Correction - DS 3 - Sujet A

Devoir surveillé du Lundi 6 Novembre

Exercice 1 (EML 2020)

1. La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ car elle est le quotient de $x \mapsto \ln(1-x)$ qui est dérivable sur $]0,1[$ et de $x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable sur $]0,1[$ et ne s'annule pas sur $]0,1[$.

   Pour tout $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{1-x}\ \ln(x) - \ln(1-x)\frac{1}{x}}{\big(\ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{\frac{-x\,(1-x)}{1-x}\ \ln(x) - \ln(1-x)\ \frac{x\,(1-x)}{x}}{x(1-x)\ \big(\ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)}{x\,(1-x)\ \big(\ln(x)\big)^2} \end{aligned}$$

2. (a) Soit $t \in]0,1[$. Alors $\ln(t) < 0$ donc $t\ln(t) < 0$ (par multiplication par $t > 0$).

   (b) Soit $x \in]0,1[$. D'après la question 1, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\ \big(-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)\big)$$

   Or : $x > 0$, $1-x > 0$ et $\big(\ln(x)\big)^2 > 0$. Ainsi : $x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2 > 0$.
   On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de la quantité $-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)$.
   En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = x \in]0,1[$, on obtient : $x\ \ln(x) < 0$ et donc $-x\ \ln(x) > 0$.
   En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = 1-x \in]0,1[$, on obtient : $(1-x)\ \ln(1-x) < 0$ et donc $-(1-x)\ \ln(1-x) > 0$.
   Ainsi : $-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x) > 0$. On en déduit : $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0,1[$.

3. (a) Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0 \times 0 = 0$$

   La fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

   (b) Soit $x \in]0,1[$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - 0}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x\ln(x)} \sim \frac{-x}{x\ \ln(x)} = \frac{-1}{\ln(x)}$$

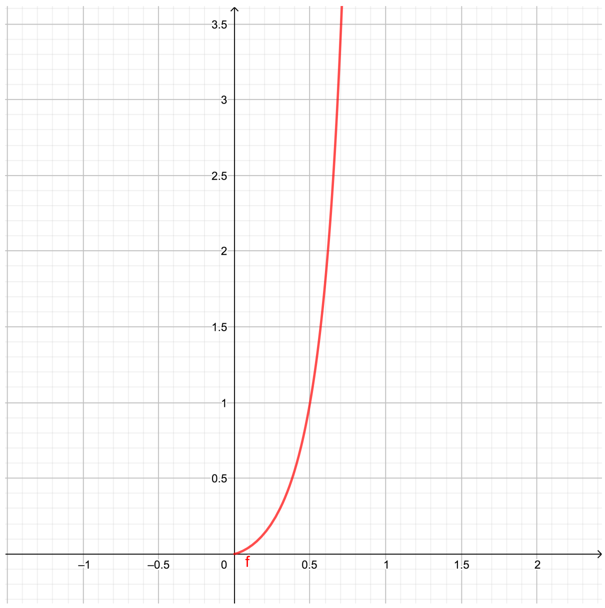
   Or : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{\ln(x)} = 0$. Le taux d'accroissement admet donc une limite finie lorsque $x \to 0$.
   On en conclut que la fonction f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.

4. Tout d'abord, comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$. En posant $t = 1-x$, on obtient : $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = \lim\limits_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$. On en déduit, par produit de limites :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = +\infty$$

Comme $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.

5. Voici la courbe représentative (faire attention à bien représenter la tangente horizontale en 0 et l'asymptote verticale d'équation $x = 1$) :



6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.

La fonction h_n est une fonction polynomiale (de degré n). Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h_n'(x) \;=\; nx^{n-1} + 1$$

Comme $x \geq 0$, alors : $x^{n-1} \geq 0$. Ainsi : $nx^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$h_n'(x)$	$+$	
$h_n(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

La fonction h_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $h_n([0, +\infty[)$. Or :

$$h_n([0, +\infty[) \;=\; [h_n(0), \lim_{x \to +\infty} h_n(x)[\;=\; [-1, +\infty[$$

Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0, +\infty[$.

L'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $h_n(0) = -1$, $h_n(u_n) = 0$ (par définition) et $h_n(1) = 1$. Donc :

$$h_n(0) \;<\; h_n(u_n) \;<\; h_n(1)$$

Or, h_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On obtient donc en revenant aux antécédents que :

$$0 < u_n < 1.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \,]0, 1[$.

