Correction - DS 1 (A)

Devoir surveillé du Samedi 4 Septembre

Exercice 1

1. Voici la procédure qui permet de calculer u_n et v_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
u=1
v=2
for k=1:n do
    x=u
    y=v
    u=(x+y)/2
    v=(u+y)/2
end
disp(v,u)
```

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2}=\frac{\frac{v_n-u_n}{2}}{2}=\frac{v_n-u_n}{4}.$$

(b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$v_n-u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation : $v_0-u_0=2-1=1=\left(\frac{1}{4}\right)^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

On a:

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{4}(v_n-u_n)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1},$$

en utilisant la question 2.(a) à la première égalité et l'hypothèse de récurrence à la deuxième. On a ainsi montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, on a pour tout entier naturel n, $v_n-u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

3. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\geq 0,\\
v_{n+1}-v_n &= \frac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\frac{u_{n+1}-v_n}{2}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}-v_n}{2}=\frac{\frac{u_n-v_n}{2}}{2}\\
&= \frac{u_n-v_n}{4}=-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\leq 0,
\end{aligned}$$

en utilisant la question 2.(b). Donc (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

(b) Toujours avec la question 2.(b), $v_n-u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, car $\frac{1}{4}\in]-1,1[$.

Donc, comme (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite qu'on note ℓ.

(c) Voici la procédure pour obtenir une approximation de ℓ :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=1
v=2
while abs(v-u)>eps do
    x=u
    y=v
    u=(x+y)/2
    v=(u+y)/2
end
disp(v,u)
```

4. (a) D'après la question 2.(b), $w_n = v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

(b) Par définition des suites (u_n) et (v_n), on a, pour tout entier $k \geq 1$:

$$w_k = v_k - u_k = \frac{u_k + v_{k-1}}{2} - \frac{u_{k-1} + v_{k-1}}{2} = \frac{u_k - u_{k-1}}{2}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}((u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1})) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(u_n - u_0) = 1 + \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}(u_n + 1). \end{aligned}$$

(c) Ainsi, avec les deux questions précédentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2}(u_n + 1).$$

Donc :

$$u_n = 2\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \times \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3},$$

car $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$.

Ainsi, (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$ et donc $\ell = \frac{5}{3}$.

Exercice 2

1. $f(x)$ est définie si $x > 0$ et si $x^2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

   f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. (a) $P(1) = 3 - 1 - 2 = 0$ donc 1 est racine de P et P se factorise par $(x-1)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

Alors $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$ si et seulement si, par identification,

$$\begin{cases} a &= 3 \\ b-a &= 0 \\ c-b &= -1 \\ -c &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 3 \\ c &= 2 \end{cases}$$

Donc $P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$.
On cherche ensuite à factoriser $3x^2+3x+2$. Comme son discriminant est $\Delta = 9-24 = -16 < 0$, $3x^2+3x+2$ ne se factorise pas.
Ainsi, la forme factorisée de P est $P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$.

(b) On a alors:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2+3x+2$			$+$		
$P(x)$		$-$	0	$+$	

(c) g est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x} = \frac{P(x)}{x}.$$

On dresse le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$	3	$\nearrow$	

(d) D'après le tableau de variation de g, g admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint en 1 et égal à $g(1) = 3$. Donc, pour tout $x > 0$, $g(x) \geq g(1) = 3 > 0$.

3. (a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{(1+\frac{1}{x}) \times x^2 - (x-1+\ln(x)) \times 2x}{x^4} = 1 + \frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln(x)}{x^4} \\ &= 1 + \frac{-x+3-2\ln(x)}{x^3} = \frac{x^3-x+3-2\ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) On en déduit les variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$:

- En 0^+ : par opérations sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
- En $+\infty$: $f(x) = x+1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées.

