Correction - DS 12 (A)

Devoir surveillé du Samedi 29 Mars

Exercice 1 (EML 2018)

1. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Par ailleurs,

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ (par croissances comparées).}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]0,1[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.

De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. A nouveau d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.

Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet que deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$: $a \in]0,1[$ et $b \in]1,+\infty[$.

3. On a $f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 \leq 2$ et $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 \geq 2$.

Donc $f(2) \leq f(b) \leq f(4)$. La fonction f étant croissante sur $[1,+\infty[$, on obtient $2 \leq b \leq 4$.

4. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien défini et $u_n \geq b$.

Ini. $u_0 = 4 \geq b$ d'après la question 3 donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq b > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien définie.
En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$ (car $f(b) = 2 \Leftrightarrow b - \ln(b) = 2 \Leftrightarrow \ln(b) = b - 2$). Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \geq b$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq b$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) + 2 - u_n = 2 - (u_n - \ln(u_n)) = 2 - f(u_n).$$

Mais $u_n \geq b$ d'après la question 4 et f est croissante sur $[b,+\infty[\subset [1,+\infty[$ d'après la question 1. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par b d'après la question 4, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2 \quad \text{ou encore} \quad f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.

6. (a) Considérons la fonction g définie par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction définie, continue et dérivable sur sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Puisque $b \geq 2$, on a :

$$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x, y \in [b, +\infty[, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y| .$$

Comme $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq b$ et $g(u_n) = u_{n+1}$, on a :

$$u_{n+1} - b = |u_{n+1} - b| = |g(u_n) - g(b)| \leq \frac{1}{2}|u_n - b| = \frac{1}{2}(u_n - b).$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.

(b) Avec la question 4, on a déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$".

Ini. Comme $b \in [2, 4]$ d'après la question 3, on a :

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Avec la question 6.(a) puis l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{(n+1)-1}}.$$

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

7. (a) Nous proposons la fonction suivante :

```
def suite(n):
  u = 4
  for i in range(1,n+1):
    u = np.log(u)+2
  return(u)
```

(b) Nous nous appuyons ici sur la question 6.(b) :

```
def valeur_approchee(epsilon):
  n = 0
  while (1/2**(n-1) > epsilon) do:
    n = n+1
  return(suite(n))
```

8. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet donc une primitive de classe $\mathscr{C}^1$ que l'on note G. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi(x) = G(2x) - G(x).$$

Donc Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\
&= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{(2x - \ln(2x))} - \frac{1}{(x - \ln(x))} \\
&= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}.
\end{aligned}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$x - \ln(x) = f(x) > 0 \quad \text{et} \quad 2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$$

donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$. Ainsi, Φ est croissante sur $]0, 2[$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.

10. Pour tout $t > 0$, on a avec la question 1 que $f(t) \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \leq \int_x^{2x} 1\, dt = (2x - x) = x.$$

11. (a) En appliquant le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée à la question 10, on obtient $\lim x \to 0^+ \Phi(x) = 0$.
Ainsi, Φ est prolongeable par continuité en 0, avec $\Phi(0) = 0$.
(b) Soit $x > 0$. On a

$$\Phi'(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{(-\ln(x))(-\ln(2x))} = -\frac{1}{\ln(2x)} \underset{x \to 0^+}{\to} 0.$$

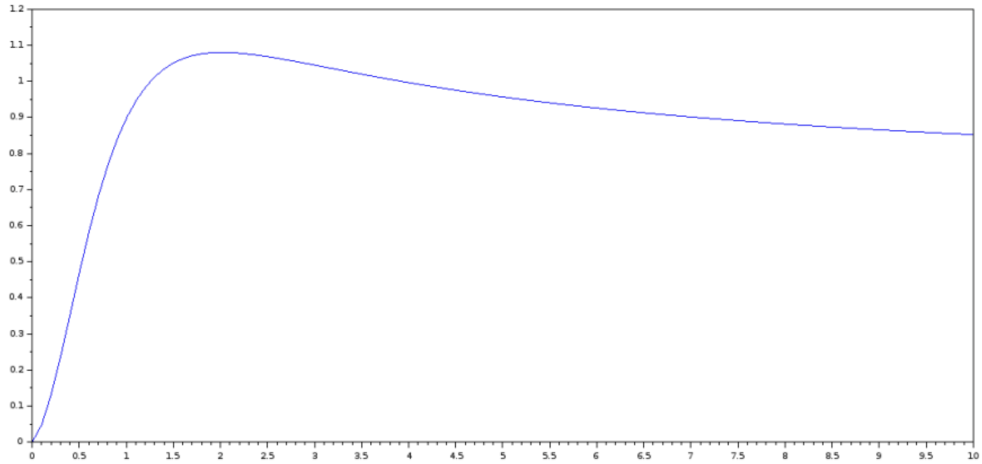
Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi'(x) = 0$.