8. Par définition, u_1 est l'unique solution positive de l'équation : $h_1(x) = 0$. Or :

$$h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\,x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On en déduit : $u_1 = \frac{1}{2}$.
Par définition, u_2 est l'unique solution positive de l'équation : $h_2(x) = 0$. Or :

$$h_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Cette fonction polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$. Ainsi, h_2 admet deux racines :

$$x_- = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad x_+ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Comme $5 \geq 1$, alors : $\sqrt{5} \geq \sqrt{1} = 1$ et ainsi : $\sqrt{5} - 1 \geq 0$.
On en déduit : $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

9. (a) Voici le programme demandé :

```
def valeur_approchee(n)
  a = 0
  b = 1
  while (b-a) > 10**(-3):
    c = (a+b)/2
    if c^n+c-1>0:
      b = c
    else:
      a = c
  return(c)
```

(b) Le graphe permet d'effectuer les conjectures suivantes :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{2}$,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{\ln(1 - u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= \frac{\ln\left({u_n}^n\right)}{\ln(u_n)} \quad (\text{car } {u_n}^n = 1 - u_n \text{ par définition de } u_n) \\ &= n \end{aligned}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f(u_n) = n$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$f(u_n) = n \ \leq \ n + 1 = f(u_{n+1})$$

Or, d'après l'étude en partie A, la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$. On obtient donc en revenant aux antécédents que : $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

(c) Toujours d'après la partie A, f est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$. Donc f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$ et elle admet une bijection réciproque $f^{-1} :]0,+\infty[\to]0,1[$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
Donc (u_n) converge vers $\ell = 1$.

Exercice 2 (ECRICOME 2019)

1. (a) Calculs laissés au lecteur.

   (b) Comme X^3 est un polynôme annulateur de A dont la seule racine est 0, on en déduit que 0 est la seule valeur propre possible de A.
   Comme $L_2 = L_3$, A est non inversible et 0 est bien une valeur propre de A.
   Ainsi, 0 est bien l'unique valeur propre de A.

   (c) Supposons que A est diagonalisable. Alors il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   Comme $Sp(A) = \{0\}$, $D = 0$. Donc $A = PDP^{-1} = 0$ ce qui est faux.
   Donc A n'est pas diagonalisable.

2. (a) Avec la méthode du pivot de Gauss (calculs laissés au lecteur), on prouve que P est inversible et que :
$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Calculs laissés au lecteur. On obtient :
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) On observe immédiatement (ou avec la résolution d'un système) que
$$M = -A + I, \qquad \text{ou encore} \qquad \alpha = -1,\ \beta = 1.$$

   (b) On observe que $M - I = -A$. Ainsi, $(M-I)^3 = (-A)^3 = 0$ d'après 1.(a). Comme M et I commutent, on peut développer
$$0 = (M-I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I \iff M^3 - 3M^2 + 3M = M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I.$$
   On en déduit que M est inversible et que
$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.$$

   (c) Comme $M = -A + I$ et que $-A$ commute avec I, la formule du binôme de Newton donne
$$\begin{aligned} M^n &= (-A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } (-A)^k \cdot I^{n-k} = (-A)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } A^k = 0,\ k \geq 3) \\ &= \binom{n}{0}(-A)^0 + \binom{n}{1}(-A)^1 + \binom{n}{2}(-A)^2 \\ &= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

Pour $n=-1$, la formule donnerait (avec $A = I - M$)

$$M^{-1} = I + A + A^2 = I + I - M + I - 2M + M^2 = 3I - 3M + M^2,$$

ce qui est bien la relation trouvée en 3.(d). Cette formule est donc également vraie pour $n=-1$.

4. (a) On a avec la question 2.(b) :

$$Y^2 = P^{-1}XPP^{-1}XP = P^{-1}X^2P = P^{-1}AP = T.$$

(b) Comme $Y^2 = T$, on obtient :

$$YT = YY^2 = Y^3 = Y^2Y = TY.$$

(c) On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors :

$$YT = TY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e = i \\ b = f \\ d = h = g = 0 \end{cases}$$

Il existe donc bien trois réels a, b, c tels que $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(d) On a :

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Mais alors, $Y^2 = T$ donne en particulier $a = 0$ et $2ab = 1$ ce qui est impossible.

(e) Comme on abouti à une contradiction, la supposition de départ est donc fausse. Il n'y a donc pas de solution à l'équation matricielle $X^2 = A$.

Exercice 3

1. La variable `U` est une matrice ligne de 100 termes telle que, pour tout $1 \leq k \leq 100$, $U(k) = k$.

   La variable `V` est une matrice ligne de 100 termes telle que, pour tout $1 \leq k \leq 100$, $V(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = H_k$ (c'est la somme cumulée des inverses des entiers contenus dans la matrice ligne `U`).

