Correction - DS 12 (B)

Devoir surveillé du Samedi 30 Mars

Exercice 1 (EDHEC 2021)

1. f est une fonction polynomiale en x et y, donc elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) On a $\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x$.

   (b) Les points critiques de f sont les couples (x,y) qui annulent les dérivées partielles d'ordre 1. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

   Donc f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

3. (a) On a $\partial^2_{1,1} f(x,y) = 6x$, $\partial^2_{2,2} f(x,y) = 6y$ et $\partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial^2_{1,2} f(x,y) = -3$.

   (b) La matrice Hessienne de f en (x,y) vaut : $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $\nabla^2 f(x,y)$ sont les réels λ pour lesquels $\nabla^2 f(x,y) - \lambda I$ est non inversible.

   - Au point $(0,0)$:

$$\nabla^2 f(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

     Donc

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -\lambda \\ -\lambda & -3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -\lambda \\ 0 & (\lambda-3)(\lambda+3) \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - \lambda L_1$$

     Les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(0,0)$ sont donc 3 et -3 qui sont de signe opposés et donc f n'a pas d'extremum au point $(0,0)$.

   - Au point $(1,1)$:

$$\nabla^2 f(1,1) - \lambda I = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix}.$$

     Donc

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 6-\lambda \\ 6-\lambda & -3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 6-\lambda \\ 0 & (\lambda-3)(\lambda-9) \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 + (6-\lambda)L_1$$

     Les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(1,1)$ sont 3 et 9 et sont strictement positives donc f admet un minimum local en $(1,1)$ qui vaut $f(1,1) = -1$.

4. $f(1,1) = -1$ n'est pas un minimum global puisque $f(0,-2) = -8 < f(1,1)$.

5. On a $g(x) = f(x, 1) = x^3 - 3x + 1$. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$
D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les limites, $g(x) \underset{-\infty}{\sim} x^3 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

On en déduit donc que :

- Sur $]-\infty, 1]$: $g(x) \leq 3$ donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution dans $]-\infty, 1]$.
- Sur $]1, +\infty[$: g est continue et strictement croissante de $]1, +\infty[$ donc $]-1, +\infty[$. Par le théorème de la bijection, c'est donc une bijection de $]1, +\infty[$ donc $]-1, +\infty[$. Pour tout n supérieur ou égal à 4 appartient, $n \in]-1, +\infty[$ donc l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution dans $]1, +\infty[$, que l'on notera u_n.

6. (a) Comme h est une bijection continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$, sa bijection réciproque h^{-1} est elle aussi continue et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, d'où son tableau de variation :

x	-1		$+\infty$
$h^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Comme $u_n \in]1, +\infty[$, on a : $g(u_n) = h(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = h^{-1}(n)$, par conséquent :
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} h^{-1}(n) = +\infty.$$

(c) La définition de u_n donne $n = g(u_n) = u_n^3 - 3u_n + 1 = u_n^3 \left(1 - \frac{3}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^3}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n^3$.

Par conséquent, $u_n^3 \underset{n \to +\infty}{\sim} n$.

Puisque l'équivalence est compatible avec les puissances, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{1/3}$. Donc $\alpha = \frac{1}{3}$.

Exercice 2 (EDHEC 2016)

1. $A^2 - 4A = -4I$. Ainsi, le polynôme $P(X) = X^2 - 4X + 4$ est un polynôme annulateur de A.

2. (a) Les seules valeurs propres possibles sont les racines de P. Or $P(X) = (X - 2)^2$ donc 2 est donc la seule racine de P et donc la seule valeur propre possible de A. Vérifions que 2 est bien valeur propre de A.
$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est non inversible car } L_1 = L_3.$$
Donc $Sp(A) = \{2\}$.

(b) Supposons que A est diagonalisable. Alors il existe P inversible et D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1} \underset{Sp(A)=\{2\}}{=} P \times 2I_3 \times P^{-1} = 2I_3.$$

On aboutit à une contradiction donc A n'est pas diagonalisable.
Comme $0 \notin Sp(A)$, A est inversible.