12. On commence par observer que l'on a les éléments caractéristiques suivants :

- Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ en $+\infty$;
- Une tangente horizontale au point $(2, \Phi(2))$;

- Une (demi-)tangente horizontale au point $(0, \Phi(0))$.

On obtient alors un graphique ayant l'allure suivante :



13. (a) La fonction H est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, on peut donc calculer ses dérivées partielles premières et secondes. Ceci étant noté, on a :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \partial_1(H)(x,y) = x - y - 2 \quad \text{et} \quad \partial_2(H)(x,y) = -x + e^y.$$

(b) Soit $(x,y) \in U$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } H &\Leftrightarrow \nabla(H)(x,y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x + e^y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x = e^y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ y = \ln(x) \quad (\text{car } x > 0) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - \ln(x) = 2 \\ y = \ln(x) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ y = \ln(x) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ ou } b \\ y = \ln(x) \end{cases} \quad (\text{avec la question 2}) \\
&\Leftrightarrow (x,y) = (a, \ln(a)) \text{ ou } (b, \ln(b)).
\end{aligned}$$

Ainsi, les points critiques de H sont $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$.

14. (a) Pour tout $(x,y) \in U$, on a

$$\nabla^2(H)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$M_a = \nabla^2(H)(a, \ln(a)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Sp}(M_a) &\Leftrightarrow M_a - xI_2 \text{ non inversible} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & a-x \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
&\Leftrightarrow (1-x)(a-x) - 1 = 0 \text{ (avec le déterminant)} \\
&\Leftrightarrow x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0.
\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme (unitaire) de degré 2 dont on sait par ailleurs que ses deux racines sont les valeurs propres λ_1 et λ_2 de M_a. On a donc

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2-(a+1)x+(a-1)$$

c'est-à-dire, en développant le membre de gauche,

$$x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2 = x^2-(a+1)x+(a-1).$$

En identifiant les coefficients de ces deux polynômes, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = a+1 \\ \lambda_1\lambda_2 = a-1. \end{cases}$$

(c) On sait que $0<a<1$ donc $\lambda_1\lambda_2 = a-1<0$ et les valeurs propres de $M_a = \nabla^2(H)(a,\ln(a))$ sont donc de signes opposés. Ainsi, H présente un point col en $(a,\ln(a))$.

15. En procédant comme à la question 14, on a

$$M_b = \nabla^2(H)(b,\ln(b)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

de sorte que M_b admet deux valeurs propres distinctes μ_1 et μ_2 satisfaisant :

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2 = b+1 \\ \mu_1\mu_2 = b-1. \end{cases}$$

Puisque $b>1$, on a $\mu_1\mu_2>0$ donc μ_1 et μ_2 sont toutes deux strictement positives ou toutes deux strictement négatives. Mais puisque $\mu_1+\mu_2 = b+1>0$, on a nécessairement $\mu_1>0$ et $\mu_2>0$. Ainsi, H présente un minimum local en $(b,\ln(b))$.

Exercice 2 (EML 2023)

1. (a) La matrice A associée à (S) est telle que $(S) \Leftrightarrow X' = AX$. On obtient donc :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Voici les instructions `Python` demandées :

