Correction - DS 3 (A)

Devoir surveillé du Mercredi 6 Novembre

Exercice 1 (EDHEC 1997)

1. (a) f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$.

Limite en $+\infty$: $f_n(x) = x\left(1 - n\dfrac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissance comparée.

Limite en 0 : $f_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ car $n > 0$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f_n(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Remarquons tout d'abord que $n - n\ln(n) = n(1-\ln(n)) < 0$ car $n \geq 3 > e$ donc $\ln(n) > 1$ par croissance de la fonction logarithme.

On a alors deux cas à traiter :

- Sur $]0,n[$: f_n est continue et strictement décroissante sur $]0,n[$ donc bijective (d'après le théorème de la bijection) de $]0,n[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to n} f_n, \lim\limits_{x\to 0} f_n\right[=]n - n\ln(n), +\infty[$. Comme $n - n\ln(n) < 0$, $0 \in]n - n\ln(n), +\infty[$ et admet donc un unique antécédent $u_n \in]0,n[$ par f_n.
- Sur $]n,+\infty[$: f_n est continue et strictement croissante sur $]n,+\infty[$ donc bijective (d'après le théorème de la bijection) de $]n,+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to n} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[=]n - n\ln(n), +\infty[$. Comme $n - n\ln(n) < 0$, $0 \in]n - n\ln(n), +\infty[$ et admet donc un unique antécédent $v_n \in]n,+\infty[$ par f_n.

Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet bien exactement deux solutions u_n et v_n sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $0 < u_n < n < v_n$ (il n'y a pas d'autres solutions car $f_n(n) = n - n\ln(n) \neq 0$).

2. (a) Soit un entier $n \geq 3$. On a $f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ (par définition) et $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ car $n \geq 3 > e$.

Donc $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$ et comme f_n est strictement décroissante sur $]0,n]$, on a finalement $1 < u_n < e$.

(b) $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition,

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \text{ donc } u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) = 0.$$

Finalement, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.

$f_n(u_n) = 0$ (par définition) et $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) \geq 0$ car $u_{n+1} \geq 1$ (question 2.(a)). Donc $f_n(u_n) \leq f_n(u_{n+1})$ et comme f_n est strictement décroissante sur $]0,n]$, on a $u_n \geq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est décroissante.

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc convergente vers une limite $\ell \geq 1$ (d'après le théorème des suites monotones).

Par définition, $f_n(u_n) = 0 = u_n - n\ln(u_n)$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$. Alors, en partant de l'inégalité de la question 2.(a) :

$$1 < u_n < e \underset{n>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{n} < \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \ln(u_n) < \frac{e}{n}.$$

Donc par encadrement $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$ (par composition avec la fonction exp qui est continue sur $\mathbb{R}$).

(d) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc :

$$\frac{\ln(u_n)}{u_n-1} = \frac{\ln(1+u_n-1)}{u_n-1} \sim \frac{u_n-1}{u_n-1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n-1} = 1$.

On calcule la limite du quotient de $u_n - 1$ et $\dfrac{1}{n}$ en faisant apparaître le quotient précédent :

$$\frac{u_n-1}{1/n} = n(u_n-1) = \frac{u_n-1}{\ln(u_n)} \times n\ln(u_n).$$

Comme $u_n - n\ln(u_n) = 0$ (par définition), on a :

$$\frac{u_n-1}{1/n} = \underbrace{\frac{u_n-1}{\ln(u_n)}}_{\to 1} \times \underbrace{u_n}_{\to 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.

3. (a) Par passage à la limite dans l'inégalité $n < v_n$, on a : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) On a :

$$f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln(n) - n[\ln(n) + \ln(\ln(n))] = -n\ln(\ln(n))$$

Comme $n > e$, $\ln(n) > 1$ et $\ln(\ln(n)) > 0$ (car ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). On a donc $f_n(n\ln(n)) < 0 = f_n(v_n)$. Comme f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$ et que $n\ln(n)$ et v_n en sont éléments (comme $\ln(n) \geq 1$, $n\ln(n) \geq n$), on en déduit que $n\ln(n) < v_n$.

(c) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	

$g(2) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2)) > 0$ car $2 < e$ donc $\ln(2) < 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) > 0$ et $n > 2\ln(n)$.

(d) On a alors :

$$\begin{aligned} f_n(2n\ln(n)) &= 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) \\ &= n\left[2\ln(n) - \ln(n) - \ln(2) - \ln(\ln(n))\right] \\ &= n\left[\ln(n) - \ln(2\ln(n))\right]. \end{aligned}$$

Comme $n > 2\ln(n)$ et que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$ et $f_n(2n\ln(n)) > 0$.