3. On détermine $E_2(A)$:

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + c = 2a \\ 2a + 2c = 2b \\ a - b + 3c = 2c \end{cases} \Leftrightarrow a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = a + c$$

Donc $X = \begin{pmatrix} a \\ a+c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le système $AX = 2X$ admet des solutions non nulles donc 2 est valeur propre de A et :

$$E_2(A)=\text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a donc $Ker(f - 2Id) = Vect(\{(1,1,0);(0,1,1)\})$. On peut donc poser $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$ pour la suite de l'exercice.

4. (a) On a $u_3 = (1,1,1)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace de dimension 3, donc il suffit de démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$.
Soient alors trois réels a, b et c tels que $au_1 + bu_3 + cu_4 = 0$. Cette relation implique :

$$a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,1,1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Ainsi, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = (3,4,3) = u_1 + u_2 + 2u_3$. Ainsi, la matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est bien une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 2.

(c) $T = 2I + N$ avec :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $N^2 = 0$. De plus, les matrices I et N commutent. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} = 2^n I + n2^{n-1} N = 2^n I + n2^{n-1}(T - 2I) = n2^{n-1} T - (n-1)2^n I$$

5. (a) Notons P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u_1, u_2, u_3). D'après la formule du changement de base,

$$T = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PTP^{-1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} T^n = n2^{n-1}T - (n-1)2^n I \quad &\Leftrightarrow \quad PT^nP^{-1} = P(n2^{n-1}T - (n-1)2^n I)P^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad A^n = n2^{n-1}PTP^{-1} - (n-1)2^n PP^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I \end{aligned}$$

(b) D'après la première question,

$$A^2 - 4A = -4I \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(A-4I)A = A\left(-\frac{1}{4}(A-4I)\right) = I.$$

Ainsi, $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A-4I)$.

(c) Si on pose $n = -1$ dans la formule de la question 5.(a), on a :

$$A^{-1} = -2^{-2}A + I = -\frac{1}{4}(A-4I)$$

La formule du 5.(a) reste donc valable pour $n = -1$.

Exercice 3 (EDHEC 2021)

1. (a) Les variables aléatoires X_1 et Y_1 correspondent au rang d'apparition pour la première fois de l'événement "obtenir pile", qui est de probabilité p, au cours d'une succession d'épreuves identiques. X_1 et Y_1 suivent donc la loi géométrique de paramètre p :

$$X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 = k) = P(Y_1 = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p$$

La première manche dure éternellement si, et seulement si, A et B n'obtiennent jamais pile. Donc :

$$P(\text{"première manche éternelle"}) = P\left(\text{"A jamais pile"} \cap \text{"B jamais pile"}\right).$$

Or $P\left(\text{"A n'a jamais pile"}\right) = 0$, car :

$$\begin{aligned} P\left(\text{"A n'a jamais pile"}\right) &= 1 - P\left(\text{"A obtient un pile"}\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \\ &= 1 - p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= 1 - p\frac{1}{1-q} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$0 \leq P(\text{"première manche éternelle"}) \leq P\left(\text{"A n'a jamais pile"}\right) = 0$$

donc $P\left(\text{"A n'a jamais pile"}\right) = 0$.

(b) E_1 est réalisé si, et seulement si, X_1 et Y_1 prennent la même valeur, donc $E_1 = (X_1 = Y_1)$.