(c) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Donc 0 admet un unique antécédent $\alpha \in]0,+\infty[$ par f. Calculons $f(\frac{1}{2})$ et $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}+1+\frac{\frac{1}{2}-1+\ln(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2}+2-4-4\ln(2) = -\frac{1}{2}-4\ln(2) < 0, \\ f(1) &= 1+1+\frac{1-1+\ln(1)}{1^2} = 2 > 0. \end{aligned}$$

Comme f est croissante sur $]0,+\infty[$, on a donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4. (a) On a :

$$f(x)-(x+1) = \frac{x-1+\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissances comparées).}$$

(b) h est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x>0$,

$$h'(x) = 1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

On dresse le tableau de variation de h :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$
$h(x)$	||	$\nearrow$

(c) $h(1)=0$ donc, d'après les variations de h, $h(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$ et $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

(d) Pour tout $x>0$,

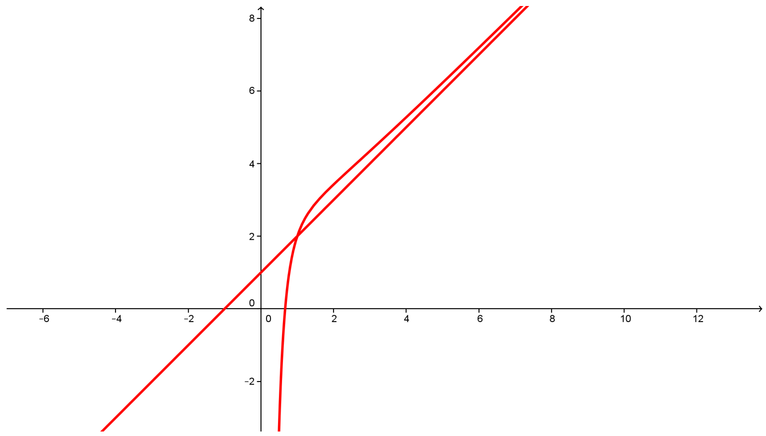
$$f(x)-(x+1) = \frac{x-1+\ln(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

Donc, d'après la question précédente, $f(x)-(x+1) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ sur $]0,1]$) et $f(x)-(x+1) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ sur $[1,+\infty[$).

5. (a) Voici les instructions pour tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ :

```
function y=f(x)
    y=x+1+(x-1+ln(x))/x^2
endfunction
function y=delta(x)
    y=x+1
endfunction
x=1/2:0.01:5
plot(x,f,x,delta)
```

(b) Voici l'allure de $\mathcal{C}_f$ et de Δ :



