DS4

Correction du devoir surveillé du 11/03/17

Exercice 1

1. La fonction g est le quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et le dénominateur $2x+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$g'(x) = \frac{e^{x+1}(2x+1) - 2e^{x+1}}{(2x+1)^2} = e^{x+1}\frac{2x-1}{(2x+1)^2}.$$
Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x-1$, donc le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$ est donné par :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^1	$\searrow$	$\frac{e^{3/2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la limite de g en $+\infty$, on a :
$$g(x) = \frac{e^{x+1}}{2x+1} = \frac{e^x \times e^1}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{e^x}{x} \times \frac{e^1}{2+\frac{1}{x}}.$$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (par croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{e^1}{2}$. Par produit, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$g(x) \geq \frac{e^{3/2}}{2} > 1 \Leftrightarrow \frac{e^{x+1}}{2x+1} > 1 \underset{\exp(x+1)>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2x+1} > \frac{1}{e^{x+1}} = e^{-x-1}$$

3. La fonction f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car $x \mapsto \frac{x-n}{x+n}$ est le quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$) et sa dérivée est donnée par :
$$f_n'(x) = \frac{(x+n)-(x-n)}{(x+n)^2} - (-1)e^{-x} = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}.$$
Cette dérivée est clairement strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ (somme de deux termes strictement positifs).
Déterminons la limite de f_n en $+\infty$:
$$\frac{x-n}{x+n} = \frac{x\times\left(1-\frac{n}{x}\right)}{x\times\left(1+\frac{n}{x}\right)} = \frac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

Remarquons que $f_n(0) = \frac{-n}{n} - e^0 = -1-1 = -2$.
On en déduit le tableau de variations suivant:

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	-2		1

4. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après la question précédente). Donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+) = [-2, 1[$.

   Puisque $0 \in [-2, 1[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet bien une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f_n qui est une bijection).

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \left(\frac{x-(n+1)}{x+(n+1)} - e^{-x}\right) - \left(\frac{x-n}{x+n} - e^{-x}\right) = \frac{x-n-1}{x+n+1} - \frac{x-n}{x+n} \\ &= \frac{(x-n-1)(x+n) - (x-n)(x+n+1)}{(x+n+1)(x+n)} \\ &= \frac{x^2+nx-nx-n^2-x-n-x^2-nx-x+nx+n^2+n}{(x+n+1)(x+n)} \\ &= \frac{-2x}{(x+n+1)(x+n)} \leq 0. \end{aligned}$$

   (b) En posant $x = u_{n+1}$ (qui est bien positif) dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$f_{n+1}(u_{n+1}) - f_n(u_n) \leq 0 \underset{f_{n+1}(u_{n+1})=0}{\Leftrightarrow} -f_n(u_{n+1}) \leq 0 \Leftrightarrow f_n(u_{n+1}) \geq 0.$$

   (c) Comme $f_n(u_n) = 0$ (par définition de u_n), on a avec la question précédente $f_n(u_{n+1}) \geq f_n(u_n)$. Or $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ et f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après la question 4.). Donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante.

6. (a) Comme $f_n(n) = -e^{-n} < 0$ et $f_n(u_n) = 0$ (toujours par définition de u_n), on en déduit que $f_n(n) \leq f_n(u_n)$. La fonction f_n étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ (question 4.), on en déduit que $n \leq u_n$.

   (b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (c) Un calcul direct nous donne $f_n(n+1) = \dfrac{1}{2n+1} - e^{-n-1}$ et en utilisant la question 3, on en déduit que $f_n(n+1) \geq 0$.

   (d) Comme $f_n(u_n) = 0$ (par définition de u_n), on en déduit que $f_n(n+1) > f_n(u_n)$. Par croissance de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ (question 4.), on en déduit que $n+1 \geq u_n$.
   Cette inégalité combinée à l'inégalité que la question 7.(a), nous donne $n \leq u_n \leq n+1$. En divisant de part et d'autre de cette inégalité par n, on en déduit que $1 \leq \dfrac{u_n}{n} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$, le théorème d'encadrement s'applique et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

Exercice 2

1. Avec le système complet d'événements (R_0, V_0, J_0), on a:

$$R_1 = (R_0 \cap R_1) \cup (V_0 \cap R_1) \cup (J_0 \cap R_1).$$

Donc:

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P((R_0 \cap R_1) \cup (V_0 \cap R_1) \cup (J_0 \cap R_1)) \\ &= P(R_0 \cap R_1) + P(V_0 \cap R_1) + P(J_0 \cap R_1) \\ &= P(R_0)P_{R_0}(R_1) + P(V_0)P_{V_0}(R_1) + P(J_0)P_{J_0}(R_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

en utilisant à la deuxième égalité le fait que les événements sont incompatibles et la formule des probabilités composées à la troisième.