(c) D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $(Y_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_1 \cap (Y_1 = i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_1 \cap (Y_1 = i)) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = Y_1) \cap (Y_1 = i))\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (Y_1 = i))\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i) \quad \text{(par indépendance)}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{k-1}p = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} = p^2 \frac{1}{1-q^2}\\
&= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q}.
\end{aligned}$$

(d) Les joueurs A et B ont les mêmes pièces et les lancent dans les mêmes conditions, donc les probabilités que A ou B gagnent sont les mêmes.
On a donc $P(G_1) = P(H_1)$ et G_1 et H_1 sont équiprobables.
A ou B gagne ou alors il y a égalité, donc les événements G_1, H_1 et E_1 forment un système complets d'événements. On en déduit que :

$$1 = P(G_1) + P(H_1) + P(E_1) = 2P(G_1) + P(E_1)$$

Par conséquent :

$$P(G_1) = \frac{1}{2}(1 - P(E_1)) = \frac{1}{2}(1 - \frac{p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{1+q-p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{2q}{1+q}) = \frac{q}{1+q}.$$

2. (a) L'événement G_n est réalisé si, et seulement si, les $n-1$ premières manches ont donné égalité et si A obtient pile avant B à la n-ième manche, donc :

$$G_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n < Y_n).$$

(b) Pour entier $k \geq 2$,

$$P_{E_1\ldots E_{k-1}}(E_k) = P(\text{"égalité à la k-ième manche"}) = P(E_1) = \frac{p}{1+q}$$

D'après la formule des probabilités composées, pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
P(G_n) &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n < Y_n))\\
&= P(E_1)P_{E_1}(E_2)\ldots P_{E_1\ldots E_{n-2}}(E_{n-1})P_{E_1\ldots E_{n-1}}(X_n < Y_n)\\
&= \frac{p}{1+q}\cdots\frac{p}{1+q}\frac{q}{1+q} = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

(c) Pour $n = 1$, on a bien :

$$\left(\frac{p}{1+q}\right)^{1-1}\frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} = P(G_1).$$

(d) A gagne lorsque qu'il gagne une manche numéro n, pour un n dans $\mathbb{N}^*$, on a donc :

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n.$$

Les événements $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles (car A ne peut pas gagner à deux manche différentes) , on a donc :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \\ &= \frac{q}{1+q} \frac{1}{1-\frac{p}{1+q}} = \frac{q}{1+q} \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} = \frac{q}{1+q-p} = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(e) Par symétrie (A et B ont autant de chance de gagner l'un que l'autre), on obtient la probabilisé de l'événement H :

$$P(H) = P(\text{"B gagne à ce jeu"}) = P(\text{"A gagne à ce jeu"}) = P(G) = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$P(\text{"ce jeu a une fin"}) = P(\text{"A ou B gagne" }) = P(G) + P(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

puis finalement :

$$P(E) = P(\text{"ce jeu s'éternise"}) = 0.$$

3. (a) D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} P(Y_1 = X_1 + 1) &= P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} (Y_1 = X_1 + 1) \cap (X_1 = i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((Y_1 = X_1 + 1) \cap (X_1 = i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((Y_1 = i + 1) \cap (X_1 = i)) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i + 1) P(X_1 = i) \quad \text{(par indépendance de } X_1 \text{ et } Y_1) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^i p q^{i-1} p = p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} = p^2 q \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{p^2 q}{(1-q)(1+q)} = \frac{pq}{1+q}. \end{aligned}$$

(b) La probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart est :

$$u = P(Y_1 = X_1 + 1) + P(X_1 = Y_1 + 1).$$

Donc, toujours par symétrie :

$$u = P(Y_1 = X_1 + 1) + P(X_1 = Y_1 + 1) = \frac{pq}{1+q} + \frac{pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q}.$$

4. (a) On a :

$$K_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap [(X_n = Y_n + 1) \cup (Y_n = X_n + 1)].$$

(b) Donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(K_n) &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap ([(X_n = Y_n + 1) \cup (Y_n = X_n + 1)]) \\ &= P(E_1) P_{E_1}(E_2) \ldots P_{E_1 \ldots E_{n-2}}(E_{n-1}) P_{E_1 \ldots E_{n-1}}((X_n = Y_n + 1) \cup (Y_n = X_n + 1)) \\ &= \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q} \frac{2pq}{1+q} = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}. \end{aligned}$$