   Ce programme trace les 100 premiers termes de la suite des sommes partielles $(H_n)_{n\geq 1}$ de la série harmonique.

   On constate que cette suite des sommes partielles divergent vers $+\infty$. Ceci est conforme aux résultats du cours puisque c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$.

2. Voici la fonction `seuil` demandée :

```python
def seuil() :
    N=1
    H=1
    while H<10 :
        N = N+1
        H = H+1/N
    return(N)
```

   Après avoir exécuté la fonction, on obtient $N = 12367$. La série diverge donc très lentement vers $+\infty$.

3. La variable `U` est une matrice ligne de 99 termes telle que, pour tout $2 \leq k \leq 100$, $U(k-1) = k$.

   La variable `V` est une matrice ligne de 99 termes telle que, pour tout $2 \leq k \leq 100$, $V(k-1) = 1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i} = H_k$.

   La variable `W` est une matrice ligne de 99 termes telle que, pour tout $2 \leq k \leq 100$, $W(k-1) = \ln(k)$.

   La variable `T` est une matrice ligne de 99 termes (car on commence au deuxième terme pour ne pas diviser par 0) telle que, pour tout $2 \leq k \leq 100$, $T(k-1) = \dfrac{H_k}{\ln(k)}$.

   Ce programme trace les 99 premiers termes de la suite $\left(\dfrac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$.

   On remarque que la suite $\left(\dfrac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ semble converger vers 1. En d'autres termes, on a donc $H_n \sim \ln(n)$. Ceci avait été démontré dans l'exercice 1 de la séance d'approfondissement 4.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ puis en intégrant sur des bornes croissantes, on a :

$$n \leq t \leq n+1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{n} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{n+1} \ \Rightarrow\ \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dt.$$

   Comme $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_n^{n+1} 1 dt = \frac{1}{n} [t]_n^{n+1} = \frac{1}{n}$ et de même $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dt = \frac{1}{n+1}$, on obtient finalement que :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}.$$

   (b) • $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq 0, \end{aligned}$$

   d'après la question précédente.

   • $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt \geq 0, \end{aligned}$$

   d'après la question précédente.

   • On a :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = -\ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

   par continuité de ln en 1.

On a démontré que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
D'après le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite γ.

(c) Voici la fonction `gamma` demandée :

```
def gamma(eps) :
    n = 1
    H = 1
    u = H
    v = H-np.log(2)
    while np.abs(u-v)>eps :
        n = n+1
        H = H+1/n
        u = H-np.log(n)
        v = H-np.log(n+1)
    return(u,v)
```

Après exécution de cette fonction, on obtient en entrant dans la console `gamma(0.001)` que $u \simeq 0.5777156$ et $v \simeq 0.5767161$. Donc $\gamma \simeq 0.57$. Ceci correspond bien à la valeur de la constante d'Euler donnée dans l'exercice 1 de la séance d'approfondissement 4.

Exercice 4 (EDHEC 2007)

1. (a) Voici le programme demandé :

```
def simulX() :
    Z = rd.geometric(1/2)
    X = rd.randint(1,Z+1)
    return(X)
```

(b) Ce programme créé un vecteur S contenant 10000 simulations de la variable aléatoire X et retourne la moyenne de ces simulations.

(c) Le résultat obtenu correspond à la moyenne empirique. Comme nous avons effectué un grand nombre de simulations de X (10000), cette moyenne empirique est proche de l'espérance théorique $E(X)$ de X. Donc $E(X) \simeq 1,5149$.

Ceci est effectivement le cas puisqu'il est démontré à la question 5.(c) que $E(X) = \dfrac{3}{2}$.

2. La série est à termes positifs et comme $\dfrac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente donc la série converge par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

3. Z suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$, donc admet une espérance et une variance et

$$E(Z) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

4. (a) Si $Z = k$, il y a des boules numérotées de 1 à k dans l'urne donc :
   - Si $i > k$, $P_{(Z=k)}(X = i) = 0$.
   - Si $1 \leq i \leq k$, par équiprobabilité de tirer chaque boule de l'urne, $P_{(Z=k)}(X = i) = \dfrac{1}{k}$.