De même, on obtient pour $P(V_1)$:

$$\begin{aligned} P(V_1) &= P(R_0)P_{R_0}(V_1) + P(V_0)P_{V_0}(V_1) + P(J_0)P_{J_0}(V_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Comme (R_1, V_1, J_1) est un système complet d'événements, on a:

$$P(J_1) = 1 - P(R_1) - P(V_1) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15 - 6 - 5}{15} = \frac{4}{15}.$$

2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (R_1, V_1, J_1):

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P((R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap R_2) \cup (J_1 \cap R_2)) \\ &= P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap R_2) + P(J_1 \cap R_2)) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2) + P(V_1)P_{V_1}(R_2) + P(J_1)P_{J_1}(R_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{15} \times \frac{1}{5} = \frac{18 + 10 + 4}{75} = \frac{32}{75}, \end{aligned}$$

en utilisant à la deuxième égalité le fait que les événements sont incompatibles et la formule des probabilités composées à la troisième.

3. On cherche $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$. Avec la formule des probabilités composées:

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) \times P_{V_1 \cap V_2}(V_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{75}.$$

4. On cherche $P_{R_2}(R_1)$.

$$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_2 \cap R_1)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}}{\frac{32}{75}} = \frac{6}{25} \times \frac{75}{32} = \frac{9}{16},$$

en utilisant la formule des probabilités composées à la troisième égalité.

5. (a) Comme (R_n, V_n, J_n) est un système complet d'événements, $r_n + v_n + j_n = 1$.

   (b) On considère le système complet d'événements (R_n, V_n, J_n). Alors:

$$R_{n+1} = (R_n \cap R_{n+1}) \cup (V_n \cap R_{n+1}) \cup (J_n \cap R_{n+1}).$$

On a donc:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= P(R_{n+1}) = P((R_n \cap R_{n+1}) \cup (V_n \cap R_{n+1}) \cup (J_n \cap R_{n+1})) \\ &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P(V_n \cap R_{n+1}) + P(J_n \cap R_{n+1}) \\ &= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(R_{n+1}) + P(J_n)P_{J_n}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{3}{5} + v_n \times \frac{2}{5} + j_n \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}r_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}(1 - r_n - v_n) = \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

en utilisant à la troisième égalité le fait que les événements sont incompatibles et la formule des probabilités composées à la quatrième.

Pour v_{n+1}, on a de la même façon,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= P(V_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(V_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(V_{n+1}) + P(J_n)P_{J_n}(V_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{1}{5} + v_n \times \frac{2}{5} + j_n \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}(1 - r_n - v_n) = -\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

On a alors:

$$r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} + \frac{1}{5}v_{n+1} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}r_{n+1} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25}.$$

(c) Pour tout $n \geq 1$, on a $r_n = u_n + \frac{7}{16}$. Alors, avec la relation précédente,

$$\begin{aligned} r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25} &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}\left(u_{n+1} + \frac{7}{16}\right) - \frac{1}{25}\left(u_n + \frac{7}{16}\right) + \frac{7}{25} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{14}{80} - \frac{1}{25}u_n - \frac{7}{400} + \frac{7}{25} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n + \frac{70 - 7 + 112}{400} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n + \frac{175}{400} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n, \end{aligned}$$