5. A gagne ce pari s'il le gagne à une manche numéro n, pour un des n de $\mathbb{N}^*$. On a donc :

$$K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n.$$

Les événements $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles, donc :

$$\begin{aligned} P(K) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{1 - \dfrac{p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{\dfrac{1+q-p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q-p} = \frac{2pq}{2q} = p. \end{aligned}$$

6. Voici le programme complété :

```python
p = float(input('entrez une valeur pour p:'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y :  #  tant qu il y a égalité ...
    X = rd.geometric(p)  #  ...on recommence une manche...
    Y = rd.geometric(p)
    c = c+1  #  ...et on incrémente le compteur des manches
if X<Y :
    print('A gagne')
else :
    print('B gagne')
print(c)
```

7. A gagne le 2-ième jeu lorsque $X = Y + 1$ ou $Y = X + 1$, c'est à dire lorsque $|X - Y| = 1$.

Pour simuler le deuxième jeu et en donner le nom du vainqueur, on rajoute :

```python
if np.abs(X-Y) == 1 :
    print('A gagne le deuxième jeu')
else:
    print('B gagne le deuxième jeu')
```

Exercice 4 (EDHEC 2019)

1. f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $x_0 = 1$.

Calculons $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$:

$$I = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Pour $A \geq 1$,

$$\frac{1}{\theta}\int_1^A x^{-1-1/\theta}\ dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^{-1-1/\theta+1}}{-1+1/\theta+1}\right]_1^A = -\left[x^{-1/\theta}\right]_1^A = 1-\frac{1}{A^{1/\theta}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $I = 1$ et f est bien une densité.

2. Déterminons les conditions d'existence et la valeur des moments d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{aligned} m_n(x) \text{ existe } &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\ dx \quad \text{converge} \iff \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty}\frac{x^n}{x^{1+1/\theta}}\ dx \quad \text{converge} \\ &\iff \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{1+1/\theta-n}}\ dx \quad \text{converge} \\ &\iff 1+\frac{1}{\theta}-n > 1 \iff n < \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

Or $\theta \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ donc $\frac{1}{\theta} \in]2,+\infty[$. Donc $m_n(X)$ existe pour $n=1$ et $n=2$.
$E(X)$ et $E(X^2)$ existent donc $V(X)$ existe.

Pour $n \leq 2$, $m_n(X) = \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} x^{-1-1/\theta+n}\ dx$. On a alors :

$$m_n(X) = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\theta}\times\frac{1}{-1/\theta+n}\left[x^{-1/\theta+n}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{n\theta-1}\left(\frac{1}{A^{-1/\theta+n}}-1\right) = \frac{1}{1-n\theta}$$

En particulier $E(X) = \frac{1}{1-\theta}$ et $E(X^2) = \frac{1}{1-2\theta}$. Avec Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2)-E(X)^2 = \frac{1}{1-2\theta}-\frac{1}{1-\theta^2} = \frac{(1-\theta)^2-(1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-\theta)^2} = \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}.$$

Finalement, on a obtenue $E(X) = \frac{1}{1-\theta}$ et $V(X) = \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\ dt$.

   Pour $x < 1$, $F(x) = 0$.

   Pour $x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt = 1-\frac{1}{x^{1/\theta}}$ (voir calculs de la question 1).

4. (a) Nécessairement, $F(x) = \frac{1}{2}$ est impossible si $x < 1$. Pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{1}{2} &\iff 1-\frac{1}{x^{1/\theta}} = \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{1}{x^{1/\theta}} = \frac{1}{2} \\ &\iff x^{1/\theta} = 2 \\ &\iff \frac{1}{\theta}\ln(x) = \ln(2) \\ &\iff x = e^{\theta\ln(2)} = 2^\theta \end{aligned}$$

   Donc $M_e = 2^\theta$.

   (b) $2^x(1-x) \leq 1 \iff x\ln(2)+\ln(1-x) \leq 0$.