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> A = np.array([[3, 1, 1], [1, 3, 1], [1, 1, 3]])
```

(c) On calcule ici le rang des matrices $A-2I_3$ et $A-5I_3$. Comme le rang obtenu est <3, les matrices $A-2I_3$ et $A-5I_3$ sont non-inversibles donc 2 et 5 sont valeurs propres de A. Avec le théorème du rang, on déduit de plus des résultats obtenus avec `Python` que :

$$\dim(E_2(A)) = \dim(Ker(A-2I)) = 3-rg(A-2I) = 2,$$

et

$$\dim(E_5(A)) = \dim(Ker(A-5I)) = 3-rg(A-5I) = 1.$$

(d) Comme les valeurs propres potentielles sont données à la question précédente, on ne fait pas le pivot et on passe directement à la recherche des sous-espaces propres. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow x+y+z = 0 \Leftrightarrow x = -y-z$$

Donc $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$. Comme $E_2(A) \neq \{0\}$, 2 est bien valeur propre de A. Les deux vecteurs obtenus sont non colinéaires donc ils forment une famille libre. C'est aussi une famille génératrice de $E_2(A)$ et c'est donc une base de $E_2(A)$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_5(A) \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc $E_5(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Comme $E_5(A) \neq \{0\}$, 5 est bien valeur propre de A. Le vecteur obtenu est non nul donc il forme une famille libre. C'est aussi une famille génératrice de $E_5(A)$ et c'est donc une base de $E_5(A)$.

Il n'y a pas d'autre valeur propre car on a déjà obtenu 2 avec $E_2(A)$ de dimension 2 et 5 avec $E_5(A)$ de dimension 1 et A est une matrice carrée de taille 3.

2. Comme A est symétrique réelle, c'est une matrice diagonalisable (on peut aussi le démontrer par concaténation...). D'après la question précédente, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Le système différentiel (S) s'écrit sous forme matricielle $X' = AX$ où $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ et x, y z sont des fonctions dérivables.

Comme A est diagonalisable, on sais, d'après le cours, que la solution générale de (S) est alors :

$$X : t \mapsto \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \gamma e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

avec α, β, γ des réels.

4. (a) Le résultat qui permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\\z_0(t)\end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

(b) D'après la question 4, il existe α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout t réel :

$$X_0(t) = \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \gamma e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Puis on a les équivalences :

$$X_0(0) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + \beta + \gamma & = 1\\ -\alpha \quad\ + \gamma & = -1\\ \quad - \beta + \gamma & = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \gamma\\ \alpha + 2\beta = 1\\ -\alpha + \beta = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = \gamma = 0\end{cases}$$

On a ainsi : $X_0 : t \mapsto e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

5. (a) On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in Sp(B) &\Leftrightarrow B-\lambda I \text{ non inversible}\\ &\Leftrightarrow det(B-\lambda I)=0\\ &\Leftrightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda)+4=0\\ &\Leftrightarrow (\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1.\end{aligned}$$

La matrice B admet une seule valeur propre qui est 1.

(b) Supposons que la matrice B soit diagonalisable. On peut alors écrire $B = PDP^{-1}$ avec $D = I$ (car $Sp(B) = \{1\}$ et P inversible, donc $B = I$, ce qui est absurde.
La matrice B n'est pas diagonalisable.

6. (a) Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, donc $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) On a :

$$B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et } B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

Donc $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = v_1 + v_2$ et donc :

$$T = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) Avec la formule de changement de base, on a :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'}(f)P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}T(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}.$$

On prend donc Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ qui est :

$$Q = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}.$$

7. (a) On a les équivalences suivantes :

$$X' = BX \Leftrightarrow X' = QTQ^{-1}X \Leftrightarrow Q^{-1}X' = TQ^{-1}X \Leftrightarrow (Q^{-1}X)' = TQ^{-1}X \Leftrightarrow Y' = TY,$$

par linéarité de la dérivation à la troisième équivalence.

(b) Posons $y_p(t) = te^t$. y_p est dérivable et $y_p'(t) = e^t + te^t$. On a alors :

$$y_p'(t) - y_p(t) = e^t + te^t - te^t = e^t.$$

Ainsi, $t \mapsto te^t$ est bien solution particulière de $y' - y = e^t$.

(c) On pose $Y = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$. Alors :

$$Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} u' = u + v\\ v' = v\end{cases}$$

Comme $v' - v = 0$, $v(t) = \lambda e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (solution d'une équation différentielle du premier ordre).
On a donc $u' - u = \lambda e^t$. D'après la question 7.(b) et le principe de superposition, $t \mapsto \lambda te^t$ est une solution particulière de cette équation différentielle. Et les solutions de l'équation différentielle homogène associées sont de la forme $t \mapsto \mu e^t$. Donc $u(t) = \lambda te^t + \mu e^t$.
Finalement, les solutions de $Y' = TY$ sont :

$$Y(t) = \begin{pmatrix}\lambda te^t + \mu e^t\\ \lambda e^t\end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels.}$$

(d) On a finalement avec la question 6.(a) et la question précédente :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (\Sigma) &\Leftrightarrow X' = BX \Leftrightarrow Y' = TY \\ &\Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda t e^t + \mu e^t \\ \lambda e^t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X(t) = Q \begin{pmatrix} \lambda t e^t + \mu e^t \\ \lambda e^t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} 2\lambda t e^t + 2\mu e^t - \lambda e^t \\ -\lambda t e^t - \mu e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec λ et μ deux réels.

Exercice 3 (EML 2017)

1. Voici le programme demandé :