car $\frac{175}{400} = \frac{7 \times 25}{16 \times 25} = \frac{7}{16}$.
Ainsi, (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(d) L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est $x^2 = \frac{2}{5}x - \frac{1}{25}$ donc $(x - \frac{1}{5})^2 = 0$. Il y a donc une racine double $x_0 = \frac{1}{5}$. Donc il existe λ et μ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = (\lambda n + \mu)\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
Or $u_1 = r_1 - \frac{7}{16} = \frac{2}{5} - \frac{7}{16} = \frac{32 - 35}{80} = -\frac{3}{80}$ (en utilisant la question 1.).
Et $u_2 = r_2 - \frac{7}{16} = \frac{32}{75} - \frac{7}{16} = \frac{16 \times 32 - 7 \times 75}{1200} = \frac{512 - 525}{1200} = -\frac{13}{1200}$ (en utilisant la question 2.).
On a donc:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 = -\frac{3}{80} &=& (\lambda \times 1 + \mu) \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \\ u_2 = -\frac{13}{1200} &=& (\lambda \times 2 + \mu) \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& -\frac{3}{16} = -\frac{9}{48} \\ 2\lambda + \mu &=& -\frac{13}{48} \end{array}\right.$$

En faisant $L_2 - L_1$, on obtient: $\lambda = \dfrac{-13+9}{48} = \dfrac{-4}{48}$. Avec L_1, on a donc: $\mu = \dfrac{-9+4}{48} = \dfrac{-5}{48}$.
Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{-4n-5}{48}\left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad r_n = \frac{-4n-5}{48}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{7}{16}.$$

Exercice 3

1. (a) On a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right),
\end{aligned}$$

en utilisant la formule du binôme de Newton à la troisième égalité.

(b) Un calcul direct nous donne $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J.$

Il en découle que

$$\begin{aligned}
J^3 &= J^2 \times J = 3J \times J = 3J^2 = 3^2 J \quad J^4 = J^3 \times J = 3^2 J \times J = 3^2 J^2 = 3^3 J \\
J^5 &= J^4 \times J = 3^3 J \times J = 3^3 J^2 = 3^4 J
\end{aligned}$$

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad J^n = 3^{n-1} J$. Pour le prouver, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : J^n = 3^{n-1} J$.

<u>Initialisation</u>: $J^1 = J$ et $3^{1-1} J = 3^0 J = J$ donc $J^1 = 3^{1-1} J$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_1)$.

<u>Hérédité</u>: Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $J^n = 3^{n-1} J$ et montrons que $J^{n+1} = 3^n J$.

$$J^{n+1} = J^n \times J = 3^{n-1} J \times J = 3^{n-1} J^2 = 3^n J$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$.

<u>Conclusion</u>: Par le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $J^n = 3^{n-1} J$.

(c) On procède par identification des coefficients:

$$\begin{aligned}
M &= aI + bJ \Leftrightarrow \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $M = \dfrac{1}{2} I + \dfrac{1}{6} J$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices $\frac{1}{2}I$ et $\frac{1}{6}J$ commutent donc d'après la formule du binôme de Newton, on a:

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{6}J\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}J\right)^k\left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k J^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} I \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k J^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} I \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k 3^{k-1}J\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} I \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k 3^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right) J = \frac{1}{2^n}I+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

en utilisant la question 1.(a) à la cinquième égalité.

2. (a) On procède par un calcul direct

$$M^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^2-\frac{3}{2}M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}I$$

(b) On a: $M\left(M-\frac{3}{2}I\right) = -\frac{1}{2}I \Leftrightarrow M(-2M+3I) = I$.

Donc la matrice M est inversible et $M^{-1} = -2M+3I$.

(c) Montrer que pour entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM+b_nI$. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: "il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM+b_nI$".

<u>Initialisation</u>: $M^0 = I$ et recherchons deux réels a_0 et b_0 tel que $a_0M+b_0I = I$. On vérifie que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ convient bien puisque $0\times M+1\times I = I = M^0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>: Soit n un entier naturel. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM+b_nI$ et montrons qu'il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M+b_{n+1}I$.

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n\times M = (a_nM+b_nI)M = a_nM^2+b_nM = a_n\left(\frac{3}{2}M-\frac{1}{2}I\right)+b_nM \\
&= \left(\frac{3}{2}a_n+b_n\right)M-\frac{1}{2}a_nI.
\end{aligned}$$

En choisissant les réels $a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n$, on a bien $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I$.

(d) D'après la question 2.(b), on a $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + b_n \\ b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n \end{cases}$.

Puisque $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$, on en déduit que $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}$.

(e) $a_{n+2} = \dfrac{3}{2}a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n$.

Équation caractéristique: $x^2 = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0$ dont les racines sont $\dfrac{1}{2}$ et 1.

Il existe donc deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \mu 1^n = \lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \mu$.