   Posons $h(x) = x\ln(2)+\ln(1-x)$ pour $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

h est C^∞ et $h'(x) = \ln(2) - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x\ln(2) - 1 + \ln(2)}{1-x}$ qui est du signe du numérateur.

Or $-1+\ln(2)$ est négatif donc $h'(x) < 0$. h est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $h(0) = 0$.

Donc $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \quad 2^x(1-x) \leq 1$.

(c) $E(X) - M_e = \dfrac{1}{1-\theta} - 2^\theta = \dfrac{1 - 2^\theta(1-\theta)}{1-\theta} \geq 0$ d'après ce qui précède.

Donc $\forall \theta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $E(X) \geq M_e$.

5. (a) On a :

$$\begin{aligned}
P_{(X>a)}(X > a+b) &= \frac{P((X > a+b) \cap (X > a))}{P(X > a)} = \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} \\
&= \frac{1 - F(a+b)}{1 - F(a)} = \frac{\dfrac{1}{(a+b)^{1/\theta}}}{\dfrac{1}{a^{1/\theta}}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}
\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{a+\infty} \dfrac{a}{a+b} = 1$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} P_{(X>a)}(X > a+b) = 1$.
On peut interpréter cela en remarquant que si l'appareil fonctionne longtemps, il est presque certain qu'il fonctionne beaucoup plus longtemps.

6. (a) $G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$ (par croissance de exp).

(b) Si $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $F(e^x) = 1 - \dfrac{1}{(e^x)^{1/\theta}} = 1 - e^{-x/\theta}$

Si $x < 0$, $e^x < 1$ donc $F(e^x) = 0$.
Ainsi, $G(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ si $x \geq 0$ et $G(x) = 0$ sinon.
On reconnaît une loi exponentielle : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$

7. On utilise les instructions :

```python
def simulX(theta):
    lambda = 1/theta
    Y = rd.exponentielle(1/lambda)
    X = np.exp(Y)
    return(X)
```

8. (a) T_n est un estimateur de θ car c'est une fonction ne dépendant pas de θ et dépendant des variables aléatoires Y_k identiques et indépendantes. C'est l'estimateur de référence pour estimer $E(Y) = \theta$ appelé moyenne empirique.

(b) Par linéarité de l'espérance,

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \frac{1}{n} \times n\theta = \theta.$$

Pour la variance :

$$\begin{aligned}
V(T_n) &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) \quad \text{(par indépendance des } Y_k\text{)} \\
&= \frac{nV(Y)}{n^2} = \frac{V(Y)}{n} = \frac{\theta^2}{n}
\end{aligned}$$

9. (a) Comme T_n admet une variance, on peut appliquer l'inégalité de BT :
$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

(b) L'inégalité précédente donne ici : $P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$ donc $P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$.
Or :
$$\begin{aligned} |T_n - \theta| < \varepsilon &\implies |T_n - \theta| \leq \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon \leq T_n - \theta \leq \varepsilon \\ &\iff T_n - \varepsilon \leq \theta \leq T_n + \varepsilon \\ &\iff \theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon] \end{aligned}$$

On a donc :
$$P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}.$$

(c) $\theta \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\theta^2 \leq \dfrac{1}{4}$. Avec $n = 1000$, $\dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2}$ donc $1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \dfrac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2}$
On cherche ε pour avoir $1 - \dfrac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2} \geq 0,9$
$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2} \geq 0,9 &\iff \frac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2} \leq 0,1 \\ &\iff 4 \times 10^2 \varepsilon^2 \geq 1 \\ &\iff \varepsilon^2 \geq \frac{1}{400} \\ &\iff \varepsilon \geq \frac{1}{20} \end{aligned}$$

On prend $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$, c'est-à-dire $\varepsilon = 0,05$, on a donc, avec $n = 1000$: $P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq 0,9$.
On peut conclure : $[T_{1000} - 0,05; T_{1000} + 0,05]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $0,9$.