateur de a.

(b) On calcule son espérance. Par linéarité de celle ci, et comme les X_k ont toutes pour espérance $E(X) = 3a/2$, on a

$$E(V_n) = \frac{2}{3n}E(X_1 + ... + X_n) = \frac{2}{3n} \times n \times \frac{3a}{2} = a$$

On dit que V_n est bien un estimateur sans biais de a.
On calcule sa variance.

$$\begin{aligned}
V(V_n) &= V\left(\frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{4}{9n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \qquad \text{(prop de la variance)} \\
&= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)} \\
&= \frac{4}{9n^2} \times n \times V(X) = \frac{4}{9n}\frac{3a^2}{4} \\
&= \frac{a^2}{3n}.
\end{aligned}$$

6. (a) On pose $W_n = \min(X_1, ..., X_n)$.

$$\begin{aligned}
F_{W_n}(x) &= P(W_n \leq x) = 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) > x) \\
&= 1 - P([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap ... \cap [X_n > x]) \\
&= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)...P(X_n > x) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)} \\
&= 1 - (1 - F_X(x))^n
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - \dfrac{a^{3n}}{x^{3n}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

La fonction de répartition de W_n est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier au point de raccordement a et est de classe $\mathcal{C}^1$ partout sauf en a (les *morceaux* sont des combinaisons d'inverses de fonctions polynomiales qui ne s'annulent pas), W_n est bien une variable aléatoire à densité.

(b) Une densité de W_n est obtenue en dérivant F_{W_n} en dehors de a (et en prenant en $t = a$ une valeur arbitraire). En particulier,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{x^{3n+1}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

(c) Par définition,

$$\begin{aligned} W_n \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n}}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_{3n}(a)$ qui converge. Donc W_n admet une espérance et

$$E(W_n) = 3na^{3n} I_{3n}(a) = \frac{3na^{3n}}{(3n-1)a^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-1}a.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E\left(\frac{3n-1}{3n}W_n\right) = a,$$

donc il suffit donc de prendre $\lambda_n = \dfrac{3n}{3n-1}$ pour obtenir un estimateur sans biais de a.

(d) Pour calculer la variance de $\lambda_n W_n$, on a besoin de la variance de W_n et donc de son moment d'ordre 2. Par König-Huyguens,

$$\begin{aligned} W_n \text{ admet une variance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n-1}}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_{3n-1}(a)$ qui converge. Donc W_n admet (un moment d'ordre 2 et donc) une variance et

$$E(W_n^2) = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) = \frac{3n}{3n-2}a^2$$

On obtient alors

$$V(W_n) = E(W_n^2) - E(W_n)^2 = \left(\frac{3n}{3n-2} - \frac{(3n)^2}{(3n-1)^2}\right)a^2 = \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)}a^2$$

et enfin

$$V(\lambda_n W_n) = \lambda_n^2 V(W_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)}a^2 = \frac{a^2}{3n(3n-2)}.$$

7. (a) On complète sans difficulté. Chacune des m lignes de `X` est un $n-$échantillon de X.

```
def simulV(a, m, n)
    X = simulX(a, m, n)
    V = np.zeros(1, m)
    for k in range(m):
        V[k] = 2/(3*n)*np.sum(X[k, :])
    return(V)
```

(b) Parmi les deux suites représentées, l'une semble être très proche de 5 et l'autre oscille autour de 5. Comme chacune de ces deux suites semblent représenter les réalisations des deux estimateurs V_n et $\lambda_n W_n$ de a, on peut comprendre qu'on a pris $a = 5$. On a 20 points de chaque donc $m = 20$.

Les questions précédentes ont permis de voir, via le calcul de l'espérance et de la variance que $\lambda_n W_n$ était un meilleur estimateur de a, ce qui nous permet de comprendre que la suite représentée avec des + correspond aux termes de $(\lambda_n W_n)$ alors que la suite représentée avec des $\times$ est (V_n). On peut donc compléter le programme :

```
W = simulW(5, 20, 100)
V = simulV(5, 20, 100)
n = np.arange(1, 21, 1)
plt.plot(n, W, "+")
plt.plot(n, V, "x")
```