On détermine λ et μ:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + \mu = a_0 \\ \lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 + \mu = a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \dfrac{1}{2}\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n = -1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ c'est-à-dire $b_n = -1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = -1 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Par conséquent, on en déduit que:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n &= \left[2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] M + \left[-1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] I \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. (a) Calcul laissé au lecteur. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Calcul laissé au lecteur. On obtient $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$ la propriété $M^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation: $M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $M^0 = PD^0P^{-1}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité: Soit n un entier naturel. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$M^{n+1} = M^n \times M = PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité et que $M = PDP^{-1}$ (en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} dans la relation $D = P^{-1}MP$). Donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Puisque D est une matrice diagonale, il est immédiat que $D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ ce qui nous permet d'écrire:

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n}+\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4. (a) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car le mobile se trouve au sommet A à l'instant 0.

$X_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ car le mobile se trouve au sommet A à l'instant 0 et qu'il a $\frac{2}{3}$ de chance d'y rester et sinon il se place sur B ou C avec la même probabilité.

(b) Les évènements A_n, B_n, C_n forment un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales appliquée à $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ nous donne:

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\
&= \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{6}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) \\
P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= \frac{1}{6}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) \\
P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\
&= \frac{1}{6}P(A_n) + \frac{1}{6}P(B_n) + \frac{2}{3}P(C_n),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n \end{array} \right.$.

Donc $X_{n+1} = MX_n$.

(c) Posons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété "$X_n = M^n X_0$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation: $M^0 \times X_0 = I \times X_0 = X_0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité: Soit n un entier naturel. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$.
On a $X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1}X_0$, en utilisant la question précédente à la première égalité et l'hypothèse de récurrence à la seconde. Donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion: Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

(d) En explicitant l'égalité précédente, on obtient:

$$a_n = \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \qquad b_n = -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \qquad c_n = -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3}.$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4

1. Un calcul direct nous donne $P^2 = I \Leftrightarrow PP = I$ donc P est inversible et son inverse est $P^{-1} = P$.

2. (a) En remarquant que $(1-a)^2 = 1-2a+a^2$ et $(1-a)^3 = 1-3a+3a^2-3a^3$, un calcul direct nous donne:

$$\begin{aligned}
PD(a) &= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & -a & -2a^2 & -3a^3 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^3 \\ 0 & 0 & 0 & -a^3 \end{pmatrix} \\
PD(a)P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1-2a+a^2 & 1-3a+3a^2-a^3 \\ 0 & a & 2a-2a^2 & 3a-6a^2+3a^3 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2-3a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = M(a)
\end{aligned}$$

(b) $D(a)D(b) = D(ab)$ car c'est le produit de deux matrices diagonales.

(c) Avec les deux questions précédentes, on a alors:

$$M(a)M(b) = PD(a)P^{-1}PD(b)P^{-1} = PD(a)D(b)P^{-1} = PD(ab)P^{-1} = M(ab).$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On procède par récurrence en posant $\mathcal{P}(n)$ la propriété: "$[M(a)]^n = M(a^n)$".
Initialisation: On a $[M(a)]^0 = I_4$ et $M(a^0) = M(1) = I_4$ (par calcul direct) donc $[M(a)]^0 = M(a^0)$, ce qui démontre $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$[M(a)]^{n+1} = [M(a)]^n M(a) \underset{\mathcal{P}(n)}{=} M(a^n)M(a) \underset{\text{question 3}}{=} M(a^n a) = M(a^{n+1})$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion: Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $[M(a)]^n = M(a^n)$.

4. (a) $M(c) = I_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-c=0 & 2c(1-c)=0 \\ (1-c)^2=0 & 3c(1-c)^2=0 \\ (1-c)^3=0 & 3c^2(1-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow c = 1.$
Donc $M(c) = I_4$ si et seulement si $c = 1$.

(b) On a donc $M(a)M(b) = I_4 \Leftrightarrow M(ab) = M(1) \Leftrightarrow ab = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{a}$.

Ainsi $M(a)M\left(\dfrac{1}{a}\right) = I_4$ donc $M(a)$ est inversible et son inverse est $[M(a)]^{-1} = M(a^{-1})$.

(c) Par ailleurs, $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice triangulaire dont certains éléments diagonaux sont nuls donc $M(0)$ n'est pas inversible.