```python
def EML(n):
    b = 1 #nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 #nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 #nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k in range(n):
        x = rd.random()
        if x<=r/(r+b) :  #si la boule tirée est rouge
            r = r+1 #on augmente le nombre de rouges dans l'urne
            s = s+1 #on augmente le nombre de rouges tirées
        else:
            b = b+1 #on augmente le nombre de bleues dans l'urne
    return(s)
```

2. On répète ici 1000 fois l'expérience de 10 tirages, m compte le nombre total de boules rouges obtenues et $m/1000$ le nombre moyen de boules rouges obtenues lors de 10 tirages (ce qui sera noté $E(S_{10})$ dans la suite du problème).

   On peut penser que $E(S_{10}) \approx 6.66 = \dfrac{20}{3}$.

3. (a) Tout d'abord, comme il y remise de boules dans l'urne, il est clair que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\ &= P(R_1) P_{R_1}(R_2) P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \ldots P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(B_n) \\ &= \frac{2}{3} . \frac{3}{4} . \frac{4}{5} \cdots \frac{2+(n-2)}{3+(n-2)} . \frac{1}{3+(n-1)} \\ &= \frac{2}{3} . \frac{3}{4} . \frac{4}{5} \cdots \frac{n}{n+1} . \frac{1}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

   avec :

   - pour la deuxième égalité, les évènements n'étant pas indépendants, la formule des probabilités composées ;
   - pour la troisième égalité, $P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap Rk-1}(R_k)$ est le quotient du nombre de boules rouges dans l'urne $(2+(k-1))$ par le nombre total de boules dans l'urne $(3+(k-1))$.

   (b) Comme $nP(Y=n) = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n} > 0$, la série qui définit $E(Y) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} nP(Y=n)$ est de même nature que la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (par comparaison de séries à termes positifs), c'est-à-dire divergente. Donc la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance et donc pas de variance non plus.

4. Comme pour Y, il est clair que Z peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= P(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3)\ldots P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}\ldots\frac{1+(n-2)}{3+(n-2)}.\frac{2}{3+(n-1)} \\ &= \frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}\ldots\frac{n-1}{n+1}.\frac{2}{n+2} = \frac{2.2}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Comme $nP(Z=n) = \dfrac{4n}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2} > 0$, la série qui définit $E(Z) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} n.P(Z=n)$ est de même nature que la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ (par comparaison de séries à termes positifs), c'est-à-dire convergente. Donc la variable aléatoire Z admet une espérance.

Par contre, $n^2P(Z=n) = \dfrac{4n^2}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n} > 0$, donc la série qui définit $E(Z^2) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2P(Z=n)$ est de même nature que la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ (par comparaison de séries à termes positifs), c'est-à-dire divergente. Donc la variable aléatoire Z n'admet pas de variance.

5. X_k étant le nombre de boules rouges tirées (0 ou 1) au k-ième tirage et S_n le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages. Donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

6. La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1=1) = P(R_1) = \dfrac{2}{3}$.

   Son espérance est donc $E(X_1) = \dfrac{2}{3}$ et sa variance $V(X_1) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$.

7. (a) On a $(X_1, X_2)(\Omega) = [\![0,1]\!]^2$. De plus :

$$\begin{aligned} P((X_1=0)\cap(X_2=0)) &= P(B_1\cap B_2) = \frac{1}{3}.\frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\ P((X_1=0)\cap(X_2=1)) &= P(B_1\cap R_2) = \frac{1}{3}.\frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\ P((X_1=1)\cap(X_2=0)) &= P(R_1\cap B_2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{6} \\ P((X_1=1)\cap(X_2=1)) &= P(R_1\cap R_2) = \frac{2}{3}.\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   (b) La variable aléatoire X_2 suit aussi une loi de Bernoulli dont le paramètre est à déterminer. Avec le SCE $((X_1=0),(X_1=1))$, on a par incompatibilité :

$$P(X_2=1) = P((X_1=0)\cap(X_2=1)) + P((X_1=1)\cap(X_2=1)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

   (c) Comme $P(X_1=0)\times P(X_2=0) = \dfrac{1}{9}$ et $P((X_1=0)\cap(X_2=0)) = \dfrac{1}{6}$, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

8. (a) Comme précédemment, en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right) &= \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\cdots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \\
&= \frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\cdots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \\
&= \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

(b) L'événement $(S_n = k)$ se réalise lorsque sur n tirages, il apparait k boules rouges et $n-k$ boules blanches dans un ordre indéterminé.

Pour calculer la probabilité d'avoir k boules rouges et $n-k$ boules blanches dans un ordre déterminé, on ferait un calcul analogue au précédent pour obtenir finalement le même résultat qu'au (a) (car le dénominateur est déterminé par les nombres successifs de boules dans l'urne et le numérateur correspond au nombre de boules blanches ou rouge au cours des n tirages : ce sont les mêmes qu'au (a) dans un ordre différent), on a donc finalement :