Donc $f_n(v_n) = 0 < f_n(2n\ln(n))$. Comme v_n et $2n\ln(n)$ appartiennent à $[n, +\infty[$ et que f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $v_n < 2n\ln(n)$.

(e) Avec les questions 3.(b) et 3.(d), on a pour tout entier $n \geq 3$:

$$n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n).$$

Par croissance stricte de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\ln(n\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(2n.\ln(n))$$

donc

$$\ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2) + \ln(\ln(n))$$

et en divisant par $\ln(n) > 0$ pour faire apparaître le quotient :

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}.$$

En posant $X = \ln(n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissance comparée.

Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$ et $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.

Exercice 2 (EDHEC 1997)

1. Si $p = 0$, on a $u_n = 1/\binom{n}{n} = 1$ donc la série diverge (en utilisant la condition nécessaire de convergence : le terme général doit tendre vers 0).

   Si $p = 1$, on a $u_n = 1/\binom{n+1}{n} = 1/(n+1) \sim 1/n$ dont la série (de Riemann) diverge. Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série des u_n diverge également.

2. (a) Comme $0 \leq n \leq n+p$, on a $\binom{n+p}{n} = \dfrac{(n+p)!}{n!p!}$. Alors :

$$(n+p+2)\,u_{n+2} = \frac{n+p+2}{\frac{(n+p+2)!}{n!(p+2)!}} = \frac{n!\,(p+1)!\,(p+2)\,(n+p+2)}{(n+p+1)!\,(n+p+2)}$$

car $n+p+1 \geq 0$ et $p+1 \geq 0$. Donc :

$$(n+p+2)\,u_{n+2} = (p+2)\,\frac{n!\,(p+1)!}{(n+p+1)!} = (n+2)\,u_{n+1}.$$

(b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété à démontrer. On démontre cette propriété pour tout $n \geq 1$ (on peut remarquer qu'elle n'est pas vraie si $n = 0$).

Ini. $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} u_k = u_1 = 1/\dbinom{1+p}{1} = \dfrac{1}{1+p}$ et $u_2 = 1/\binom{2+p}{2} = \dfrac{2}{(2+p)(1+p)}$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1}\left(1 - (1+p+1)\,u_{1+1}\right) &= \frac{1}{p-1}\left(1 - (p+2)\,\frac{2}{(2+p)(1+p)}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\frac{p-1}{1+p} = \frac{1}{1+p} = S_1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Héré. Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'une part, avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-1}\left(1-(n+1+p+1)\,u_{n+2}\right) &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+2)\,u_{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+2)\,u_{n+1}\right)\end{aligned}$$

D'autre part, avec l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n+u_{n+1} = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)\,u_{n+1}\right)+u_{n+1}\\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)\,u_{n+1}+(p-1)\,u_{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+2)\,u_{n+1}\right)\end{aligned}$$

d'où l'égalité et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+p+1)\,u_{n+1})$.

3. (a) On calcule la différence :

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= \frac{n+p+1}{\binom{n+1+p}{n+1}}-\frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} = \frac{(n+p+1)\,(n+1)!p!}{(n+p+1)!}-\frac{(n+p)\,n!p!}{(n+p)!}\\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!}\left[n+1-(n+p)\right] = \frac{p!n!}{(n+p)!}\,(1-p)<0\end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est décroissante.

(b) Comme (v_n) est à termes positifs, elle est minorée par 0. Par le théorème des suites monotones, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

(c) Comme $(n+p)\,u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$ alors $(n+p+1)\,u_{n+1} \to \ell$.
Donc $S_n = \dfrac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)\,u_{n+1}\right) \to \dfrac{1}{p-1}\,(1-\ell)$.
Donc la série de terme général (u_n) converge et sa somme est $\dfrac{1-\ell}{p-1}$.

4. (a) On calcule la limite du quotient en faisant apparaitre la quantité connue $(n+p)\,u_n$

$$\frac{u_n}{\ell/n} = \frac{(n+p)\,u_n}{\ell}\,\frac{n}{n+p} = \frac{(n+p)\,u_n}{\ell}\,\frac{1}{1\,(1+p/n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Donc, au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$.

(b) Comme la série de terme général ℓ/n (de Riemann) est divergente, par comparaison de séries à termes positifs, la série des u_n diverge également.
Ce qui est faux d'après la question 3.(c).

5. Donc $\ell = 0$ et la série de terme général u_n a pour somme $\dfrac{1}{p-1}$.

Exercice 3 (EDHEC 2019)

1. (a) On montre que $(A-I)^2 = 0$.

(b) Avec la question précédente, on a $A^2-2A+I=0$ donc $I=-A^2+2A=A(-A+2I)$.
Ainsi, A est inversible et $A^{-1}=-A+2I$.