   (b) La famille $(Z = k)_{k\geq 1}$ est un système complet d'évènements donc :
$$(X = i) = \bigcup_{k=1}^{+\infty}((Z = k) \cap (X = i))$$
   Alors, par incompatibilité puis avec les probas composées, on a :
$$\begin{aligned} P(X = i) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}((Z = k) \cap (X = i))\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((Z = k) \cap (X = i)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i). \end{aligned}$$
   On sépare selon les deux cas vus précédemment :
$$P(X = i) = \sum_{k=1}^{i-1} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i) + \sum_{k=i}^{+\infty} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i).$$
   On peut donc remplacer par les valeurs :
$$P(X = i) = \sum_{k=1}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{1}{2}^k = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

   (c) On peut donc échanger les sommes :
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

5. (a) On a pour tout $k \geq i$, $\dfrac{i}{k} \leq 1$. Donc
$$iP(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=i}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

   (b) La série des $iP(X = i)$ est à termes positifs, et son terme général est majoré par le terme général d'une série convergente (géométrique).
   Elle est donc convergente d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, et absolument convergente car $|iP(X = i)| = iP(X = i)$.
   La variable aléatoire X admet donc une espérance.

   (c) On échange donc l'ordre des sommes :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} i.$$
   La deuxième somme est une formule connue :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{k(k + 1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(k + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On change d'indice pour faire apparaître une série géométrique dérivée, puis on rajoute le terme manquant :

$$E(X) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\times(4-1) = \frac{3}{2}.$$

6. (a) Pour tout $i \geq 1$, on déduit de 5.(a) que

$$i^2 P(X = i) \leq i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

La série des $i^2 P(X = i)$ est à termes positifs donc l'absolue convergence est équivalente à la convergence.

Or cette série est convergente car elle est à termes positifs et son terme général est majoré par le terme général d'une série géométrique dérivée convergente, donc elle converge absolument.

On en déduit que X admet bien un moment d'ordre 2.

(b) Par théorème de transfert on a :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} i^2.$$

Cette deuxième somme est à nouveau connue :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times (k+1)(2k+1).$$

(c) On développe des deux côtés et on identifie :

$$2k^2+3k+1 = ak^2+(b-a)k+c \quad \text{donc} \quad a = 2, c = 1 \text{ et } b-a = 3 \quad \text{donc} \quad b = a+3 = 2+3 = 5.$$

Enfin on obtient :

$$(k+1)\ (2k+1) = 2k(k-1) + 5k + 1.$$

(d) On en déduit que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(2k(k-1)+5k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{5}{12}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

et on a fait apparaître trois séries connues :

$$E(X^2) = \frac{1}{12}\times\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{5}{12}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}(16+20+2) = \frac{38}{12}.$$

On en déduit alors que par formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{38}{12} - \frac{9}{4} = \frac{38-27}{12} = \frac{11}{12}.$$

7. On a vu à la question précédente que X admet une variance. On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev en prenant $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$ pour faire apparaitre $X-3$:

$$\begin{aligned}\left(\left|X-\frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right) &= \left(X-\frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}\right) \bigcup \left(X-\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{2}\right)\\ &= (X \geq 3) \cup \underbrace{(X \leq 0)}_{\text{impossible}} = (X \geq 3).\end{aligned}$$

donc

$$P(X \geq 3) = P\left(\left|X-\frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right) \leq \frac{V(X)}{(3/2)^2} = \frac{11/12}{9/4} = \frac{11}{27}.$$

8. (a) C'est une somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = x^0 \times \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

(b) On intègre l'égalité précédente entre 0 et $\dfrac{1}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

d'une part, et d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}\, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx = \Big[-\ln|1-x|\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx\\ &= -\ln(\frac{1}{2}) + \ln(1) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx.\end{aligned}$$

On obtient bien

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx.$$

(c) Pour tout $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on a :

- d'une part, $0 \leq x^n \leq \dfrac{1}{2^n}$,
- d'autre part, $0 < \frac{1}{2} \leq 1-x \leq 1$ donc par décroissance de l'inverse $1 \leq \frac{1}{1-x} \leq 2$.

On multiplie ces deux encadrements positifs :

$$0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

et on intègre entre 0 et $\dfrac{1}{2}$ (bornes dans l'ordre croissant), on obtient

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}\, dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Par théorème d'encadrement, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx = 0.$$

(d) On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(2)-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\right) \\ &= \ln(2)-\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\right) = \ln(2)-0=\ln(2). \end{aligned}$$

On en déduit ensuite que

$$P(X=2)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1=\ln(2)-\frac{1}{2}.$$

(e) On obtient finalement :

$$P(X\geq 3)=1-P(X=1)-P(X=2)=1-\ln(2)-\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-2\ln(2)\approx 0,1.$$