$$P\left(k \text{ rouges et } n-k \text{ boules blanches, dans un ordre déterminé}\right) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}.$$

$(S_n = k)$ est donc la réunion disjointe d'événements incompatibles de même probabilité. Chacun de ces événements correspondant aux ordres d'apparition des k boules rouges et des $n-k$ boules blanches, il y en a donc autant que de manières de placer k "R" parmi n places possibles, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. Finalement :

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = k\right) &= \binom{n}{k} P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc S_n admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP\left(S_n = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k\right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(2n+1)}{3} + 1\right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{2}\frac{2(n+2)}{3} = \frac{2n}{3}.
\end{aligned}$$

10. (a) Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $P_{(S_n=k)}\left(X_{n+1} = 1\right)$ est la probabilité de tirer au $n+1$-ième tirage une boule rouge dans une urne qui, après n tirages ayant amené k rouges, contient $n+3$ boules dont $2+k$ sont rouges. On a donc bien :

$$P_{(S_n=k)}\left(X_{n+1} = 1\right) = \frac{k+2}{n+3}.$$

(b) Avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{k\in[\![0;n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=1) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n}(S_n=k)\cap(X_{n+1}=1)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} P((S_n=k)\cap(X_{n+1}=1)) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{(S_n=k)}(X_{n+1}=1)\,P(S_n=k) \quad \text{(formules des probas composées)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{n+3}P(S_n=k) = \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n}kP(S_n=k)+\sum_{k=0}^{n}2P(S_n=k)\right)\\
&= \frac{1}{n+3}(E(S_n)+2) = \frac{E(S_n)+2}{n+3}.
\end{aligned}$$

(c) X_{n+1} suit une loi de Bernoulli et, puisque $E(S_n)=\dfrac{2n}{3}$, son paramètre est :

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{E(S_n)+2}{n+3} = \frac{\frac{2n}{3}+2}{n+3} = \frac{\frac{2n+6}{3}}{n+3} = \frac{2}{3}.$$

On remarque que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

11. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $S_n(\Omega)=[\![0;n]\!]$ donc $T_n(\Omega)=\left\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right\}\subset[0,1]$.

    Ainsi, $\forall x<0$, $P(T_n\le x)=0$ et $\forall x>1$, $P(T_n\le x)=1$.

12. Soit $x\in[0,1]$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$:

$$P(T_n\le x) = P(S_n\le nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}P(S_n=k) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

d'après le résultat de la question 8.(b). Ainsi,

$$P(T_n\le x) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=1}^{\lfloor nx\rfloor+1} j,$$

par changement d'indice $j=k+1$. Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$ donc, avec $m=\lfloor nx\rfloor+1$ on obtient :

$$P(T_n\le x) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\frac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{2} = \frac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

13. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction de répartition de T_n est donnée par :

$$P(T_n\le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0,\\ \dfrac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} & \text{si } x\in[0,1],\\ 1 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Étudions la limite de $\dfrac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)}$ lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(\lfloor nx\rfloor+1)}{(n+1)}.\frac{(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+2)}$$

Or, $\dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
Et pour tout $x \in [0,1]$,

$$nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx \Rightarrow x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

Ainsi d'après le théorème de l'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} = x$.

De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)} = x$.

Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(T_n \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Notons $G(x)$ cette fonction. Il reste à prouver que G est la fonction de répartition d'une variable à densité.

- G est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^-} G(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = 0 = G(0)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} G(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} G(x) = 1 = G(1)$ donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
- G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
- G est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$

Ainsi, G est la fonction de répartition d'une variable à densité dont une densité est :

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0,1[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

en prenant comme valeurs arbitraires positives $g(0) = g(1) = 0$.

Ainsi, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable à densité T dont la fonction de répartition est G et une densité est g.