2. (a) B et I commutent, donc on peut développer $(B+I)^n$ avec la formule du binôme. De plus, comme $B^2 = 0$, on a pour tout $k \geq 2$, $B^k = B^{k-2} \times B^2 = 0$. Alors, pour tout $n \geq 2$:

$$A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 = I + nB.$$

La formule est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = I + nB = I + n(A - I) = (1-n)I + nA.$$

(b) Pour $n = -1$, $(1-n)I + nA = 2I - A = A^{-1}$. La formule est toujours valable.

3. (a) D'après la question 1.(a), $P(X) = (X-1)^2$ est annulateur de A. Or, on sait que toute valeur propre λ de A vérifie $P(\lambda) = 0$ donc, nécessairement, $\lambda = 1$ et donc $Sp(A) \subset \{1\}$.
Reste à vérifier que 1 est bien valeur propre. Or

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est non inversible (par exemple car $C_2 = C_3$). Donc 1 est bien valeur propre et $Sp(A) = \{1\}$.

(b) Si A était diagonalisable, alors il existerait P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Comme $Sp(A) = \{1\}$, $D = I$ et $A = PIP^{-1} = I$ ce qui n'est pas vrai.
Donc A n'est pas diagonalisable.

4. (a) Voici les commandes demandées :

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> A = np.array([[0, 1, 1], [-2, 3, 2], [1, -1, 0]])
```

(b) L'instruction `al.matrix_rank(A-np.eye(3,3))` permet d'obtenir le rang de la matrice $A - I$. On a donc $\text{rg}(A - I) = 1$ et avec le théorème du rang matriciel :

$$\dim(E_1(A)) = \dim(\text{Ker}(A - I)) = 3 - \text{rg}(A - I) = 2.$$

(c) On a :

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ -2x + 2y + 2z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y + z$$

On a donc :

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y + z \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) et génératrice, c'est une base de $E_1(A)$. On retrouve donc que $\dim(E_1(A)) = 2$.

5. (a) On utilise la méthode du pivot de Gauss. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On obtient $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. (a) On a :

$$\begin{aligned} AM = MA &\Leftrightarrow PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \\ &\Leftrightarrow TP^{-1}M = P^{-1}MPTP^{-1} \quad \text{(en multipliant par } P^{-1} \text{ à gauche)} \\ &\Leftrightarrow TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \quad \text{(en multipliant par } P \text{ à droite)} \\ &\Leftrightarrow TN = NT. \end{aligned}$$

(b) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors :

$$MT = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix}$$

et

$$TM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$MT = TM \Leftrightarrow \begin{cases} a+g = a \\ b+h = b \\ c+i = a+c \\ d+f = f \\ g+i = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 0 \\ h = 0 \\ d = 0 \\ a = i \end{cases}$$

Ainsi, $TN = NT$ si et seulement si $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

(c) On a donc avec les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \text{ tels que } M = P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C_A &= \left\{ P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ P(a(E_{1,1} + E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3})P^{-1} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ aP(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + \ldots + ePE_{2,3}P^{-1} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}) \end{aligned}$$

Remarque : On a ainsi que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 5 avec pour base la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$ (on a démontré que cette famille est génératrice et il resterait à montrer qu'elle est libre).

Exercice 4 (EDHEC 2007)

1. (a) Voici le programme demandé :