Exercice 3

1. Voici la procédure pour calculer S_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+ln(1+k/n^2)
end
disp(S)
```

2. (a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1+x>0$). Pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. f est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

(b) La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1+x>0$). Pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} + \frac{x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq g(0) = 0$. g est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

- d'après la question 2.(a), $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1+x)$.
- d'après la question 2.(b), $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

On a ainsi, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $x = \dfrac{k}{n^2}$ dans les inégalités (1) et on obtient

$$\frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2},$$

soit

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

(b) On somme les inégalités (2) pour k allant de 1 à n et on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

Or :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  $\displaystyle= \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = S_n.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$

On en déduit l'encadrement demandé :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

4. (a) On a :

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

et

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n^3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Avec la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \frac{1}{2}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.
D'après le théorème d'encadrement avec les inégalités de la question 3.(b), on a donc que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(P_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = S_n$$

Ainsi $S_n = \ln(P_n)$ et donc $P_n = e^{S_n}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} e^x = e^{1/2}$ (par continuité de la fonction exponentielle). Donc, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{1/2}$.

Exercice 4

1. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + x + 1 \neq 0$ ($\Delta = -3 < 0$).
Calculons les limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

(b) f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ (car une fonction rationnelle est continue et dérivable sur son ensemble de définition) et on a, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+x+1) - x \times (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

(c) En 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc la tangente $\mathcal{T}$ en 0 à $\mathcal{C}_f$ a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = x.$$

(d) Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{T}$, on étudie le signe de la différence $f(x) - x$:

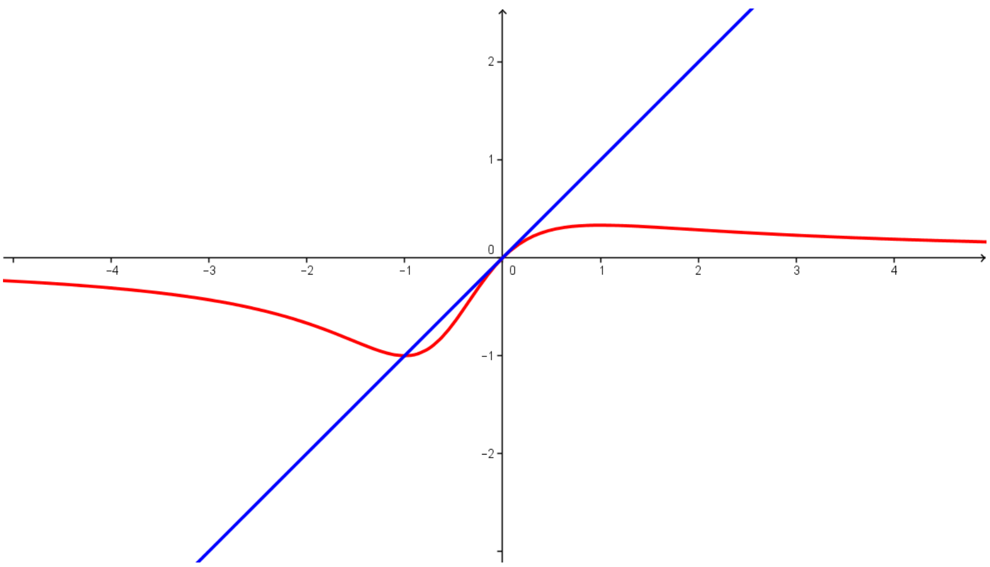
$$f(x) - x = \frac{x}{x^2+x+1} - x = \frac{x - x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = -\frac{x^2(x+1)}{x^2+x+1}.$$

On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2			$+$		0	$+$	
$x+1$		$-$	0		$+$		
x^2+x+1				$+$			
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{T}$ sur $]-\infty, -1]$ et en dessous sur $[-1, +\infty[$. Remarquons que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ s'intersectent en les points d'abscisse $x = -1$ et $x = 0$.

(e) Voici le tracé de $\mathcal{C}_f$ (en rouge) et $\mathcal{T}$ (en bleu) :



2. (a) Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n+n^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{1+n+n^2} = \frac{n}{1+n+n^2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} - f(\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n+1} - \frac{n}{1+n+n^2} = \frac{(1+n+n^2)-n(n+1)}{(n+1)(1+n+n^2)} = \frac{1+n+n^2-n^2-n}{(n+1)(1+n+n^2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(1+n+n^2)} \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien, pour tout entier naturel non nul n, $f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et on a bien $0 < u_0 \leq \frac{1}{0+1}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme f est strictement croissante sur $[0,1]$ (question 1.(b)) et que $0, u_n, \frac{1}{n+1} \in [0,1]$, on en déduit que $f(0) < f(u_n) \leq f(\frac{1}{n+1})$. Or $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\frac{1}{n+1}) \leq \frac{1}{n+2}$ avec la question précédente. On obtient alors $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n^2+u_n+1}} = \frac{u_n^2+u_n+1}{u_n} = \frac{u_n^2}{u_n} + \frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}.$$

(b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Initialisation : $u_1 = \frac{u_0}{u_0^2+u_0+1} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{1}{u_1} = 3$. D'autre part, $1 + 1 + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 3$. On a bien $\frac{1}{u_1} \leq 1 + 1 + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

$$\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n} \leq u_n + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n + n + 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

en utilisant la question précédente à la première égalité puis l'hypothèse de récurrence pour majorer.

D'après la question 2.(b), $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. On a donc :

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} + n + 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(c) i. On considère la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$. f est définie, continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'après le tableau de variation de f, f admet un maximum global en 0 qui vaut $f(0) = 0$. Donc :

$$\forall\, x \in]-1, +\infty[,\ f(x) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ \forall\, x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) - x \leq 0.$$

ii. Pour tout entier $k \geq 2$, $-\dfrac{1}{k} \in]-1, +\infty[$ et en prenant $x = -\dfrac{1}{k}$ dans l'inégalité de la question précédente, on a :

$$\ln(1 - \frac{1}{k}) + \frac{1}{k} \leq 0 \Leftrightarrow \ln(\frac{k-1}{k}) + \frac{1}{k} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq -\ln(\frac{k-1}{k}) \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

iii. Soit $n \geq 2$. En sommant pour k allant de 2 à n l'inégalité précédente, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)).$$

Comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) &= (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + \ldots + (\ln(n) - \ln(n-1)) \\ &= \ln(n) - \ln(1) = \ln(n), \end{aligned}$$

on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

(d) Avec les question 3.(b) et 3.(c), on a, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n + 1 + \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq n + 2 + \ln(n).$$

(e) Avec la question 2.(b), $nu_n \leq \dfrac{n}{n+1}$. Avec la question précédente, $nu_n \geq \dfrac{n}{n+2+\ln(n)}$.
On a donc :

$$\frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

Or on a :

- $\dfrac{n}{n+2+\ln(n)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissance comparée.
- $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.