```
def simulX() :
    Z = rd.geometric(1/2)
    X = rd.randint(1,Z+1)
    return(X)
```

(b) Ce programme créé un vecteur S contenant 10000 simulations de la variable aléatoire X et retourne la moyenne de ces simulations.

(c) Le résultat obtenu correspond à la moyenne empirique. Comme nous avons effectué un grand nombre de simulations de X (10000), cette moyenne empirique est proche de l'espérance théorique $E(X)$ de X. Donc $E(X) \simeq 1,5149$.

Ceci est effectivement le cas puisqu'il est démontré à la question 5.(c) que $E(X) = \dfrac{3}{2}$.

2. La série est à termes positifs et comme $\dfrac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente donc la série converge par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

3. Z suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$, donc admet une espérance et une variance et

$$E(Z) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

4. (a) Si $Z = k$, il y a des boules numérotées de 1 à k dans l'urne donc :
   - Si $i > k$, $P_{(Z=k)}(X = i) = 0$.
   - Si $1 \leq i \leq k$, par équiprobabilité de tirer chaque boule de l'urne, $P_{(Z=k)}(X = i) = \dfrac{1}{k}$.

(b) La famille $(Z = k)_{k\geq 1}$ est un système complet d'évènements donc :

$$(X = i) = \bigcup_{k=1}^{+\infty}((Z = k) \cap (X = i))$$

Alors, par incompatibilité puis avec les probas composées, on a :

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}((Z = k) \cap (X = i))\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((Z = k) \cap (X = i)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i). \end{aligned}$$

On sépare selon les deux cas vus précédemment :

$$P(X = i) = \sum_{k=1}^{i-1} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i) + \sum_{k=i}^{+\infty} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i).$$

On peut donc remplacer par les valeurs :

$$P(X = i) = \sum_{k=1}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{1}{2}^k = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(c) On peut donc échanger les sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

5. (a) On a pour tout $k \geq i$, $\dfrac{i}{k} \leq 1$. Donc

$$iP(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=i}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

(b) La série des $iP(X=i)$ est à termes positifs, et son terme général est majoré par le terme général d'une série convergente (géométrique).

Elle est donc convergente d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, et absolument convergente car $|iP(X=i)| = iP(X=i)$.

La variable aléatoire X admet donc une espérance.

(c) On échange donc l'ordre des sommes :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} i.$$

La deuxième somme est une formule connue :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On change d'indice pour faire apparaître une série géométrique dérivée, puis on rajoute le terme manquant :

$$E(X) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\times(4-1) = \frac{3}{2}.$$

6. (a) Pour tout $i \geq 1$, on déduit de 5.(a) que

$$i^2P(X=i) \leq i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

La série des $i^2P(X=i)$ est à termes positifs donc l'absolue convergence est équivalente à la convergence.

Or cette série est convergente car elle est à termes positifs et son terme général est majoré par le terme général d'une série géométrique dérivée convergente, donc elle converge absolument.

On en déduit que X admet bien un moment d'ordre 2.

(b) Par théorème de transfert on a :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2P(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} i^2.$$

Cette deuxième somme est à nouveau connue :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times (k+1)(2k+1).$$

(c) On développe des deux côtés et on identifie :

$2k^2+3k+1 = ak^2+(b-a)k+c$ donc $a=2, c=1$ et $b-a=3$ donc $b=a+3=2+3=5$.

Enfin on obtient :

$$(k+1)\ (2k+1) = 2k(k-1)+5k+1.$$

(d) On en déduit que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(2k(k-1)+5k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{5}{12}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

et on a fait apparaître trois séries connues :

$$E(X^2) = \frac{1}{12}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{5}{12}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}(16+20+2) = \frac{38}{12}.$$

On en déduit alors que par formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2)-[E(X)]^2 = \frac{38}{12}-\frac{9}{4} = \frac{38-27}{12} = \frac{11}{12}.$$

7. On a vu à la question précédente que X admet une variance. On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev en prenant $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$ pour faire apparaitre $X-3$:

$$\begin{aligned} \left(\left|X-\frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right) &= \left(X-\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}\right)\bigcup\left(X-\frac{3}{2}\leq-\frac{3}{2}\right) \\ &= (X\geq 3)\cup\underbrace{(X\leq 0)}_{\text{impossible}} = (X\geq 3). \end{aligned}$$

donc

$$P(X\geq 3) = P\left(\left|X-\frac{3}{2}\right|\geq\frac{3}{2}\right) \leq \frac{V(X)}{(3/2)^2} = \frac{11/12}{9/4} = \frac{11}{27}.$$

8. (a) C'est une somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k-1} = x^0\times\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

(b) On intègre l'égalité précédente entre 0 et $\dfrac{1}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}\right)\ dx = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{k-1}\ dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

d'une part, et d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x^n}{1-x}\ dx &= \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\ dx - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\ dx = \Big[-\ln|1-x|\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\ dx \\ &= -\ln(\frac{1}{2})+\ln(1)-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\ dx = \ln(2)-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\ dx. \end{aligned}$$

On obtient bien

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2)-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\ dx.$$

(c) Pour tout $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on a :

- d'une part, $0 \leq x^n \leq \dfrac{1}{2^n}$,
- d'autre part, $0 < \frac{1}{2} \leq 1 - x \leq 1$ donc par décroissance de l'inverse $1 \leq \frac{1}{1-x} \leq 2$.

On multiplie ces deux encadrements positifs :

$$0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

et on intègre entre 0 et $\dfrac{1}{2}$ (bornes dans l'ordre croissant), on obtient

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}\, dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Par théorème d'encadrement, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx = 0.$$

(d) On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \right) \\ &= \ln(2) - \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \right) = \ln(2) - 0 = \ln(2). \end{aligned}$$

On en déduit ensuite que

$$P(X=2) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

(e) On obtient finalement :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=1) - P(X=2) = 1 - \ln(2) - \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - 2\ln(2) \approx 0,1.$$
